

# 不可逆卡诺热机的最大功率

李 继 坤

(北京航空学院动力系)

## 摘 要

经典热力学把卡诺热机视为可逆机。由于可逆机以无限缓慢的速度进行工作，所以可逆卡诺热机的功率为零。这当然是脱离实际的。近年来不少人开展了有限时间热力学问题的研究。他们考虑了卡诺热机的吸热、放热过程中所存在的不可逆性，研究了热机性能的优化问题，从而导出了最大功率。这在理论上是前进了一步。然而，仅仅考虑吸热、放热过程中的不可逆性是不够的，还应考虑压缩、膨胀过程中的不可逆性。本文对卡诺热机中的不可逆性进行了全面分析。研究表明，与吸热、放热过程中的不可逆性不同，压缩、膨胀过程中的不可逆性对热机性能的影响不存在优化问题，但是存在最大限度的问题。一旦压缩、膨胀过程中的不可逆性超过了这个限度，功率就会变为零。

在经典热力学中，卡诺热机被认为是可逆热机。它的热效率是

$$\eta_c = 1 - \frac{T_1}{T_h}$$

其中  $T_h$  和  $T_1$  分别是高温热源和低温热源的温度。因为可逆机是以无限缓慢的速度进行工作的，所以可逆卡诺热机的功率为零。这个结论当然是脱离实际的。

在有限时间热力学中，卡诺热机被认为是以有限的速度进行工作的。为了在有限时间内完成吸热和放热过程，热源与工作物质间的温差就不能趋于零，而必须大于零。文献[1]最先研究了卡诺热机在不可逆导热情况下工作时所能输出的最大功率  $P_{n,m}$ ，以后其他人也得到相同的结果。例如，文献[2]所导出的结果是

$$P_{n,m} = \frac{\alpha\beta}{(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})^2} \times (T_h + T_1 - 2\sqrt{T_h T_1}), \quad (1)$$

其中  $\alpha$  和  $\beta$  分别是工作物质与高、低温热源之间的热传导系数。

可以看到，在考虑了温差所造成的不可逆性以后，能够得到卡诺热机的功率大于零的结论，这在理论上当然是前进了一步。然而，温

差的存在仅是造成卡诺热机不可逆性的原因之一，除此以外，不可逆的压缩和膨胀则是造成卡诺热机不可逆性的另一原因。所以，在研究卡诺热机时，只考虑前一个原因而不考虑后一原因，显然是片面的。

## 一、部分不可逆卡诺热机

假设一个卡诺热机工作在温度分别为  $T_h$  和  $T_1$  ( $T_h > T_1$ ) 的热源之间，该热机工作时，工作物质本身进行准静态的卡诺循环，如图 1

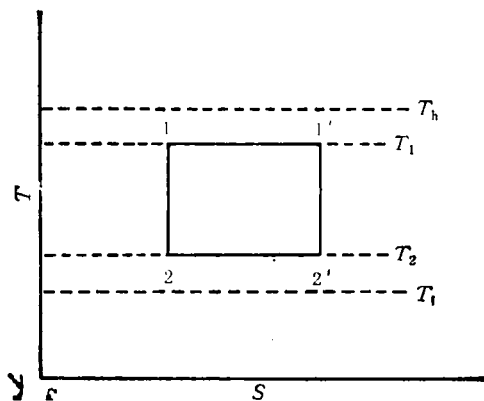


图 1

所示。由于热阻的存在，循环中的两个等温过程的温度不同于热源的温度，它们分别为  $T_1$  和  $T_2$ ，并且  $T_h > T_1 > T_2 > T_l$ 。若以  $\alpha$  表示工作物质与热源之间的热传导系数<sup>1)</sup>，则有

