

利用全息透镜实现光学矩阵乘法¹⁾

张东生²⁾ 陈岩松

(中国科学院物理研究所)

本文提出了用两个多轴全息透镜和两片掩膜组成的光学系统实现两个矩阵相乘的运算。用三阶和六阶矩阵进行了相乘实验,结果表明,运算相对平均误差在5%左右。

光学计算的并行性特别适合于线性代数中的矩阵运算。由于用计算机解线性方程组和线性微分方程,以及进行线性变换、相关与卷积等操作都可化为矩阵运算来处理,所以对光学矩阵运算进行研究是很有意义的。众所周知,在两个 $n \times n$ 矩阵的相乘运算中,共有 n^2 次乘法和 n^2 次加法运算操作。如果用电子计算机去进行这个运算,则共需要 $2n^2$ 次按时序进行的运算操作,因而是相当费时的。如果用光学方法进行这个运算,则最多需要 n 次时序运算操作,甚至只需要一次运算操作就可完成全部计算。因此,从七十年代起,国外许多专家、学者对光学矩阵运算研究十分重视,发表了大量论文。

在光学矩阵运算中,用掩膜输入数据是最常用的方法。在这类系统中,Goodman 的矩阵-矢量相乘系统^[1], Nakano 的多个矩阵相乘系统^[2]和 Liang 的矩阵-矩阵相乘系统^[3]具有一定的代表性。为了实现数据的实时输入和提高计算速度,Caulfield 和 Casasent 等人提出了用声光调制器输入数据,采用了频率复合技术^[4,5],此外,还发展了矩阵求逆和解线性方程的反馈运算技术^[5,6]。在这期间,许多学者把余数编码、二元编码和补数编码等算法引入光学矩阵运算系统^[7-10],以提高运算的精度。可以预料,光学矩阵运算作为光学计算的一个重要内容,随着光学计算的发展,将受到更多的研究和重视。

本文根据矩阵内乘运算原理,提出了利用全息透镜进行矩阵相乘的一种方法,实现了两

个 3×3 矩阵和 6×6 矩阵的相乘运算。

一、原理

矩阵 A 与 B 的乘积矩阵为 C 。 C 矩阵的第 i 行和第 k 列元素可由内乘法则求出,

$$C(i, k) = \sum_{j=1}^n A(i, j)B(j, k),$$

式中 n 为矩阵 A 的列数或矩阵 B 的行数。

因为全息透镜的功能在一定程度上可以按照需要进行设计,所以利用一些具有独特功能的全息透镜,完全可以实现矩阵的内乘运算。在图1所示的系统中, L 是多焦点全息透镜,它的功能是使一束激光转变成一个光点阵列。多

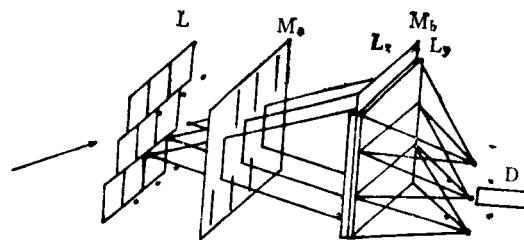


图1 矩阵相乘的三明治式结构示意图
(L, L_x 与 L_y 为全息透镜; M_a 与 M_b 为掩膜; D 为探测器)

轴全息透镜 L_x 与 L_y 分别由相同的条状子全息透镜组成,前者子全息透镜沿横向排列,后者沿纵向排列。 M_a 与 M_b 是由矩形孔组成的阵列掩膜,矩形孔的宽度与相应矩阵元的大小相应。

- 1) 此研究工作是在国家自然科学基金支持下进行的。
- 2) 原为中国科学院物理研究所研究生,现在河北师范学院物理系工作。

掩膜 M_1 夹在 L_1 与 L_2 之间,三者紧紧叠合组成三明治式结构。该系统的工作原理如下:一束激光经过多焦点全息透镜 L 形成一个运算所需的光点阵列,每个光点出射的光波被掩膜 M_1 上的矩形孔切割成长条状发散光束,照射在 L_2 的各相应的子全息透镜上,透过子全息透镜被转换成平面波束,然后通过 M_2 照在 L_1 上,并在这个过程中,让矩阵 A 的每行与矩阵 B 的每列相乘。 L_1 上各子全息透镜的作用是把照射在它上面的平行光束通过透射汇聚成象点,因此上述过程是把矩阵 A 每行与矩阵 B 每列的相乘结果加在一起,完成矩阵 A 与 B 的相乘运算。

