

混沌运动形成模式的探讨

江中岳

(中国科学院自动化研究所)

摘 要

本文以若干经典的混沌系统为背景,详细地介绍和分析了混沌系统从简单的运动形式如周期运动等演变成复杂的混沌运动的三种主要模式,即周期倍分叉、概周期、周期间歇等模式,综述了大多数现有的研究方法和主要结果并就其它的可能模式和有待解决的问题作了简略的说明。

牛顿首先运用数学概念描绘了一个精确的按固有规律运行的机械世界,开创了微分方程模型的研究。在庞卡莱发现极其复杂的运动形式以前的一段时间内,人们普遍认为自然界中的所有运动都是可精确预测的。

十九世纪末,庞卡莱创造性地运用几何方法研究了微分方程中的非线性现象,并发现了复杂的遍历运动。但是,问题的复杂性阻碍了人们进一步的认识。直到近 20 年来,由于非线性数学的发展以及计算机模拟技术的广泛应用,对复杂现象的理论研究才又迅速发展起来。目前,已发现了许多具有下列特点的复杂运动:(1)含有无穷可数个不稳定周期轨迹,含有不可数个非周期轨迹;(2)对初始条件上的误差极其敏感;(3)所有运动轨迹的渐近态在相空间中具有复杂的拓扑结构,如奇异吸引子、自相似的无穷嵌套集等。为了描述这类运动,科学家引入了混沌概念。

目前,混沌还没有得到一个精确的统一的定义,但这并不阻碍人们对混沌进行深入的研究。现已证实,众多的非线性系统中存在有混沌运动,这些混沌系统包括弹性力学、非线性电路、激光、对流运动、空气弹性、电磁力学等系统以及反馈控制装置等^[1]。对混沌本身的研究亦很活跃。它们包括混沌运动的数学模型及判据、混沌运动形成的模式,混沌吸引子的描述以及混沌与随机性的内在相关性等理论课题。

当系统中的参数发生变化时,系统结构发生改变,系统的渐近性态可能突然失稳,同时产生一个或几个新的渐近性态,这种突变称为“分叉”。混沌可通过分叉而形成,导致混沌的不同分叉过程构成形成混沌的不同模式。至今已发现的模式包括倍周期分叉、概周期分叉和周期间歇分叉等。

一、倍周期分叉

假设有某种没有世代交叠的种群, P_n 代表第 n 代种群,其代增长率为 μ ,则种群数由递推公式

$$P_{n+1} = \mu P_n = \mu^n P_1 \quad (1)$$

决定。考虑到 P_n 不可能无限制地增长,因此 μ 应与 P_n 有关,且在 P_n 足够大时趋于零。现设 $\mu = \lambda(P_M - P_n)$, P_M 为可能最大种群数,则

$$P_{n+1} = \lambda(P_M - P_n)P_n \quad (2)$$

适当变换上式中的变量,即得增长方程(logistic equation)

$$x_{n+1} = \lambda x_n(1 - x_n) = f_\lambda(x_n), \quad (3)$$

其中 $\lambda \in [0, 4]$, $x_n \in [0, 1]$ 。除了种群数估计外,(3)式在遗传学、商业循环等领域亦有应用^[2],它被视为混沌的经典实例。Metropolis 等人曾证明,一大类一维映射的定性性质与(3)式中映射 f_λ 的定性性质完全一致^[3]。

定义 $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ 为(3)式的 k 点周期

解。若

$$\left. \begin{aligned} x_{i+1} &= \lambda x_i(1-x_i), \quad i=1, 2, \dots, k-1, \\ x_{k+1} &= x_1. \end{aligned} \right\} (4)$$

其稳定性取决于 $\left| \prod_{i=1}^k \frac{df_\lambda(x_i)}{dx} \right|$ 是否大于 1。不难看出, 当 $0 < \lambda < 1$ 时, (3) 式有唯一的稳定解 ($k=1$): $x_1^* = 0$ 。当 $1 < \lambda < 3$ 时, $x_1^* = 0$ 失去稳定性, $x_1^* = 1 - \lambda^{-1}$ 出现; 当 $\lambda > 3$ 时, x_1^* 失去稳定, 另一个稳定的 2 周期解产生了。实际上, 当 λ 不断增大且逐个穿过分叉点 λ_k 时, 2^{k-1} 周期解依次失去稳定性, 让位于 2^k 周期解, 直至 λ_∞ 。这一系列分叉叫倍周期分叉 (见图 1)。

1978 年, Feigenbaum 研究了 f_λ 由倍周期分叉演变成混沌的过程^[4]。其基本结果是唯一地存在解析的偶实映射 $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 及实数 $\alpha \approx -2.5$, 使得

$$\begin{aligned} \alpha g^2(\alpha^{-1}x) &= g(x), \quad g(0) = 1, \\ g''(0) &< 0. \end{aligned} \quad (5)$$