$$Q_1' = \alpha(T_h - T_1)t_1', \quad (2)$$

$$Q_2' = \alpha(T_2 - T_l)t_2', \quad (3)$$

其中  $Q_1'$  是在  $t_1'$  时间内在  $1-1'$  过程中工作物质从高温热源中所吸收的热量。  $Q_2'$  是在  $t_2'$  时间内在  $2'-2$  过程中放给低温热源的热量。再以  $t_3'$  和  $t_4'$  分别表示进行压缩和膨胀过程所需要的时间，则循环的周期为  $t_1' + t_2' + t_3' + t_4'$ 。由此可得部分不可逆卡诺热机的功率  $P'$  为

$$P' = \frac{Q_1' - Q_2'}{t_1' + t_2' + t_3' + t_4'} \quad (4)$$

至于热效率  $\eta'$ ，则为

$$\eta' = 1 - \frac{Q_2'}{Q_1'} = 1 - \frac{T_2}{T_1} \quad (5)$$

将(2)和(3)二式代入(5)式，得

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{\alpha(T_2 - T_l)t_2'}{\alpha(T_h - T_1)t_1'} \quad (6)$$

## 二、完全不可逆卡诺热机

现在再来讨论压缩膨胀过程中的不可逆性。因为压缩膨胀过程都是绝热的，同时又都是不可逆的，所以它们必然都是熵增加的过程。在图2中，如果  $2-1$  表示等熵的压缩过程，则  $2-1''$  表示熵增的压缩过程。如果  $1'-2'$  表示等熵的膨胀过程，则  $1'-2''$  表示熵增的膨胀过程。所以  $1-1'-2'-2-1$  表示由于热传递不可逆而形成的部分不可逆卡诺循环，而  $1''-1'-2''-2-1''$  则是表示由于热传递不可逆和压缩膨胀不可逆而形成的完全不可逆卡诺循环。

与前面相同，若以  $\alpha$  表示工作物质与热源之间的热传导系数，则有

$$Q_1 = \alpha(T_h - T_1)t_1, \quad (7)$$

$$Q_2 = \alpha(T_2 - T_l)t_2, \quad (8)$$

其中  $Q_1$  是在  $t_1$  时间内在  $1''-1'$  过程中工作物质从高温热源中所吸收的热量。  $Q_2$  是在  $t_2$  时

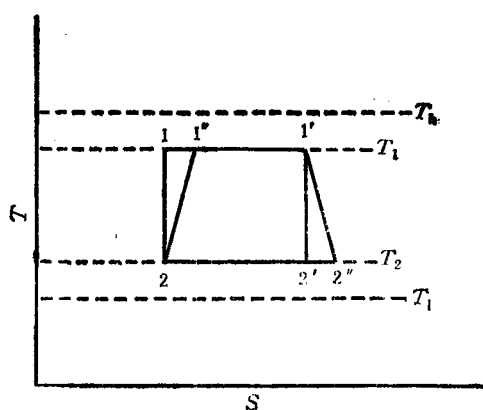


图 2

间内在  $2''-2$  过程中放给低温热源的热量。再以  $t_3$  和  $t_4$  分别表示进行不可逆压缩过程和不可逆膨胀过程所需要的时间，则循环周期为  $t_1 + t_2 + t_3 + t_4$ 。由此可得完全不可逆卡诺热机的功率  $P$  为

$$P = \frac{Q_1 - Q_2}{t_1 + t_2 + t_3 + t_4} \quad (9)$$

令

$$r = \frac{t_3 + t_4}{t_2 + t_1} \quad (10)$$

则可将(9)式化为

$$P = \frac{1}{r+1} \cdot \frac{1 - \frac{Q_2}{Q_1}}{\frac{t_1}{Q_1} + \frac{t_2}{Q_2} \cdot \frac{Q_2}{Q_1}} \quad (11)$$

至于循环热效率  $\eta$ ，则为

$$\eta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} \quad (12)$$

## 三、不可逆程度的表示

在热传递过程中，温差的大小可以用来表示不可逆的程度。例如，在图2的  $1''-1'$  吸热过程中， $T_h - T_1$  愈大，则不可逆的程度也愈大； $T_h - T_1$  愈小，则不可逆程度也愈小；当  $T_h - T_1$  趋于零时，则不可逆的程度也趋于

