外微分形式及其在物理问题中的应用

张德明　倪致祥　马　涛

（阜阳师范学院物理系）

外微分形式可以说是这样的一些量，在它们上面可以施行外积（即反对称化的直积）运算、外微分（与微分算子的外积）运算以及积分运算。用外微分形式表述的物理定律具有特别简洁的形式，而且计算是自然的和自动的，不受空间维数的限制，也不必记住矢量分析中的许多公式。本文将以简化了的方式介绍外微分形式的理论概要，并以电磁学为例介绍它的应用.

一、外代数

设有定义在数域K上的n维线性空间E，它的点(又叫向量)是具有

$$x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

形式的n个数的有序集合。我们在E的元素间引入一种运算，叫做外积，用符号“$\wedge$”表示。p个向量$u_1, u_2, \cdots, u_p$的外积

$$u_1\wedge u_2\wedge\cdots\wedge u_p$$

是一个具有如下性质的量:

（1）外积关于每个因子都是线性的，即若

$$u_i=\sum_{j=1}^{s} a_{ij}v_j,$$

则

$$\begin{aligned} & u_1\wedge u_2\wedge\cdots\wedge u_i\wedge\cdots u_p \\ = & u_1\wedge u_2\wedge\cdots\wedge\sum_{j=1}^{s} a_{ij}v_j\wedge\cdots\wedge u_p \\ = & \sum_{j=1}^{s} a_{ij}u_1\wedge u_2\wedge\cdots\wedge v_j\wedge\cdots\wedge u_p. \end{aligned}$$

（2）任意两个因子的交换都会导致整个外积变号，即外积关于其任意两个因子都是反对称的.

由此推出，外积中任何两个因子的重复或它们线性相关都会使外积为零。

我们把表达式

$$\omega=a_{i_1i_2\cdots i_p}(x)dx_{i_1}\wedge dx_{i_2}\wedge\cdots\wedge dx_{i_p} \quad (1)$$

称为p次外微分形式，简称p-形式。这里$a_{i_1i_2\cdots i_p}(x)$是线性空间E的点函数。我们已采用了爱因斯坦约定，即同一项内重复的指标意味着对此指标从1到n求和。p-形式就是以$dx_{i_1}\wedge dx_{i_2}\wedge\cdots\wedge dx_{i_p}$为基底的线性空间的元。这个空间的维数显然应当是

$$\frac{n^2-n}{2}=C_n^2.$$

一个p-形式

$$\overset{p}{\omega}=a_{i_1i_2\cdots i_p}(x)dx_{i_1}\wedge dx_{i_2}\wedge\cdots\wedge dx_{i_p}$$

和一个q-形式

$$\overset{q}{\varphi}=b_{j_1j_2\cdots j_q}(x)dx_{j_1}\wedge dx_{j_2}\wedge\cdots\wedge dx_{j_q}$$

的外积是

$$\begin{aligned}\overset{p}{\omega}\wedge\overset{q}{\varphi}= & a_{i_1i_2\cdots i_p}(x)b_{j_1j_2\cdots j_q}(x)dx_{i_1}\wedge\cdots \\ & \wedge dx_{i_p}\wedge dx_{j_1}\wedge\cdots dx_{j_q}, \end{aligned} \quad (2)$$

因而是一个$(p+q)$-形式。在$p+q>n$时，$\overset{p}{\omega}\wedge\overset{q}{\varphi}=0$，因为每项中总有重复的因子。

外积的运算满足如下的反交换律:

$$\overset{p}{\omega}\wedge\overset{q}{\varphi}=(-1)^{pq}\,\overset{q}{\varphi}\wedge\overset{p}{\omega}. \quad (3)$$

这是因为将$\overset{p}{\omega}$的每一项中的p个因子在保持原来顺序的情况下全部移至$\overset{q}{\varphi}$的之后，可以用pq次对换得到，因而出现了因子$(-1)^{pq}$.