为了使矩阵与矩阵的相乘结果以二维分布的形式出现,让 L 形成的光点阵列和掩膜 M_1 上的孔均以横向啮合形式排列,而输出点阵则以纵向啮合分布形式出现。

二、实验与结果

光学矩阵的相乘实验是用三阶和六阶矩阵进行的。图 2 是制作多轴全息透镜的光路图。

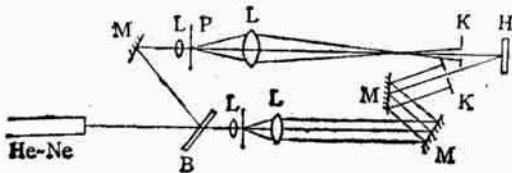


图 2 摄制全息透镜光学系统示意图

(He-Ne 为氦氖激光器; M 为反射镜; P 为小孔; L 为透镜; K 为掩膜; H 为全息记录片; B 为分束器)

图 2 中掩膜 K 用于控制子全息透镜的形状和大小,全息记录片 H 架于二维可调支架上,以便摄制多轴全息透镜。我们用此系统拍摄了三阶和六阶矩阵运算的两组全息透镜。对于三阶矩阵系统,多焦点全息透镜 L 由九个啮合形式排列的子全息透镜组成,它能够产生一个 3×3 啮合排列的光点阵列;而多轴全息透镜 L_1 与 L_2 具有相同的结构形式,这给制作带来方便,只是在使用时,需要把 L_1 绕光轴转 90° 放置,以实现条状子全息透镜的纵向排列形式。对于六阶矩阵系统, L 由 36 个子全息透镜组成, L_1 与

L_2 由六幅长条状子全息透镜组成,其他情况与三阶矩阵系统类似,只是制作时要增加许多工作量。

由于相位的精确表示和测量比较困难,因此,实验仅采用光的强度进行实矩阵运算。输入数据的掩膜是采用计算机控制的绘图仪按照输入数据放大十倍绘制,然后把制得的掩膜照相缩小 10 倍。制成的掩膜以照相负片示于图 3 中。两个三阶和六阶矩阵的相乘结果示于图

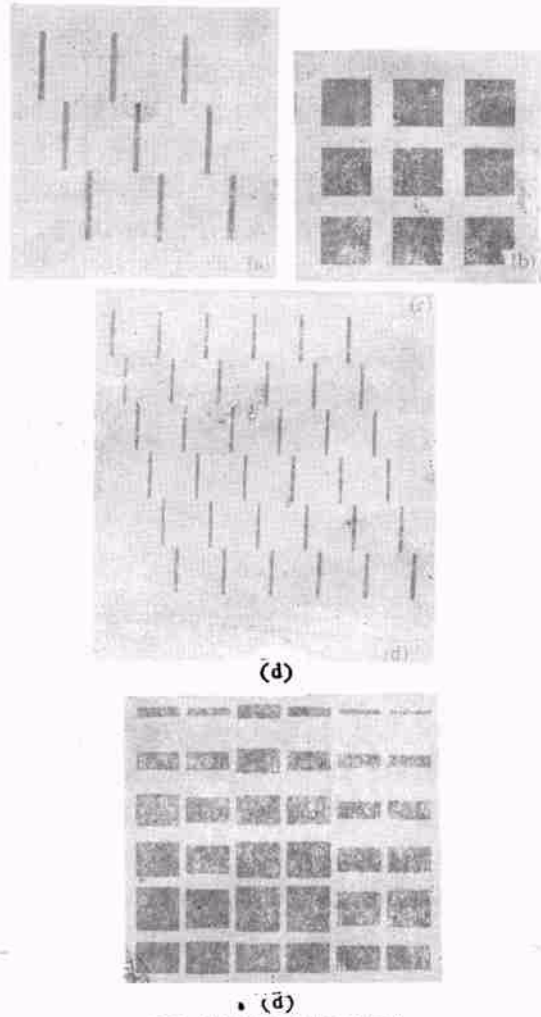


图 3 掩膜 M_1 与 M_2 的照片

(a) 与 (b) 分别为三阶矩阵的 M_1 与 M_2 ;
(c) 与 (d) 分别为六阶矩阵的 M_1 与 M_2

4 中,其数据可采用线性好的光电倍增管测量。

三阶和六阶矩阵的输入数据和积矩阵的测量数据分别如表 1、表 2 和表 3 所示。表中同时列出了数值计算的理论结果和相对误差。结

表 1 三阶矩阵相乘数据

行 \ 列	输入矩阵 A			输入矩阵 B			A×B 理论值			A×B 实验值			相对误差(%)		
	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3
1	0.158	0.872	0.695	0.95	0.94	0.93	1.59	1.60	1.45	1.51	1.60	1.40	5.0	0	3.4
2	0.183	0.985	1	1	0.98	0.85	2.11	2.14	1.95	2.00	2.14	1.90	5.5	6.5	2.6
3	0.993	0.972	0.102	0.81	0.86	0.81	2.00	1.98	1.83	1.90	2.02	1.89	5.0	2.0	3.4

