麦克斯韦电磁场方程组的外微分形式

陈 强 顺
(同济大学物理系)

摘 要

本文以三维欧几里得空间 R^3 为限，简明扼要地阐述微分形式和外微分数学形式和数学理论的要点，并应用它表达电磁场方程，得麦克斯韦电磁场方程组的外微分形式。它与麦克斯韦电磁场方程组的微分形式与积分形式以及依张量分析为基础在闵可夫斯基四维空间中表达的麦克斯韦电磁场方程组的张量形式相比，有着自己的特点。列举了应用实例，得出：应用微分形式和外微分的数学工具是行之有效的，它简洁、紧凑，便于运算和处理。

以微积分学的数学理论为基础表达的麦克斯韦电磁场方程组，有如下积分形式与微分形式[1,2]：

$$\begin{cases} \oint\!\!\!\oint_S \boldsymbol{D}\cdot d\boldsymbol{S}=q, \\ \oint_l \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l}=-\iint_S \dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot d\boldsymbol{S}, \\ \oint\!\!\!\oint_S \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{S}=0, \\ \oint_l \boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{l}=\iint_S \dfrac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}\cdot d\boldsymbol{S}+I; \end{cases} \tag{1}$$

$$\begin{cases} \nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho, \\ \nabla\times\boldsymbol{E}=-\dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}, \\ \nabla\cdot\boldsymbol{B}=0, \\ \nabla\times\boldsymbol{H}=\dfrac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}+\boldsymbol{J}. \end{cases} \tag{2}$$

麦克斯韦电磁场方程组总结了并以严密的数学方程表述了电磁场的基本规律。

以张量分析的数学理论为基础表达麦克斯韦电磁场方程组，将变得更加简炼，方程个数由四个合为二个，并更显示出电磁场的统一性[2,3]。这是张量表式的优点。张量所表达的麦克斯韦电磁场方程组的形式为

$$\begin{cases} \nabla\times\boldsymbol{E}=-\dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}, \\ \nabla\cdot\boldsymbol{B}=0, \end{cases}$$

合写为

$$\frac{\partial \mathbf{F}_{\alpha\beta}}{\partial x_\gamma}+\frac{\partial \mathbf{F}_{\beta\gamma}}{\partial x_\alpha}+\frac{\partial \mathbf{F}_{\gamma\alpha}}{\partial x_\beta}=0; \tag{3}$$

$$\begin{cases} \nabla\times\boldsymbol{H}=\dfrac{\partial D}{\partial t}+\boldsymbol{J}, \\ \nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho, \end{cases}$$

合写为

$$\frac{\partial \mathbf{F}_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta}=\mu J_\alpha, \tag{4}$$

公式中的四维空间矢量 $x_\nu=(\boldsymbol{x},\ ict)$，电流密度四维矢量 $J_\nu=(\boldsymbol{J}, ic\rho)$，$\mu$ 为介质的磁导率，$\mathbf{F}_{\alpha\beta}$ 为电磁场张量(反对称四维张量)，其投影矩阵为

$$\mathbf{F}_{\alpha\beta}=\begin{bmatrix} 0 & B_3 & -B_2 & -\dfrac{i}{c}E_1 \\ -B_3 & 0 & B_1 & -\dfrac{i}{c}E_2 \\ B_2 & -B_1 & 0 & -\dfrac{i}{c}E_3 \\ \dfrac{i}{c}E_1 & \dfrac{i}{c}E_2 & \dfrac{i}{c}E_3 & 0 \end{bmatrix}. \tag{5}$$

用不同的数学理论表达同一物理规律，得到的数学方程在形式上自然相异，但是它们所描述的物理规律是客观的、固有的，不会因为表达的数学形式不同而变化。

微分形式和外微分的数学理论是法国数学家 E. Cartan 创建的。本文仅以三维欧几里

得空间 R^3 为限，扼要地阐述微分形式和外微分数学理论的要点，然后用它建立麦克斯韦电磁场方程组的外微分形式。

一、微分形式及其外积

在欧几里得空间 R^3 中，存在开集 U。就微分形式来说，数量场 $F(x, y, z)$ 称为零次微分形式，即零次微分形式是一可微分的函数 $F(x, y, z)$: $U \to R^3$。在开集 U 上，一次微分形式的表达式为[4,5]

$$dF(x, y, z) = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial F}{\partial x_i} dx_i, \qquad (6)$$

