

有限维光学信道模型和成象质量评价

王 宁¹⁾ 宋菲君

(北京信息光学仪器研究所)

摘 要

本文应用二维频谱分析以及经典统计物理学中的微正则系综和各态历经假设来定义一个普遍的光学仪器的信源模型。利用成象积分方程来分析讨论光学成象的一般过程,并用信息论的方法,以信源的熵来作为光学仪器的物的平均信息量的度量。以疑义度和信道容量来作为成象质量的评价指标,给出了离焦情形下的计算结果。

一、光学仪器的成象质量和传递信息的能力

成象是光学中最基本的现象之一。从伽利略发明以他的名字命名的望远镜至今,人类发明、生产和使用了三大类几千个品种的光学成象仪器:望远镜用以观察远景,从几十米远的舞台到几百万光年以外的银河外星系;显微镜用以观察细微的标本,从钟表元件、大规模集成电路到细胞;照相机用来拍摄近处和远处的景物。前两类仪器是用眼睛来观察的,称为目视成象仪器。

一切成象仪器的最终目的,都是给出一幅清晰而不失真的象。在传统的光学中,是用下面这些语言来描述成象质量的:清晰度、层次感、反衬度、景深、解象力、色彩还原……。一幅高质量的图象,应当是清晰的,具有丰富的层次感,适中的反差(照相师称为“软硬适中的调子”),尽可能大的景深,足够高的解象力,正确的色彩还原等。显然,这些形象化的描述,并不能全面、准确、科学地反映图象的真正质量。

从近代信息论的观点来看,光学成象系统是一个图象信息的传输系统,它也是由信源(物)、信道(光学仪器)、信宿(象、接收器)组成,如图1所示,称为“光学信道”。

光学信道的功能有两个:第一,把尽可能

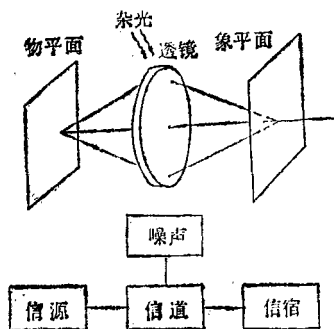


图1 光学信道

多的“物”信息传递给“象”;第二,减少象的失真。总之尽可能提高输出图象信息的质和量。因此,有必要首先对图象的信息量作出科学的定义。

为了进行成象质量的对比,判断镜头是否合格,还需要一个定量的象质评价指标 E 。 E 除了要反映成象的清晰度以外,还应当满足三个基本要求:

1. 它应当是非负的,即 $E \geq 0$ 。
2. 当光学仪器的象和物互相独立(毫无相似之处)时, $E = 0$ 。
3. 由于光线的回溯性定律,物和象是“可逆”的。例如,照相物镜给出一个缩小的象,如果把物镜装到放大机上,在屏幕上就可得到放大的象。所以, E 应当对于物和象对称,即交换

1) 现在美国 Berkeley 大学物理系学习。

物和象, E 的值不变。

二、光学系统的信源模型

1. 物面光强分布的二维频谱分析

可以认为, 钢琴上的一个和弦 (135) 或 (246) 要比一个单音 (1) 或 (2) 包含更丰富的信息, 那是因为和弦所含的频率成分比单音多。众所周知, 把一个机械振动分解为各种频率的过程, 就是傅里叶分析或频谱分析。

同样, 一张图画, 一个标本, 通常是由亮度缓慢变化的背景、粗的轮廓线和细节构成。若把缓慢变化的背景看成是图象的低频成分, 把急剧变化的细节看成是高频成分, 可以对图象进行类似的频谱分析 (二维傅里叶分析)。

一个有限范围内的图象 (例如 $24 \text{ mm} \times 36 \text{ mm}$ 的 135 照片), 如果设它的亮度分布为 $I_0(x, y)$ (我们暂且不管颜色, 假定被分析的是黑白图片), 根据数学中的理论, 总可以用该范围内的完备、正交归一的函数组 $\{\psi_{mn}(x, y)\}$ 展开:

$$I_0(x, y) = \sum_m \sum_n a_{mn} \psi_{mn}(x, y), \quad (1)$$

式中 a_{mn} 为广义傅里叶系数, 也称为谱项。

为简单起见, 考虑定义在 $[-l, l]$ 内的一维系统, 上式可变为

$$I_0(x) = \sum_n a_n \phi_n(x), \quad (2)$$

式中 $\phi_0 = 1$, 代表平均亮度或“直流分量”, 其余的 ϕ_n 可取作正弦或余弦函数。由于实际的光强分布都是非负的, 所以我们定义一组新的完备的函数组 $\{\varphi_n(x)\}$

$\varphi_n(x) = \phi_0(x) + \phi_n(x) = 1 + \phi_n(x)$, (3) 如图 2 所示。

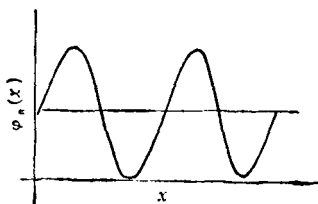


图 2 $\varphi_n(x)$

由于 $\{\varphi_n\}$ 的完备性, $I_0(x)$ 也可以用 $\varphi_n(x)$ 展开

$$I_0(x) = \sum_n p_n \varphi_n(x). \quad (4)$$

2. 微正则系综和各态历经假设^[1]

设物平面的总光强为常数 C , 它等价于

$$\begin{aligned} \int_{-l}^l I_0(x) dx &= \sum_n p_n \int_{-l}^l \varphi_n(x) dx \\ &= 2l \sum_n p_n + \sum_{n=1}^{\infty} p_n \int_{-l}^l \psi_n(x) dx \\ &= C. \end{aligned} \quad (5)$$