表 2 六阶矩阵输入数据

行 \ 列	输入矩阵 A						输入矩阵 B					
	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6
1	0.864	0.863	0.644	0.566	0.564	0	0.701	0.765	0.701	0.732	0.642	0.915
2	0.345	0.285	0.199	0.206	0.191	0.153	0.933	0.766	0.945	1	0.745	0.923
3	0.213	0.269	0.282	0.275	0.329	0.331	0.899	0.714	0.897	0.868	0.573	0.681
4	0.552	0.463	0.407	0.283	0.282	0.245	0.775	0.683	0.767	0.688	0.392	0.477
5	0.394	0.373	0.423	0.422	0.559	0.597	0.511	0.503	0.673	0.508	0.336	0.331
6	1	0.837	0.582	0.507	0.436	0.401	0.307	0.230	0.367	0.250	0.125	0.0989

表 3 六阶矩阵数据

行 \ 列	A×B 理论值						A×B 实验值						相对误差(%)					
	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6
1	2.71	2.47	2.81	2.72	1.97	2.48	2.74	2.41	2.57	2.49	1.95	2.57	1.1	2.4	8.5	8.5	1	3.6
2	0.991	0.905	1.03	0.987	0.712	0.890	0.984	0.940	1.03	0.988	0.696	0.826	0.71	3.9	0	0.1	2.2	7.2
3	1.14	1.01	1.21	1.11	0.760	0.911	1.26	0.986	1.17	0.993	0.830	0.909	11	2.4	3.8	11	9.2	0.22
4	1.62	1.47	1.68	1.62	1.17	1.46	1.83	1.49	1.75	1.50	1.16	1.33	13	1.4	4.2	7.4	0.85	8.9
5	1.80	1.61	1.93	1.75	1.20	1.44	1.75	1.65	1.85	1.67	1.24	1.54	2.8	2.5	4.1	4.6	3.3	6.9
6	2.74	2.50	2.84	2.74	1.99	2.50	2.69	2.50	2.97	2.89	2.06	2.49	1.8	0	4.6	5.5	3.5	0.40

果表明，三阶矩阵和六阶矩阵实验结果的相对误差分别为 3.7% 和 4.2%。

上述实验结果表明，利用两个多轴全息透镜和掩膜组成的三明治式光学系统，能够实现两个矩阵的相乘运算。在三阶和六阶矩阵的相乘实验中，计算精确度平均达到 5% 左右。此系统原则上也适用于直接进行复数矩阵运算。

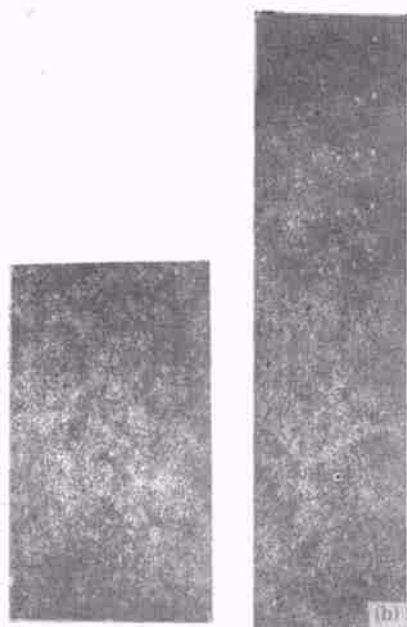


图 4 矩阵相乘的实验结果
(a) 3×3 矩阵; (b) 6×6 矩阵

- [1] J. W. Goodman et al., *Opt. Lett.*, 2-1(1978), 1.
- [2] H. Nakano et al., *Appl. Opt.*, 24-23(1985), 4238.
- [3] Yin-Zhongliang et al., *Opt. Lett.*, 9-8(1984), 322.
- [4] H. J. Caulfield et al., *Opt. Comm.*, 40-2(1981), 86.
- [5] D. Casasent et al., *Appl. Opt.*, 22-1(1983), 115.
- [6] D. Psaltis et al., *Opt. Lett.*, 4-11 (1979), 348.
- [7] A. Huang et al., *Appl. Opt.*, 18-2(1979), 149.
- [8] P. S. Guilfoyle, *Opt. Eng.*, 23-1 (1984), 20.
- [9] D. Casasent et al., *Appl. Opt.*, 24-1b(1985), 1477.
- [10] R. A. Heinz et al., *Appl. Opt.*, 25-6(1986), 956.