即

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial F}{\partial x_3} dx_3$$
$$= \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial z} dz.$$

令

$$\frac{\partial F}{\partial x} = f_1(x, y, z),$$
$$\frac{\partial F}{\partial y} = f_2(x, y, z),$$
$$\frac{\partial F}{\partial z} = f_3(x, y, z),$$

则上式写作

$$dF = f_1(x, y, z)dx + f_2(x, y, z)dy + f_3(x, y, z)dz.$$

设 $\omega^1 = dF$（上标 1 表示一次微分形式），则一次微分形式可表达为

$$\omega^1 = \sum_{i=1}^{3} f_i(x, y, z)dx_i. \qquad (7)$$

由此推理可得

$$dx_i = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial x_i}{\partial x_j} dx_j = dx_i.$$

一次形式的基为 $dx_1 = dx$, $dx_2 = dy$, $dx_3 = dz$，其配对的集合记为 $dx_i \wedge dx_j$，读作 dx_i 对 dx_j 外积或楔积。规定外积不服从交换律，当一次形式的基改变顺序时，外积改变一个正负号，并将该规定视为公理，于是

$$dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i. \qquad (8)$$

由此得

$$dx_i \wedge dx_i = -dx_i \wedge dx_i,$$
$$2dx_i \wedge dx_i = 0 \Rightarrow dx_i \wedge dx_i = 0.$$

于是，

$$dx \wedge dx = 0, \quad dy \wedge dy = 0,$$
$$dz \wedge dz = 0, \quad dt \wedge dt = 0.$$

由此可类推在开集 U 上的二次微分形式为[5-7]

$$\omega^2 = \sum_{1 \le i < j \le 3} f_{ij}(x, y, z)dx_i \wedge dx_j, \qquad (9)$$

式中每一个 $f_{ij}(x, y, z)$ 都是在开集 U 上的可微分函数。(9)式具体地可写为

$$\omega^2 = f_{12}(x, y, z)dx_1 \wedge dx_2 + f_{23}(x, y, z)dx_2 \wedge dx_3 + f_{31}(x, y, z)dx_3 \wedge dx_1$$

或

$$\omega^2 = P(x, y, z)dx \wedge dy + Q(x, y, z)dy \wedge dz + R(x, y, z)dz \wedge dx.$$

三次微分形式可表达为

$$\omega^3 = W(x, y, z)dx \wedge dy \wedge dz.$$

但是，在三维欧氏空间 R^3 中，不存在四次和四次以上的微分形式。

二、外 微 分

外微分是微分形式的一种数学运算．它来源于从零次微分形式 $F(x, y, z)$ 得出一次微分形式 $dF(x, y, z)$ 的过程与结果，它是对更高次微分形式的推广，而且引用与微分相同的记号，冠以 d 而得名的[6,7]。

某次微分形式产生新的更高一次的微分形式的微分运算，称为外微分。例如，零次微分形式的外微分可变成一次微分形式：

$$\omega^0 = F(x, y, z) \Rightarrow d\omega^0 = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial z} dz,$$

式中 $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial F}{\partial z}$ 是标量场 $F(x, y, z)$ 的梯度的三个分量，故上式可写为

$$d\omega^0 = \omega^1_{\nabla F} = \omega^1_{\nabla\omega^0}. \qquad (10)$$

一次微分形式(存在三个分量,故对应于矢量场)的外微分,变成二次微分形式:

$$\omega^1 = X(x,y,z)dx + Y(x,y,z)dy + Z(x,y,z)dz,$$

$$\begin{aligned}
d\omega^1 &= dX\wedge dx + dY\wedge dy + dZ\wedge dz\\
&= \left(\frac{\partial X}{\partial x}dx + \frac{\partial X}{\partial y}dy + \frac{\partial X}{\partial z}dz\right)\wedge dx\\
&\quad + \left(\frac{\partial Y}{\partial x}dx + \frac{\partial Y}{\partial y}dy + \frac{\partial Y}{\partial z}dz\right)\wedge dy\\
&\quad + \left(\frac{\partial Z}{\partial x}dx + \frac{\partial Z}{\partial y}dy + \frac{\partial Z}{\partial z}dz\right)\wedge dz\\
&= \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right)dx\wedge dy\\
&\quad + \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right)dy\wedge dz\\
&\quad + \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right)dz\wedge dx.
\end{aligned}$$