为了应用上的方便，我们引入一个线性算子，叫做星算子，用符号“*”表示，它能将一个n维空间的p-形式变成一个$(n-p)$-形式。因为是线性算子，我们只需对仅有一项的p-形式定义这个算子就可以了。设

$$\overset{p}{\omega}=a(x)dx_{i_1}\wedge dx_{i_2}\wedge\cdots\wedge dx_{i_p},$$

则

$$*\overset{p}{\omega}=a(x)(-1)^{\sigma}dx_{j_1}\wedge dx_{j_2}\wedge\cdots\wedge dx_{j_{n-p}},\tag{4}$$

这里，排列 $(j_1, j_2, \cdots, j_{n-p})$ 是排列 $(i_1, i_2, \cdots, i_p)$（设已按自然顺序排列好）的补排列，即从排列 $(1, 2, \cdots, n)$ 中减去 $(i_1, i_2, \cdots, i_p)$ 后剩下的元素的排列（按原来的顺序）。σ 是将排列 $(i_1, i_2, \cdots, i_p, j_1, j_2, \cdots, j_{n-p})$ 化为 $(1, 2, \cdots, n)$ 所需要进行的对换的个数。

例如在四维空间中，若

$$\overset{2}{\omega}=adx_1\wedge dx_4+bdx_1\wedge dx_3,$$

则

$$*\overset{2}{\omega}=adx_2\wedge dx_3-bdx_2\wedge dx_4.$$

将 $(1, 4, 2, 3)$ 化为 $(1, 2, 3, 4)$ 要作偶数次对换，而将 $(1, 3, 2, 4)$ 化为 $(1, 2, 3, 4)$ 则要作奇数次对换。

可以直接验证，对于奇数维空间，$*^2=1$；对于偶数维空间，当作用于偶次形式时，$*^2=1$，当作用于奇次形式时，$*^2=-1$。以上事实可以统一用下面公式表示：$*^2=(-1)^{p(n-p)}$，n 为空间维数，p 为被作用的微分形式的次数。按逆算子的定义 $(AA^{-1}=A^{-1}A=1)$，可以将算子 $*$ 的逆表示为

$$*^{-1}=(-1)^{p(n-p)}*.$$

二、外 微 分

设

$$\overset{p}{\omega}=a_{i_1i_2\cdots i_p}(x)dx_{i_1}\wedge dx_{i_2}\wedge\cdots\wedge dx_{i_p}$$

是一个 p-形式，我们定义 $\overset{p}{\omega}$ 的外微分是

$$d\overset{p}{\omega}=da_{i_1i_2\cdots i_p}(x)\wedge dx_{i_1}\wedge dx_{i_2}\wedge\cdots\wedge dx_{i_p},\tag{5}$$

其中 $da_{i_1\cdots i_p}(x)=\dfrac{\partial a_{i_1\cdots i_p}(x)}{\partial x_i}dx_i$，即通常的全微分。显然，一个 p-形式的外微分是一个 $(p+1)$-形式。在通常的三维空间中，0-形式，1-形式和 2-形式的外微分即通常的梯度、旋度和散度运算。

将外微分算子作用在两个微分形式的外积上，可以得到一个重要公式：

$$d(\overset{p}{\omega}\wedge\overset{q}{\varphi})=d\overset{p}{\omega}\wedge\overset{q}{\varphi}+(-1)^p\overset{p}{\omega}\wedge d\overset{q}{\varphi}.\tag{6}$$

只要利用函数乘积的微分公式和外积的反交换关系即可证明(6)式。

通常三维空间的矢量分析公式

$$\nabla\cdot(fg)=\nabla f\cdot g+f\cdot\nabla g,$$

$$\nabla\times(f\boldsymbol{v})=\nabla f\times\boldsymbol{v}+f\cdot\nabla\times\boldsymbol{v},$$

$$\nabla\cdot(f\boldsymbol{v})=\nabla f\cdot\boldsymbol{v}+f\cdot\nabla\cdot\boldsymbol{v},$$

$$\nabla(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{u})=\nabla\times\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}\cdot\nabla\times\boldsymbol{u},$$