而映射 g 正好是重整倍分叉算子

$$\mathcal{F}(f)(x) = \alpha f^2(\alpha^{-1}x) \quad (6)$$

的孤立不动点, 其中 $x \in [p, p']$ 计算表明, \mathcal{F} 在 g 处的线性化 $\mathcal{F}(g)$ 有一不稳定特征值 $\delta \approx 4.67$ 。对于 (3) 式的映射 f_λ , 上述结果表明, 序列 $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k, \dots\}$ 按下述方式趋向 λ_∞ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_{n+1} - \lambda_n}{\lambda_{n+2} - \lambda_{n+1}} = \delta \approx 4.67. \quad (7)$$

在 $\lambda = \lambda_\infty$ 处, 对任意 $k, 2^k$ 周期解存在, 但都不稳定。在 $\lambda_\infty < \lambda \leq 4$ 的大部分区域中, 由 (3) 式迭代出来的 x_n 似乎按均匀分布随机地落

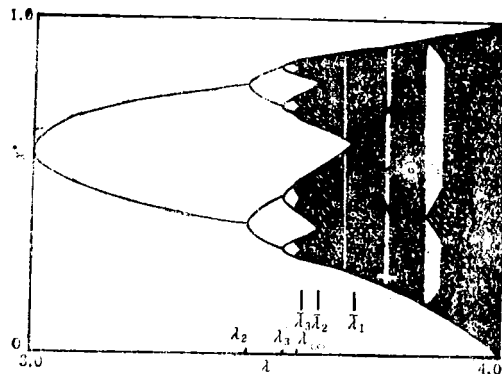


图 1 系统(3)的渐近性态

在 x 轴上。此时, x_n 的渐近态中含有无穷个不动点 (不同周期的周期点)。另外还存在不可数个初始值 x_0 , 由其迭代出非周期轨迹。图 1 给出 $\lambda \in (3, 4)$ 时 x 轴上的渐近性态。

由图 1 可见, $[\lambda_\infty, 4]$ 被 $\{\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, \dots, \tilde{\lambda}_k, \dots\}$ 划分成不同的混沌带, 每一混沌带对应于 x 轴上 2^k 个分裂的小区间。这种分叉叫逆分叉, 其临界值序列也按 (7) 式反方向趋向于 $\tilde{\lambda}_\infty = \lambda_\infty$ 。

另外, 混沌带之间的众多空隙清楚地表明许多周期解的存在, 它们不能写成 2^k 的形式。Metropolis 等人证明, 当一维映射满足一定条件时, 存在着普适的周期解序列, 且该序列中的各周期解严格按 λ 的值排序^[5]。Derrida 等人进一步给出了允许周期解的判据及其序的判定, 并指出普适序列具有某种自相似的特征。特别是, 他们猜测具有非周期轨迹的 λ 值有无穷不可数个, 其势等于康托集之势^[6]。

除离散系统 (3) 外, 在受迫布鲁塞器、机械碰撞过程、受迫振荡器、偏微分方程等系统中均可能出现倍周期分叉而导致混沌运动^[7-9]。

二、概周期分叉

考察不可压缩的均匀粘性流体的运动。当系统的边界条件及所受外力不依赖于时间时, 运动由 Navier-Stokes 方程描述。由于方程的非线性, 直接进行分析是极其困难的。Burgers 首先研究了简化系统。其后, Hopf 研究了另一能反映真实系统的某些定性性质的简化系统。得到的主要结果是 Hopf 分叉定理, 即当系统奇点处雅可比阵的一对共轭特征值在 $\mu = \mu_i$ 处通过虚轴时, 系统原来的不动点分叉成邻近的闭环吸引子。假设系统的几乎所有解的渐近态形成一相流不变的流形 $\mathcal{M}(\mu)$, 且 $\mathcal{M}(\mu)$ 除在特殊临界点

$$\mu_0 > \mu_1 > \dots > \mu_k > \dots \rightarrow 0$$

(μ 为系统参数)

处外, 均随 μ 作解析变化。Hopf 猜测流形 $\mathcal{M}(\mu)$ 可能是高维环面, 且存在无穷分叉序

列,导致湍流^[10]

$$T^0 \text{ (不动点)} \rightarrow T^1 \text{ (闭环)} \rightarrow T^2 \rightarrow \text{(环面)} \rightarrow \dots \rightarrow T^3 \rightarrow \dots \rightarrow \text{湍流} \quad (\text{H. L. 过程}) \quad (8)$$