由于上式三个圆括号为矢量场 ω^1 的旋度的三个分量,故上式可写为

$$d\omega^1 = \omega^2_{\nabla\times\omega^1}. \qquad (11)$$

二次微分形式(存在三个分量,故也可对应于矢量场)的外微分,变成三次微分形式:

$$\omega^2 = P(x,y,z)dx\wedge dy + Q(x,y,z)dy\wedge dz + R(x,y,z)dz\wedge dx,$$

$$\begin{aligned}
d\omega^2 &= dP\wedge dx\wedge dy + dQ\wedge dy\wedge dz + dR\wedge dz\wedge dx\\
&= \left(\frac{\partial P}{\partial x}dx + \frac{\partial P}{\partial y}dy + \frac{\partial P}{\partial z}dz\right)\wedge dx\wedge dy\\
&\quad + \left(\frac{\partial Q}{\partial x}dx + \frac{\partial Q}{\partial y}dy + \frac{\partial Q}{\partial z}dz\right)\wedge dy\wedge dz\\
&\quad + \left(\frac{\partial R}{\partial x}dx + \frac{\partial R}{\partial y}dy + \frac{\partial R}{\partial z}dz\right)\wedge dz\wedge dx\\
&= \left(\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}\right)dx\wedge dy\wedge dz.
\end{aligned}$$

令 $Q = W_x$, $R = W_y$, $P = W_z$, 则

$$\begin{aligned}
d\omega^2 &= \left(\frac{\partial W_x}{\partial x} + \frac{\partial W_y}{\partial y} + \frac{\partial W_z}{\partial z}\right)dx\wedge dy\wedge dz\\
&= (\nabla\cdot W)dx\wedge dy\wedge dz.
\end{aligned}$$

鉴于上式右边为三次微分形式,故可写为

$$d\omega^2 = \omega^3_{\nabla\cdot W} \text{ 或 } d\omega^2 = \omega^3_{\nabla\cdot\omega^2}. \qquad (12)$$

可见,经一次外微分运算,微分形式的次升高一次,即

$$n\text{ 次形式} \overset{d}{\Longrightarrow} (n+1)\text{ 次形式} \qquad (13)$$

利用(10)与(11)两式,不难推得

$$d^2(\omega^0) = d(d\omega^0) = d(\omega^1_{\nabla\omega^0}) = \omega^2_{\nabla\times\nabla\omega^0} = 0,$$

因为梯度的旋度为零。

利用(11)与(12)两式,也不难推得

$$d^2(\omega^1) = d(d\omega^1) = d(\omega^2_{\nabla\times\omega^1}) = \omega^3_{\nabla\cdot\nabla\times\omega^1} = 0,$$

因为旋度的散度为零。

可见,对任何次微分形式连求两次外微分,其结果必定为零,即

$$d^2 = 0. \qquad (14)$$

下面,不妨顺便引进矢量代数的外积运算。上面已提到过矢量可用一次或二次微分形式表示,设两矢量为

$$\boldsymbol{A} = A_x i + A_y j + A_z \boldsymbol{k},$$

和 $$\boldsymbol{B} = B_x i + B_y j + B_z \boldsymbol{k},$$

则可分别表示为

$$\begin{cases}\omega^1_A = A_x dx + A_y dy + A_z dz,\\ \omega^2_A = A_x dy\wedge dz + A_y dz\wedge dx + A_z dx\wedge dy;\end{cases}$$