分别是 (6) 式在 $n=3$，$p=q=0$；$p=0$，$q=1$；$p=0$，$q=2$ 和 $p=q=1$ 情形下的特例。

下面我们证明一个关于外微分形式的重要定理。

Poincaré 定理：任何微分形式的二阶外微分皆为零，即 $d^2\omega=0$. (7)

证明：设

$$\omega=a_{i_1i_2\cdots i_p}(x)dx_{i_1}\wedge dx_{i_2}\wedge\cdots\wedge dx_{i_p},$$

$$\begin{aligned}d^2\omega&=d\left(\frac{\partial a_{i_1i_2\cdots i_p}}{\partial x_i}dx_i\wedge dx_{i_1}\wedge dx_{i_2}\wedge\cdots\wedge dx_{i_p}\right)\\&=\frac{\partial^2 a_{i_1i_2\cdots i_p}}{\partial x_i\partial x_j}dx_j\wedge dx_i\wedge dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_p}\\&=\sum_{i<j}\left(\frac{\partial^2 a_{i_1\cdots i_p}}{\partial x_j\partial x_i}-\frac{\partial^2 a_{i_1\cdots i_p}}{\partial x_i\partial x_j}\right)\\&\quad\cdot dx_i\wedge dx_j\wedge dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_p}\\&=0.\end{aligned}$$

在三维空间的矢量分析中，有两个事实是 Poincaré 定理的特例，即标量的梯度的旋度为零(相当于 $d^2\overset{0}{\omega}=0$) 和矢量的旋度的散度为零(相当于 $d^2\overset{1}{\omega}=0$)。

Poincaré 定理的逆命题是这样的：若一 p-形式 $\overset{p}{\omega}$ 的外微分为零，则必有一个 $(p-1)$-形式 $\overset{p-1}{S}$ 存在，使得 $\overset{p}{\omega}=d\overset{p-1}{S}$。

在物理上，这个命题所指的就是位势的存在性。

Poincaré 定理的逆命题仅在单通区域内成立。n 维空间中的所谓单通区域是这样的区域，在这个区域中，连结任意两点的任意两条曲线中的任一条，可以通过在此区域内的连续变形而达到另一条。例如，在平面上除去一点以

外的区域不是单通区域。三维空间中除去一点的区域仍是单通区域，而除去一个环的区域不是单通区域。

在三维空间的矢量分析中，我们已经知道，如果一个矢量场的旋度为零，则可以表示为某个标量场的梯度；如果一个矢量场的散度为零，则可表示为某个矢量场的旋度。这是 Poincaré 定理的逆定理在 $p=1$ 和 $p=2$ 时的特例。相反的例子也是有的，如稳恒电流产生的磁场，在电流外部可以表示一个 1-形式

$$H = H_x dx + H_y dy + H_z dz,$$

且 $dH=0$，但不存在一个标量函数 f，使得 $df=H$。这是因为稳恒电流必占据一个环形区域，电流外部的空间不是单通区域。

三、积　　分

n 维空间的 p 维流形 M 是这样一个区域，这个区域里的每一点的坐标 x_μ 可以用光滑的，一一对应的方式表示为 p 个参量 $t_1, t_2, \cdots, t_p$ 的函数，即 $x_\mu = x_\mu(t_1, t_2, \cdots, t_p)$。例如，三维空间中的 0，1，2，3 维流形就是熟知的点、线、面、体。

一个 p-形式

$$\alpha = \alpha_{\mu_1\mu_2\cdots\mu_p} dx_{\mu_1} \wedge dx_{\mu_2} \wedge \cdots \wedge dx_{\mu_p}$$

在一个 p 维流形 C 上的积分定义为如下形式的多重积分：

$$\int_C \alpha dV_p = \int \alpha_{\mu_1\mu_2\cdots\mu_p} \frac{\partial x_{\mu_1}}{\partial t_{i_1}} \cdot \frac{\partial x_{\mu_2}}{\partial t_{i_2}} \cdots \frac{\partial x_{\mu_p}}{\partial x_{i_p}} dt_{i_1} dt_{i_2} \cdots dt_{i_p}.$$