上述思想与 L. Landau 在 1944 年的设想相同,即流体内部不断地有非共振的振荡模通过分叉被激发出来,这些模的叠加使得系统作越来越复杂的概周期运动,而湍流就是当模的个数趋向无穷大的情形。可是后来的研究发现,不同的频率之间常出现共振,造成所谓的锁频现象,从而阻止新的振荡模的激发.因此,H. L. 过程实际存在的可能性似乎不大。

不同于 Hopf, 1963 年,气象学家 Lorenz 利用有限个数的常微分方程组来描述受迫的耗散流体运动.计算表明存在有确定性系统,其解的长时间性态极其复杂,由大多数初始值出发的解在相空间中的轨迹具有非周期性和对初始值的灵敏性,从而形成所谓的(有界的)奇异吸引子^[11]. Ruelle 和 Taken 进一步研究了一般常微分系统 $dx/dt = X_\mu(x)$ 的解的渐近态随参数 μ 变化而改变的问题.利用 Hopf 分叉原理及 Poincare 映射,他们阐明了闭环吸引子分叉成环面吸引子的机理(图 2)。当 μ 进一步变化时,他们证明了在一定普适意义下,系统的渐近态流形 T^k 上不可能维持概周期运动。当 $k > 2$ 时,除不动点和极限环外,还可能出现奇异吸引子.特别是对于 T^4 上的向量场,在 C^3 拓扑下,概周期运动的向量场的任意邻域内存在有带奇异吸引子的向量场.此结论表明,有限次分叉亦有可能导致混沌运动

$$T^0 \rightarrow T^1 \rightarrow \dots \rightarrow T^N \rightarrow \text{混沌} \quad (\text{R. T. 过程}) \quad (9)$$

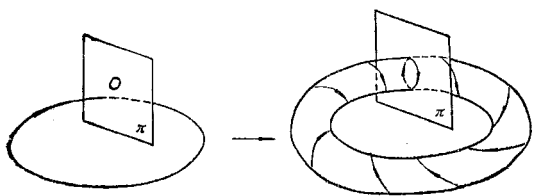


图 2 从闭环吸引子到环面吸引子的分叉

一般认为 H. L. 过程与 R. T. 过程是两种截然不同的过程。但是, Sell 却认为两者在

数学上可相容,即对于很大一类稳定动力系统,R. T. 的奇异吸引子邻域内存在有 H. L. 过程.因此,奇异吸引子的产生并不意味着 H. L. 分叉不可能发生^[12]。

Kolmogorov 在研究哈密顿系统时提出的 KAM 定理为概周期运动演化至混沌的研究提供了另一条思路.考虑的哈密顿系统为

$$H = H_0 + V. \quad (10)$$

当可积系统 H_0 存在周期或概周期运动时,若系统 H_0 的特征值及两阶展开项系数满足 KAM 条件,则引入小的非线性扰动项 V ,系统 H 的周期运动不会消失,而仅仅产生运动环面的位移. Walker 和 Ford 在 KAM 定理的基础上对二维自由度的哈密顿系统进行数值仿真,结果表明,当 KAM 条件遭破坏时,振幅不稳定性有可能导致遍历运动(即混沌运动)^[13,14]. Kadanoff 曾考察过周期运动、KAM 曲线与混沌运动三者间的关系。

此外,Feigenbaum 利用重整化群技术分析了二维迭代映射中两个不可约频率的概周期运动消失(出现锁频)并演变成混沌运动过程中的定量性质,最后求出了类似倍周期分叉序列中的普适常数^[15]。

三、周期间歇分叉

在流体实验中,经常能观察到从周期运动演化成混沌运动的中介运动形式(周期间歇运动)。这是周期运动被随机地突然撕裂开的情形(图 3)。

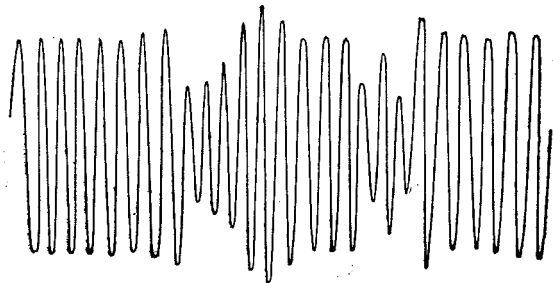


图 3 周期间歇运动

考虑一维映射 $f: I \rightarrow I$, 其中 f 具有负的许瓦兹导数

$$S(f) = \left[\frac{f'''}{f'} - \frac{3}{2} \left(\frac{f''}{f'} \right)^2 \right] < 0 \quad \forall x \in I - \{c\}, \quad (11)$$

且具有单一奇点 c , 若存在一周期为 n 的周期点 p , $(f^n)'(p) = 1$, $(f^n)''(p) \neq 0$, 则通过 p 点的轨迹的一侧稳定, 而另一侧不稳定. 由分叉理论, 映射 f 可嵌入单参数族 f_μ , 其中 $f_0 = f$, f_μ 在 $\mu = 0$ 处时 p 的轨迹有鞍-结分叉 (saddle-node bifurcation). 若改变 μ , 则得 $g = f_\mu$, g 没有接近 p 轨迹的周期解. 此时, g 的轨迹需经很长时间后才能近似地跟踪 f 的过 p 点的周期轨迹(图 4).