1) 由(1)式可以看出，假设  $\alpha$  与  $\beta$  不同，并不能导出具有重要意义。所以，本文假设这两个热传导系数相同。

零。

在绝热的过程中，熵增的大小可以用来表示不可逆的程度。例如，在图2的2—1''绝热压缩过程中，熵增愈大，则不可逆程度也愈大；熵增愈小，则不可逆程度也愈小；当熵增趋于零时，则不可逆程度也趋于零。

绝热过程中熵增的大小，又直接影响以后的等温过程的长短。从图2可以看出，等熵压缩2—1过程以后是等温吸热1—1'过程；熵增压缩2—1''过程以后是等温吸热1''—1'过程。因为1''—1'过程短于1—1'过程，所以进行前一过程所需要的时间*t*<sub>1</sub>少于进行后一过程所需要的时间*t*'<sub>1</sub>，即*t*<sub>1</sub> < *t*'<sub>1</sub>。若令

$$r_1 = \frac{t'_1}{t_1}, \quad (13)$$

则*r*<sub>1</sub> > 1。不难看出，熵增压缩2—1''过程中的熵增愈大，则等温吸热1''—1'过程愈短，所需时间*t*<sub>1</sub>也愈少，因此比值*r*<sub>1</sub>也就愈大。由此可知，*r*<sub>1</sub>的大小可以表示压缩过程中的不可逆程度的大小。

对于绝热膨胀过程，也可作类似的分析。等熵膨胀1'—2'过程以后是等温放热2'—2过程，熵增膨胀1'—2''过程以后是等温放热2''—2过程。后者长于前者，所以进行2''—2过程的时间*t*<sub>2</sub>大于进行2'—2过程的时间*t*'<sub>2</sub>。若令

$$r_2 = \frac{t_2}{t'_2}, \quad (14)$$

则*r*<sub>2</sub> > 1。与*r*<sub>1</sub>类似，*r*<sub>2</sub>的大小可以表示膨胀过程中的不可逆程度的大小。

利用(13)和(14)二式，可将(7)和(8)二式化为

$$Q_1 = \alpha(T_h - T_1) \frac{t'_1}{r_1}, \quad (15)$$

$$Q_2 = \alpha(T_2 - T_1) t'_2 r_2. \quad (16)$$

于是，

$$\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{\alpha(T_2 - T_1) t'_2}{\alpha(T_h - T_1) t'_1} r_1 r_2. \quad (17)$$

将该式代入(12)式，并引用(6)式，得

$$T_1 = \frac{r_1 r_2}{1 - \eta} T_2. \quad (18)$$

#### 四、最大功率

利用(7),(8),(12)和(18)四式可将(11)式化为

$$P = \frac{\alpha}{r+1} \cdot \frac{\eta}{\frac{1}{T_h - \frac{r_1 r_2}{1-\eta} T_2} + \frac{1-\eta}{T_2 - T_1}}. \quad (19)$$

令

$$\theta = \frac{\alpha}{r+1}, \quad (20)$$

则进一步可将(19)式化为

$$\frac{\theta \eta}{(1-\eta)P} = \frac{1}{(1-\eta)T_h - r_1 r_2 T_2} + \frac{1}{T_2 - T_1}. \quad (21)$$

由(21)式可以求得

$$\left(\frac{\partial P}{\partial T_2}\right)_\eta = \frac{(1-\eta)P^2}{\theta \eta} \left\{ \frac{1}{(T_2 - T_1)^2} - \frac{r_1 r_2}{[(1-\eta)T_h - r_1 r_2 T_2]^2} \right\}. \quad (22)$$