和

$$\begin{cases}\omega^1_B = B_x dx + B_y dy + B_z dz,\\ \omega^2_B = B_x dy\wedge dz + B_y dz\wedge dx + B_z dx\wedge dy.\end{cases}$$

显然,以上四式只要经过简单运算,即可得

$$\omega^1_A \pm \omega^1_B = \omega^1_{(A\pm B)}, \qquad (14a)$$

$$\omega^2_A \pm \omega^2_B = \omega^2_{(A\pm B)}. \qquad (14b)$$

若 S 为一标量场,则不难得到

$$\begin{cases}S\omega^1_A = \omega^1_{SA},\\ S\omega^2_A = \omega^2_{SA}.\end{cases} \qquad (14c)$$

外积

$$\begin{aligned}
\omega^1_A\wedge\omega^1_B &= (A_x dx + A_y dy + A_z dz)\\
&\quad \wedge(B_x dx + B_y dy + B_z dz)\\
&= (A_y B_z - B_y A_z)dy\wedge dz\\
&\quad + (A_z B_x - B_z A_x)dz\\
&\quad \wedge dx + (A_x B_y - B_x A_y)dx\\
&\quad \wedge dy = \omega^2_{A\times B},
\end{aligned}$$

得

$$\omega^1_A\wedge\omega^1_B = \omega^2_{A\times B}. \qquad (14d)$$

特例

$$\omega^1_A\wedge\omega^1_A = 0.$$

外积

$$\omega^1_A\wedge\omega^2_B = (A_x dx + A_y dy + A_z dz)$$

$$\wedge(B_x dy\wedge dz + B_y dz\wedge dx + B_z dx\wedge dy)$$
$$= (A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z)dx\wedge dy\wedge dz$$
$$= \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}dx\wedge dy\wedge dz = \omega^3_{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}},$$

得

$$\omega^1_{\boldsymbol{A}}\wedge\omega^2_{\boldsymbol{B}} = \omega^3_{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}}. \tag{14e}$$

特例

$$\omega^1_{\boldsymbol{A}}\wedge\omega^2_{\boldsymbol{A}} = \omega^3_{\boldsymbol{A}^2}.$$

利用微分形式与外微分的性质，以及此地求得的矢量外积运算的结果，就不难证明矢量分析中众多的场论公式，举例于下.

1. 试证

$$\nabla\cdot(S\boldsymbol{V}) = (\nabla S)\cdot\boldsymbol{V} + S\nabla\cdot\boldsymbol{V}$$

利用外微分的公式(12)式，则有

$$d\omega^2_{(S\boldsymbol{V})} = \omega^3_{\nabla\cdot(S\boldsymbol{V})}.$$

依照(14c)式，知上式等式左边为

$$d\omega^2_{(S\boldsymbol{V})} = d(S\omega^2_{\boldsymbol{V}}) = dS\wedge\omega^2_{\boldsymbol{V}} + Sd\omega^2_{\boldsymbol{V}}$$
$$= \omega^1_{\nabla S}\wedge\omega^2_{\boldsymbol{V}} + S\omega^3_{\nabla\cdot\boldsymbol{V}}$$

[利用(10)和(12)式]

$$= \omega^3_{(\nabla S)\cdot\boldsymbol{V}} + \omega^3_{S\nabla\cdot\boldsymbol{V}}$$

[利用(14e)和(14c)式]

$$= \omega^3_{[(\nabla S)\cdot\boldsymbol{V} + S\nabla\cdot\boldsymbol{V}]},$$

即证得

$$\nabla\cdot(S\boldsymbol{V}) = (\nabla S)\cdot\boldsymbol{V} + S\nabla\cdot\boldsymbol{V}.$$