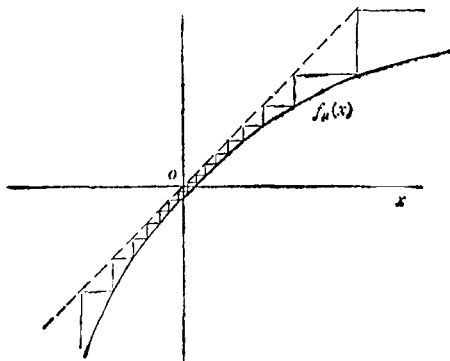


图 4 鞍-结点附近的情形

Pomeau 和 Manneville 认为这种 g 轨道正好描述一类周期间歇运动. 这就是说, 映射 $f = \mu + x - x^2$ 在 $\mu = 0$ 附近迭代将产生一类间歇运动. 进一步分析表明, 当 $\mu < 0$ 且 $\mu \rightarrow 0$ 时, 一条从 $x > 0$ 出发的轨迹大约需经过 $|\mu|^{-1/2}$ 步迭代才能逃离原点 $x = 0$.

根据映射迭代失去稳定的另外两种常见情形, 他们还考虑了下述模型:

$$\left. \begin{aligned} z_{n+1} &= \lambda z_n + \mu |z_n|^2 & z_n \text{ 在原点附近,} \\ z_{n+1} &= 2z_n & z_n \text{ 远离原点,} \end{aligned} \right\} (12)$$

式中 z_k 为复数, 两映射在交接处光滑连接.

$$\left. \begin{aligned} \theta &\rightarrow 1 - 2\theta - \frac{1}{2\pi} \left\{ (1 - \varepsilon) \cos \right. \\ &\times \left[2\pi \left(\theta - \frac{1}{12} \right) \right] \left. \right\} \pmod{1}, \\ \theta &\in S^1, \quad \varepsilon = r - r_T, \end{aligned} \right\} (13)$$

物理

其中 r_T 为临界值, S^1 为圆周. 利用计算机仿真技术, 他们分析了周期间歇运动的间歇值、运动稳定性及里亚普诺夫指数, 其结果为实验所证实^[16].

另外, Hirsch 等人利用重整化群技术详细研究了(3)式在周期 3 处的间歇运动^[17]. 最后, 在一定条件下, 对于一维映射中的间歇运动可建立函数方程以描述其迭代的极限形式并求得解析解.

前面我们考察了三种导致浑沌运动的模式. 它们普遍存在于各种浑沌系统之中. 是否还存在其它的模式呢? 郝柏林等人对受迫布鲁塞器的计算表明, 存在其他模式如 $k \times 2^n$ 分叉序列 (k 为素数)、变周期运动等. 此外还发现所谓的随机极限环途径等.

就自相似的模式而言, Collet 利用重整化群技术证明了只有倍周期分叉与周期间歇运动模式是稳定的一维模式^[18]. 此时, 过不动函数 $g(x)$ 的稳定流形只有一维不稳余流形. 当不稳余流形的维数超过一维时, 则相同的模式不可能在单参数系统中观察到. 这类系统包括带有外部噪声的一维叠代映射等, 此时分叉处不可能以单参数值确定.

是否所有的导致浑沌的模式均为自相似的呢? 含有二个或更多参数的浑沌系统中是否存在新的普适模式? 这些问题有待进一步地研究.

- [1] P. J. Holmes & F. C. Moon 著, 郭仲衡等译, 应用力学最新进展, 科学出版社, (1987), 33.
- [2] R. May, *Nature*, 261(1976), 459.
- [3] Li T-Y & J. Yorke, *Amer. Math. Monthly*, 82(1975), 985.
- [4] M. J. Feigenbaum, *J. Stat. Phys.*, 19(1978), 25; *ibid.*, 21 (1979), 669.
- [5] N. Metropolis, *J. Combinatorial Theory, A*, 15 (1973), 25.
- [6] B. Derrida, A. Gavois & Y. Pomeau, *Ann. de l'Inst. Henri Poincare, Section A*, 29(1978), 305.
- [7] Hao B-L & Wang G-R, *J. Stat. Phys.*, 28(1982), 769; *Comm. Math. Phys.*, 2(1983), 1075.
- [8] D. R. Moore et al., *Nature*, 303(1983), 663.

(下转第 125 页)