为了求出最大功率*P*<sub>m</sub>，可令 $\left(\frac{\partial P}{\partial T_2}\right)_\eta = 0$ ，于是由(22)式可得<sup>1)</sup>

$$\frac{1}{(T_2 - T_1)^2} = \frac{r_1 r_2}{[(1-\eta)T_h - r_1 r_2 T_2]^2}.$$

解之，得

$$T_2 = \frac{(1-\eta)T_h \pm \sqrt{r_1 r_2} T_1}{r_1 r_2 \pm \sqrt{r_1 r_2}}. \quad (23)$$

再将(23)式代入(21)式，得

$$P = \frac{\theta}{(1 \pm \sqrt{r_1 r_2})^2} \eta \left( T_h - \frac{r_1 r_2 T_1}{1 - \eta} \right). \quad (24)$$

1) 由(22)式可以导出 $\left(\frac{\partial^2 P}{\partial T_2^2}\right)_\eta$ ，再将(18)式简化，得

$$\left(\frac{\partial^2 P}{\partial T_2^2}\right)_\eta = -\frac{(1-\eta)P^2}{\theta \eta} \left\{ \frac{2(T_2 - T_1)}{(T_2 - T_1)^4} + \frac{2(r_1 r_2)^2 (1-\eta)(T_h - T_1)}{[(1-\eta)T_h - r_1 r_2 T_2]^4} \right\}.$$

因为*T*<sub>2</sub> > *T*<sub>1</sub>，*T*<sub>h</sub> > *T*<sub>1</sub>，所以 $\left(\frac{\partial^2 P}{\partial T_2^2}\right)_\eta < 0$ 。

在(24)式的分母中,取负号是不合理的,因为当压缩和膨胀都是可逆时,  $r_1 = 1, r_2 = 1$ , 若取负号,则  $P = \infty$ . 这是不可能的. 所以在(24)式的分母中,只能取正号. 于是,

$$P_m = \frac{\theta}{(1 + \sqrt{r_1 r_2})^2} \eta \left( T_h - \frac{r_1 r_2 T_1}{1 - \eta} \right), \quad (25)$$

其中,  $P_m$  是最大功率.

由(25)式可知,在  $T_h, T_1, \theta, r_1$  和  $r_2$  一定的情况下,  $P_m$  与  $\eta$  有关. 当  $\eta = 1 - \frac{r_1 r_2 T_1}{T_h}$  时,  $P_m = 0$ ; 当  $\eta = 0$  时,  $P_m = 0$ . 由此可见,当  $\eta$  为某一适当数值时,  $P_m$  必将达到极大值. 由(25)式可以求得

$$\frac{dP_m}{d\eta} = \frac{\theta}{(1 + \sqrt{r_1 r_2})^2} \left[ T_h - \frac{r_1 r_2 T_1}{1 - \eta} - \frac{r_1 r_2 T_1 \eta}{(1 - \eta)^2} \right]. \quad (26)$$

为了求出  $P_m$  的极大值,令  $\frac{dP_m}{d\eta} = 0$ . 由(26)式可以得到<sup>1)</sup>

$$T_h = \frac{r_1 r_2 T_1}{1 - \eta} + \frac{r_1 r_2 T_1 \eta}{(1 - \eta)^2}.$$

解之,得  $\eta = 1 \pm \sqrt{\frac{r_1 r_2 T_1}{T_h}}$ . (27)

在(27)式中,取正号是不合理的,只能取负号.

所以,  $\eta = 1 - \sqrt{\frac{r_1 r_2 T_1}{T_h}}$ . (28)

再将(28)式代入(25)式,得

$$P_{m,m} = \frac{\theta}{(1 + \sqrt{r_1 r_2})^2} (\sqrt{T_h} - \sqrt{r_1 r_2 T_1})^2, \quad (29)$$

其中  $P_{m,m}$  是  $P_m$  的极大值.

可得出如下结论.