2. 试证 $\nabla(\varphi\psi) = \varphi\nabla\psi + \psi\nabla\varphi$

利用外微分公式(10)式，则有

$$d\omega^0_{\varphi\psi} = \omega^1_{\nabla(\varphi\psi)},$$

但是

$$d\omega^0_{\varphi\psi} = \frac{\partial(\varphi\psi)}{\partial x}dx + \frac{\partial(\varphi\psi)}{\partial y}dy + \frac{\partial(\varphi\psi)}{\partial z}dz$$
$$= \left(\varphi\frac{\partial\psi}{\partial x} + \psi\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)dx + \left(\varphi\frac{\partial\psi}{\partial y} + \psi\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)dy + \left(\varphi\frac{\partial\psi}{\partial z} + \psi\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)dz$$
$$= \varphi\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}dx + \frac{\partial\psi}{\partial y}dy + \frac{\partial\psi}{\partial z}dz\right) + \psi\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z}dz\right)$$
$$= \omega^1_{[\varphi\nabla\psi + \psi\nabla\varphi]},$$

所以证得

$$\nabla(\varphi\psi) = \varphi\nabla\psi + \psi\nabla\varphi.$$

三、麦克斯韦电磁场方程组的外微分形式

为了建立麦克斯韦电磁场方程组的外微分形式，先必须设法把电磁场量 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{H}$ 和 $\boldsymbol{D}$，以及场源电流密度 $\boldsymbol{J}$ 和电荷密度 ρ 统一起来.引进电磁场量 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的二次微分形式 Φ、电磁场量 $\boldsymbol{H}$ 和 $\boldsymbol{D}$ 的二次微分形式 Ψ、场源电流密度 $\boldsymbol{J}$ 和电荷密度 ρ 的三次微分形式 Ω 如下:

$$\Phi = (E_x dx + E_y dy + E_z dz)\wedge dt + (B_x dy\wedge dz + B_y dz\wedge dx + B_z dx\wedge dy),$$
$$\Psi = -(H_x dx + H_y dy + H_z dz)\wedge dt + (D_x dy\wedge dz + D_y dz\wedge dx + D_z dx\wedge dy),$$
$$\Omega = (J_x dy\wedge dz + J_y dz\wedge dx + J_z dx\wedge dy)\wedge dt - \rho dx\wedge dy\wedge dz.$$

由此，可将麦克斯韦电磁场方程组表达为如下的外微分形式:

$$\begin{cases}\nabla\times\boldsymbol{E} = -\dfrac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t},\\ \nabla\cdot\boldsymbol{B} = 0,\end{cases}$$

合写为

$$d\Phi = 0; \tag{15}$$

$$\begin{cases}\nabla\times\boldsymbol{H} = \dfrac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t} + \boldsymbol{J},\\ \nabla\cdot\boldsymbol{D} = \rho,\end{cases}$$

合写为

$$d\Psi + \Omega = 0. \tag{16}$$

只要注意到电磁场量 $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{D}$ 的每三个分量都是坐标 (x, y, z) 和时间 t 的函数，那么就不难验证(15)和(16)两式成立. 它们就是麦克斯韦电磁场方程组的外微分形式[8].

将 Φ 代入(15)式，得

$$d\Phi = (dE_x\wedge dx + dE_y\wedge dy + dE_z\wedge dz)\wedge dt + (dB_x\wedge dy\wedge dz + dB_y\wedge dz\wedge dx + dB_z\wedge dx\wedge dy) = 0,$$

其中

$$dE_x = \frac{\partial E_x}{\partial x}dx + \frac{\partial E_x}{\partial y}dy + \frac{\partial E_x}{\partial z}dz$$

$$+\frac{\partial E_x}{\partial t}dt,$$

$$dE_y=\frac{\partial E_y}{\partial x}dx+\frac{\partial E_y}{\partial y}dy+\frac{\partial E_y}{\partial z}dz+\frac{\partial E_y}{\partial t}dt,$$

$$dE_z=\frac{\partial E_z}{\partial x}dx+\frac{\partial E_z}{\partial y}dy+\frac{\partial E_z}{\partial z}dz+\frac{\partial E_z}{\partial t}dt,$$

$$dB_x=\frac{\partial B_x}{\partial x}dx+\frac{\partial B_x}{\partial y}dy+\frac{\partial B_x}{\partial z}dz+\frac{\partial B_x}{\partial t}dt,$$

$$dB_y=\frac{\partial B_y}{\partial x}dx+\frac{\partial B_y}{\partial y}dy+\frac{\partial B_y}{\partial z}dz+\frac{\partial B_y}{\partial t}dt,$$

$$dB_z=\frac{\partial B_z}{\partial x}dx+\frac{\partial B_z}{\partial y}dy+\frac{\partial B_z}{\partial z}dz+\frac{\partial B_z}{\partial t}dt.$$