积分限由流形的边界确定。

可以证明，一个 p-形式 α 的外微分 $d\alpha$ 在一个 $(p+1)$ 维流形 C 上的积分等于 p-形式 α 本身在该流形的 p 维边界 ∂C 上的积分，即

$$\int_C d\alpha \cdot V_{p+1} = \int_{\partial C} \alpha \cdot dV_p, \tag{8}$$

这个公式叫做 Stokes 公式。

三维空间的矢量分析中的 Stokes 定理、Gauss 定理和二维空间中的 Green 公式分别是(8)式在 $n=3, p=1$ 和 $n=3, p=2$ 以及 $n=2, p=1$ 时的特例。

由(6)式，我们可以得到外微分形式的分部积分公式：

$$\int_C (d\alpha \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge d\beta) dV_{p+q+1} = \int_{\partial C} \alpha \wedge \beta dV_{p+q}, \tag{9}$$

其中 α 和 β 各为 p-形式和 q-形式，C 是一个 $(p+q+1)$ 维流形，∂C 是 C 的 $(p+q)$ 维边界。

在坐标发生变化时，微分形式的各分量的变换规律是与一般协变张量的变换规律相同的。如坐标经历一个线性变换 $x'_i = a_{ij} x_j$，并且变换的矩阵 $A=\{a_{ij}\}$ 是正交的(即 $A\tilde{A}=I$)，则

$$x_i = a_{ji} x'_j.$$

将上式代入到 p-形式

$$\omega = A_{i_1 i_2 \cdots i_p} dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}$$

中，得

$$\begin{aligned}\omega &= A_{i_1\cdots i_p} a_{j_1 i_1} dx'_{j_1} \wedge a_{j_2 i_2} dx'_{j_2} \wedge \cdots \wedge a_{j_p i_p} dx'_{j_p} \\ &= A_{i_1 i_2 \cdots i_p} a_{j_1 i_1} a_{j_2 i_2} \cdots a_{j_p i_p} dx'_{j_1} \\ &\quad \wedge dx'_{j_2} \wedge \cdots \wedge dx'_{j_p} \\ &= A'_{j_1 j_2 \cdots j_p} dx'_{j_1} \wedge dx'_{j_2} \wedge \cdots \wedge dx'_{j_p},\end{aligned}$$

即 $\quad A'_{j_1 j_2 \cdots j_p} = a_{j_1 i_1} a_{j_2 i_2} \cdots a_{j_p i_p} A_{i_1 i_2 \cdots i_p}.$

将外微分形式用于电磁学上，可以得到比张量分析更为简洁的形式。

在四度 Minkowski 空间中取坐标

$$x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = z, \quad x_4 = ict,$$

用一个叫做四度势的 1-形式

$$A = A_\mu dx_\mu = A_x dx_1 + A_y dx_2 + A_z dx_3 + \frac{i\varphi}{c} dx_4 \tag{10}$$

来描述电磁场，其中 $\boldsymbol{A}=(A_x, A_y, A_z)$ 和 φ 是电磁场的矢势和标势。它们和电场强度 $\boldsymbol{E}$、磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 之间的关系是

$$\boldsymbol{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}, \quad \boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}.$$

A 的外微分是一个2-形式，即

$$F = dA = dA_\mu \wedge dx_\mu = \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} dx_\nu \wedge dx_\mu. \tag{11}$$

若将 F 写作 $F = \sum\limits_{\mu<\nu} \left(\frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} \right) dx_\mu \wedge dx_\nu$，

则可以验证 $\left(\frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu}-\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}\right)$ 均是由 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{E}$ 的分量构成的。对于确定的 F，A 不完全确定，若用

$$A' = A + d\phi \tag{12}$$

代替 A，则因为 $d^2\phi = 0$，所以 F 不变，其中 ϕ 是坐标和时间的任何可微函数。(12)式叫做规范变换。洛伦兹条件 $\nabla\cdot\boldsymbol{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0$ 可表示为

$$d(*A) = 0. \tag{13}$$

由 Poincaré 定理，

$$d^2A = 0. \tag{14}$$

这就是第一对麦克斯韦方程：

$$\nabla\times\boldsymbol{E} = -\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t},\quad \nabla\cdot\boldsymbol{B}=0.$$