1. 引用(20)式,可将(29)式化为

$$P_{m,m} = \frac{\alpha}{(1 + r)(1 + \sqrt{r_1 r_2})^2} \times (\sqrt{T_h} - \sqrt{r_1 r_2 T_1})^2. \quad (30)$$

这就是完全不可逆卡诺热机所能输出的最大功率. 如果压缩和膨胀都是可逆的,则  $r_1 = r_2 = 1$ . 于是,(30)式就可化为

$$P_{m,m} = \frac{\alpha}{4(1 + r)} (\sqrt{T_h} - \sqrt{T_1})^2. \quad (31)$$

这就是部分不可逆卡诺热机所能输出的最大功率.

由(30)和(31)二式可以看出,增加高温热源温度  $T_h$ , 增加热传导系数  $\alpha$ , 减少低温热源温度  $T_1$  和减少压缩膨胀时间与吸热放热时间之比  $r$ , 都可使完全不可逆卡诺热机的最大输出功率增加, 同时也可使部分不可逆卡诺热机的最大输出功率增加. 将(30)和(31)二式加以比较,不难得知,在其他条件相同的情况下,由于  $r_1 > 1, r_2 > 1$ , 完全不可逆卡诺热机的最大输出功率必然小于部分不可逆卡诺热机的最大输出功率.

2. 上面已经导出,完全不可逆卡诺热机输

出最大功率时的热效率是  $\eta = 1 - \sqrt{\frac{r_1 r_2 T_1}{T_h}}$ .

如果压缩和膨胀都是可逆的,则  $r_1 = r_2 = 1$ . 于是(28)式就可化为

$$\eta = 1 - \sqrt{\frac{T_1}{T_h}}. \quad (32)$$

这就是部分不可逆卡诺热机输出最大功率时的热效率.

由(28)和(32)二式可知,增加高温热源温度  $T_h$ , 减少低温热源温度  $T_1$ , 可使完全不可逆卡诺热机输出最大功率时的热效率提高, 同时也可使部分不可逆卡诺热机输出最大功率时的热效率提高. 将(28)和(32)二式加以比较,不难得知,在热源温度相同的情况下,由于  $r_1 > 1, r_2 > 1$ , 完全不可逆卡诺热机输出最大功率时的热效率必然小于部分不可逆卡诺热机输出最大功率时的热效率.

3. 由(30)和(28)二式可以看出,随着压缩过程不可逆程度  $r_1$  和膨胀过程不可逆程度  $r_2$  的增加,完全不可逆卡诺热机的最大功率和输出最大功率时的热效率都是逐渐下降的. 但是

1) 由(26)式可以导出

$$\frac{d^2 P_m}{d\eta^2} = -\frac{\theta}{(1 + \sqrt{r_1 r_2})^2} \left[ \frac{r_1 r_2 T_1}{(1 - \eta)^2} + \frac{r_1 r_2 T_1 (1 - \eta)(1 + \eta)}{(1 - \eta)^4} \right].$$

因为  $\eta < 1$ , 所以  $\frac{d^2 P_m}{d\eta^2} < 0$ .

$r_1$  和  $r_2$  的乘积应该满足以下方程式:

$$r_1 r_2 < \frac{T_h}{T_l}, \quad (33)$$

否则最大功率和输出最大功率时的热效率就会变为零。(33)式给压缩过程和膨胀过程的不可逆程度提供了一个限制。这就是说,若欲完全不可逆卡诺热机的最大功率和输出最大功率时的热效率不为零,那么压缩过程和膨胀过程的不可逆程度是不能无限增大的。

4. 如果不考虑压缩过程和膨胀过程所费的时间( $r = 0$ ), 同时又假设压缩过程和膨胀过

程都是可逆的( $r_1 = r_2 = 1$ ), 则(30)式就可化为  $P_{m,m} = \frac{\alpha}{4} (T_h + T_l - 2\sqrt{T_h T_l})$ . (34)

(34)式是与文献[2]所导出的(1)式相同的<sup>1)</sup>。显然后者是在考虑实际问题较少的情况下所得到的结果。

[1] F. L. Curzon and B. Ahlborn, *Am. J. Phys.*, **43**-1(1975), 22.

[2] 严子浚, 工程热物理学报, **6**-1(1985), 1.