将以上六式代入上一式，并注意到 $dt\wedge dt=0$ 及有关外积的性质，得

$$\left[\left(\frac{\partial E_z}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial z}\right)+\frac{\partial B_x}{\partial t}\right]dt\wedge dy\wedge dz+\left[\left(\frac{\partial E_x}{\partial z}-\frac{\partial E_z}{\partial x}\right)+\frac{\partial B_y}{\partial t}\right]dt\wedge dz\wedge dx+\left[\left(\frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}\right)+\frac{\partial B_z}{\partial t}\right]dt\wedge dx\wedge dy+\left(\frac{\partial B_x}{\partial x}+\frac{\partial B_y}{\partial y}+\frac{\partial B_z}{\partial z}\right)dx\wedge dy\wedge dz=0,$$

于是得

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial E_z}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial z}&=-\frac{\partial B_x}{\partial t},\\ \frac{\partial E_x}{\partial z}-\frac{\partial E_z}{\partial x}&=-\frac{\partial B_y}{\partial t},\\ \frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}&=-\frac{\partial B_z}{\partial t},\end{aligned}\right\}$$

即

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t};$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial x}+\frac{\partial B_y}{\partial y}+\frac{\partial B_z}{\partial z}=0,$$

即

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0.$$

这就验证了(15)式 $d\Phi=0$，它等价于

$$\begin{cases}\nabla\times\boldsymbol{E}=-\dfrac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t},\\ \nabla\cdot\boldsymbol{B}=0.\end{cases}$$

同理，可验证(16)式 $d\Psi+\Omega=0$，它等价于

$$\begin{cases}\nabla\times\boldsymbol{H}=\dfrac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}+\boldsymbol{J},\\ \nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho.\end{cases}$$

以微分形式和外微分的数学理论为基础，表达麦克斯韦电磁场方程组，所得到的方程(15)和(16)两式比张量形式的(3)和(4)两式还要简炼。这也显示出了电磁场的统一性：电磁场量 $\boldsymbol{E}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 统一于二次微分形式 Φ 中，电磁场量 $\boldsymbol{H}$ 与 $\boldsymbol{D}$ 统一于二次微分形式 Ψ 中，电磁场源 $\boldsymbol{J}$ 与 ρ 统一于三次微分形式 Ω 中，并且(15)与(16)两式对任意参照系都成立。此外，(15)与(16)两式的外积运算和外微分运算都比较容易，例如对(16)式作外微分运算，注意到 $d^2=0$ 的外微分运算性质即可得到

$$d\Omega=0. \tag{17}$$

实际上，(17)式就是电荷守恒律

$$\nabla\cdot\boldsymbol{J}+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0$$

的外微分形式。验证于下：

将三次微分形式 Ω 代入(17)式，得

$$(dJ_x\wedge dy\wedge dz+dJ_y\wedge dz\wedge dx+dJ_z\wedge dx\wedge dy)\wedge dt-d\rho\wedge dx\wedge dy\wedge dz=0,$$

式中

$$dJ_x=\frac{\partial J_x}{\partial x}dx+\frac{\partial J_x}{\partial y}dy+\frac{\partial J_x}{\partial z}dz+\frac{\partial J_x}{\partial t}dt,$$

$$dJ_y=\frac{\partial J_y}{\partial x}dx+\frac{\partial J_y}{\partial y}dy+\frac{\partial J_y}{\partial z}dz+\frac{\partial J_y}{\partial t}dt,$$

$$dJ_z=\frac{\partial J_z}{\partial x}dx+\frac{\partial J_z}{\partial y}dy+\frac{\partial J_z}{\partial z}dz+\frac{\partial J_z}{\partial t}dt,$$

$$d\rho=\frac{\partial \rho}{\partial x}dx+\frac{\partial \rho}{\partial y}dy+\frac{\partial \rho}{\partial z}dz+\frac{\partial \rho}{\partial t}dt.$$