如果引入一个叫做四度电流密度的1-形式

$$J = J_\mu dx_\mu = j_x dx_1 + j_y dx_2 + j_z dx_3 + ic\rho dx_4, \tag{15}$$

其中 $\boldsymbol{j}=(j_x, j_y, j_z)$ 和 ρ 各为通常的电流密度和电荷密度。连续性方程 $\nabla\cdot\boldsymbol{j}+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0$ 可表示为

$$d(*J) = 0. \tag{16}$$

第二对麦克斯韦方程为

$$\nabla\times\boldsymbol{H}-\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}=\boldsymbol{j},\quad \nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho,$$

它可表示为

$$d(*F) = \mu_0(*J), \tag{17}$$

μ_0 是真空的导磁率。

洛伦兹力 $\boldsymbol{f}=\rho\boldsymbol{E}+\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{B}$ 和电流的功率 $\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{E}$ 可统一用一个叫做四度洛伦兹力的1-形式

$$f = f_x dx_1 + f_y dx_2 + f_z dx_3 + \frac{i}{c}\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{E}dx_4 \tag{18}$$

表示，它和 J，F 的关系是

$$f = -*[J\wedge(*F)]. \tag{19}$$

[1] 方德植，微分几何基础，科学出版社，(1984)，30.
[2] E. 鲁滨主编，物理中的数学，科学出版社，(1981)，113.
[3] C. Goffman 著，史济怀等译，多元微积分，人民教育出版社，(1978)，133.
[4] C. Von Westenholz, Defferential Forms in Mathematical Physics, North-Holland, Amsterdam, (1981), 141.
[5] Yvonne Choqvet-Bruhat et al., Analysis, Manifolds and Physics, North-Holland, Amsterdam, (1977), 187.
[6] 陈强顺，物理，17-8(1988)，468.

(上接第576页)

超重元素应该溶解在水中并形成氯化物。他们测定了苏联南里海切什肯半岛的地热海水，从 2×10^6L 的海水中提取出金属化合物，测得每公斤化合物每天约有五次自发裂衰变。

特别需要指出的是，弗列罗夫采用了由他自己所发明的研究奇异粒子径迹的方法，找到了分散在陨石内橄榄石晶体中一些核的痕迹，据推测它们的 $Z\geqslant110$。

弗列罗夫现在虽已年逾七旬，但是仍然精力充沛，富于创造力。超重元素、太阳中微子、新型的回旋加速器和电子回旋加速器的设计和制造、新型的辐射探测器的制造、土壤的微量元素的分析和疫苗的制造等等，都属于他的研究范围。

弗列罗夫培养了整个年轻一代的核物理学家。

弗列罗夫在苏联国内外享有崇高的威望。他于1946年、1949年和1975年荣获国家奖金，1967年荣获列宁奖金，1949年荣获社会主义劳动英雄称号，还曾经荣获苏联和其它国家颁发的勋章和奖章。1969年弗列罗夫成为丹麦皇家科学院外国院士。他是德意志利奥波尔季纳科学院荣誉院士，是许多外国大学的荣誉博士。

[1] Ю. А. Храмов, Физики, Киев, Наукова Думка, (1977), 334, 460, 479, 481, 482, 484, 485.
[2] 张宝深等编，俄汉新词新义，商务印书馆，(1982)，177.
[3] А. П. Александров и др. УФН, 109-3 (1973), 617
[4] Я. Б. Зельдович, и др. УФН, 139-3(1983), 553.
[5] 李兆龙，核技术杂志，No. 4 (1987), 60.
[6] А. П. Гринберг, В. Я. Френкель, УФН, 139-3 (1983), 465.
[7] А. М. 普罗霍罗夫等编，丁祖永等译，苏联百科词典，中国大百科全书出版社，(1986)，396，736.