1) 在(1)式中, 令  $\alpha = \beta$ , 则得

$$P_{m,m} = \frac{\alpha}{4} (T_h + T_l - 2\sqrt{T_h T_l}).$$

## 用于测定精煤中全水分的微波测水仪<sup>1)</sup>

目前国内选煤厂测量洗精煤产品的全水分, 都是使用烘干重量法。这种方法需要化验人员将煤样进行搅拌、缩分、天平称量两次、预烘干、烘干等一系列复杂操作, 而且所需设备多而庞大(包括烘箱、称量天平、称量盘等设备)。根据国际标准的规定, 作一个精煤全水分测定, 需要 80min 的时间。多年来广大选煤化验人员迫切需要改进这种笨重落后的化验工具与方法。

精煤中全水分测定的微波测水仪, 是采用微波测量技术研制成的一种新型仪器。使用时, 只需将煤样装满取样盒放入仪器中, 即可在 55s 内自动显示出全水分值并打印出全水分值。

此微波测水仪的测量精度符合国家标准 GB211-84 的要求, 是选煤厂测量精煤全水分较理想的仪器。

仪器应适应选煤工业现场的煤的特性, 还要符合操作简单、快速、准确、可靠等要求。

根据上述要求, 在取样器的设计上采用了平衡取样器, 较好地解决了由于煤的特性和工人装填煤样的非同一性而造成的误差。在整机设计上采用自动直接显示与打印全水分值的最终结果, 使工人只需将样品装满取样盒放入仪器, 按一下工作按钮后即可实现测量, 计算、打印显示全部自动进行。为了达到快速准确的目的, 本仪器采用微波测量系统测定水分, 提高单元电路及器件水平, 以达到测量快速、准确的目的。由于全部采用了固体电路, 整机的可靠性大大提高。

精煤全水分微波测水仪在水分探测部分, 采用了微波测量线路。用微波测定煤的水分是把煤看作电介质, 通常煤的介电常数 $\sim 3$ , 水的介电常数为 65—75, 煤和水混合后介电常数主要取决于水的介电常数。微波通过含水的煤炭传输, 对微波信号的影响程度也主

要取决于煤炭含水的多少。本仪器采用了 E-H 调谐器, 它依据微波测量理论, 微波在测量系统中的反射系数为  $\Gamma = A \cos(K - \phi) e^{j(K - \phi)}$ , 式中  $A$  是常数,  $K$  是 E-H 调谐器的 H 臂反射相位角,  $\phi$  是 E-H 调谐器的 E 臂反射相位角。

微波信号通过不同含水量的煤样时, 将引起 E-H 调谐器的阻抗变化, 并使其反射系数发生变化。

根据上述微波测量原理, 设计了精煤全水分微波测水仪——MC 测水仪。在唐山矿选煤厂化验室进行了工业性实验, 主要是对该矿的商品煤进行两种测全水分的方法对比实验(一种是烘干的常规法, 一种是本文介绍的仪器法), 实验数据统计分析结果如下:

合格率  $> 95\%$ ; 两种方法的平均误差  $\bar{d} = 0.0396\%$ ; 标准偏差为  $0.3322\%$ ; 置信范围为  $-0.37182 \sim 0.29262\%$ ;  $t_{0.05} = 1.96$ ,  $t = 1.90$ ,  $1.90 < 1.96$ 。

可以看出: (1) 以“ $t$ ”分布为基础的统计判断  $1.90 < 1.96$ , 所以两种方法测量结果的平均值无显著性差异, 在 95% 概算的情况下不会发生显著性偏差。(2) 置信范围在  $-0.37182 \sim 0.29262\%$  之间, 波动在国家规定的允许误差  $\pm 0.4\%$  范围内。

(煤炭工业部煤炭科学研究院唐山分院  
王金柱)

1) 本发明专利号 86 2 05895. 3 摘要见《实用新型专利公报》第 3 卷第 27 号(总第 48 期) 1987 年第 49 页。