将这四式代入上一式，并考虑到 $dx_i\wedge dx_i=0$, $dt\wedge dt=0$ 及交换外积的顺序就要改变正负号这一公理，将上式整理后便得到

$$\left[\left(\frac{\partial J_x}{\partial x}+\frac{\partial J_y}{\partial y}+\frac{\partial J_z}{\partial z}\right)+\frac{\partial \rho}{\partial t}\right]dx\wedge dy\wedge dz\wedge dt=0,$$

即
$$\nabla\cdot\boldsymbol{J}+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0. \tag{18}$$

可见，(17)式同(18)式等价，而(16)式自动地包含电荷守恒律 $dQ=0$.

用微分形式和外微分的数学理论表述麦克斯韦电磁场方程组无疑有着若干长处。微分形式和外微分在物理学中还有其他的应用，例如在热力学中的某些应用。

热力学系统的内能 U、对外传递热量 Q、外界对系统作功 A、绝对温度 T 和熵 S 之间根据热力学第一定律和第二定律存在下列关系：

$$dU=dQ-dA$$

和
$$dQ=TdS.$$

因为
$$dA=PdV,$$

所以
$$dU=TdS-PdV. \tag{18a}$$

对(18a)式作外微分运算，考虑到 $d^2=0$ 的性质，则得 $dT\wedge dS=dP\wedge dV$. (18b)

鉴于 T 和 P 为 S 和 V 的函数，即

$$T=T(S,V)\ 和\ P=P(S,V),$$

若将这二式代入(18b)式，则

$$\left[\left(\frac{\partial T}{\partial S}\right)_V dS+\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_S dV\right]\wedge dS=\left[\left(\frac{\partial P}{\partial S}\right)_V dS+\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_S dV\right]\wedge dV,$$

亦即
$$\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_S dV\wedge dS=-\left(\frac{\partial P}{\partial S}\right)_V dV\wedge dS,$$

从而得
$$\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_S=-\left(\frac{\partial P}{\partial S}\right)_V; \tag{19}$$

当
$$\begin{cases}S=S(T,P),\\V=V(T,P)\end{cases}$$

时代入(18b)式，则

$$\left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_T dP\wedge dT=-\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P dP\wedge dT,$$

得
$$\left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_T=-\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P; \tag{20}$$

当
$$\begin{cases}T=T(S,P),\\V=V(S,P)\end{cases}$$

时代入(18b)式，则

$$\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_S dP\wedge dS=\left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)_P dP\wedge dS,$$

得
$$\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_S=\left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)_P; \tag{21}$$

当
$$\begin{cases}S=S(T,V),\\P=P(T,V)\end{cases}$$

时代入(18b)式，则

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T dT\wedge dV=\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V dT\wedge dV,$$

得
$$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T=\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V. \tag{22}$$

显然，利用外微分运算导出的热力学中的麦克斯韦等式(19)—(22)式，比用热力学中的方法导出要方便得多，简易得多。

总之，将微分形式和外微分的数学理论应用于有关学科是行之有效的，其优越之处也是明显的。

[1] 赵凯华、陈熙谋，电磁学，人民教育出版社，(1979)，295.

[2] 郭硕鸿，电动力学，人民教育出版社，(1979)，19，245.

[3] D. J. Griffiths, Introduction to Electrodynamics, Prentice-Hall, Inc. (1981), 273, 445.

[4] M. Schreiber 著，白正国译，微分形式导论，人民教育出版社，(1979).

[5] C. Goffman, Calculus of Several Variables, Harper & Row, Publishers, (1965), 149.

[6] L. J. Corwin, R. H. Szczarba, Calculus in Vector Space, Marcel Dekker, Inc. (1979), Chap. 15, 651.

[7] J. E. Marsden, A. J. Tromba, Vector Calculus, W. H. Freeman and Compeny, Second Edition, (1981), 472.

[8] C. V. Westenholz, Differential Forms in Mathematical Physics, North-Holland Publishing Company, (1981), 180.