上式右边第二个积分的被积函数是振荡的, 积分值为零, 这样一来就有

$$\sum_n p_n = \frac{C}{2l}. \quad (6)$$

如果把完备集合 $\{\varphi_n\}$ 看成是信息源, 则 $\{p_n\}$ 相当于概率分布, p_n 就是光强分布处于 φ_n 态的概率。不同的概率分布 $\{p_n\}$ 对应于不同的光强分布, 所有可能的光强分布都满足 (5) 式能量或总光强为常数的条件, 所以它们的全体构成微正则系综。不失一般性, 可将 (6) 式写成

$$\sum_n p_n = 1. \quad (7)$$

我们考虑一个无限维的向量空间, 由向量 $\varphi_0, \varphi_1, \dots$ 张成。在该空间内任一向量

$$I_0 = \sum_n p_n \varphi_n,$$

只要满足归一化条件 (7) 式, 就能满足能量条件 (5) 式, 也就代表一个可能出现的物面光强分布 $I_0(x)$ 。

在一个具体图象的光强分布 $\{p_n\}$ 中, 不同频率成分 p_n 未必相同。有的分布中含有较丰富的低频信息, 例如平缓起伏的沙丘、蓝天中的云彩等; 有的分布中则含有较多的高频信息, 例如大规模集成电路中的精细结构。然而, 从总体来看, 从统计平均的角度来看, 可以认为大量物面光强分布中各种空间频率出现的概率相同。换句话说, 我们所关心的, 是用光学仪器去观察大量不同构造的标本或图片的综合效果。这就是光学信源模型各态历经假设: 能量方

程(5)式为无限维空间中的一个“曲面”，那么该曲面上相等的“面元” $\Delta\sigma$ 所含状态的概率是相等的。

三、成象积分方程与光学信道

1. 光学系统成象积分方程的本征理论^[2]

物面光强分布 $I_0(x)$ 经成象系统形成象面光强分布 $I_i(x)$ 。从这个意义上讲，成象系统就是图象信息的传输通道，简称光学信道，物面是信道的输入端，象面是输出端。 I_i 和 I_0 的关系可写成

$$I_i(x) = \int_{-l}^l h(x, \xi) I_0(\xi) d\xi = \hat{I}\{I_0(\xi)\}, \quad (8)$$

式中 $h(x, \xi)$ 为线扩散函数(二维情况下为点扩散函数)，又称脉冲响应； \hat{I} 为成象积分算子

$$\hat{I} = \int_{-l}^l d\xi h(x, \xi). \quad (9)$$

如将上节的 ϕ_n 选为 \hat{I} 的本征函数，那么我们可写出关于 ϕ_n 的本征方程

$$\hat{I}\phi_n = \gamma_n \phi_n, \quad (10)$$

式中 γ_n 为属于 ϕ_n 的本征值。根据积分方程的本征理论^[3]， $\gamma_0 = 1, \gamma_n > \gamma_{n+1}$ ，当 $n \rightarrow \infty$ 时， $\gamma_n \rightarrow 0$ 。(10)式表明：由本征函数表示的光强分布信息可以完全、不失真地通过信道， γ_n 只表示象面亮度的均匀减弱。也就是说，本征函数 ϕ_n 的象 $\tilde{\phi}_n$ 是物的精确复制品。

将 \hat{I} 作用于 ϕ_n ，得到

$$\tilde{\phi}_n = \hat{I}\phi_n = (1 - \gamma_n)\phi_0 + \gamma_n\phi_n. \quad (11)$$

2. 能量解释

(11)式表示，当输入为 ϕ_n 时，输出有两项： ϕ_0 和 ϕ_n 。由于 $\gamma_n < 1$ ，所以说 ϕ_n 的能量，在信道中传递的过程中部分地转移到零频分量 ϕ_0 上去，如图3所示。根据 $\gamma_n > \gamma_{n+1}$ 可知，这种转移现象，空频越高越严重。

通常以交流分量幅值与直流分量的比值为调制度。输入信号 ϕ_n 的调制度为1(满幅调制)，输出信号 $\tilde{\phi}_n$ 的调制度降为 $\gamma_n \leq 1$ (当 $n = 0$ 时，等号成立)。

3. 概率解释和信道矩阵

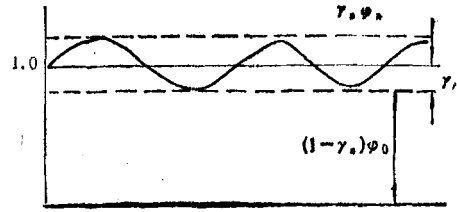


图3 能量转移

从概率统计的观点，可以认为第 n 个本征函数 ϕ_n 输入信道后，从输出端测到 ϕ_n 的概率为 γ_n ，测到零频 ϕ_0 的概率为 $1 - \gamma_n$ 。设 $P(\phi_n | \phi_m)$ 为输入 ϕ_m 时输出为 ϕ_n 的概率，则有

$$P_{mn} = P(\phi_n | \phi_m) = \gamma_n \delta_{nm} + (1 - \gamma_m) \delta_{n0}, \quad (12)$$

P_{mn} 又称为条件概率，由它构成信道矩阵^[4]

$$\{P_{mn}\} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 - \gamma_1 & \gamma_1 & 0 & \cdots \\ 1 - \gamma_2 & 0 & \gamma_2 & \cdots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}. \quad (13)$$

图象信息通过光学信道的传递特性完全由信道矩阵决定。

4. 噪声效应和截止频率

任何光学仪器中都存在杂光，也就是光学信道中的噪声。部分杂光来自信道之外，称为环境噪声；部分则是由于成象光束在透镜表面的反射和镜筒内表面的散射造成的。光学信道中的噪声通常是宽频带的白噪声，设噪声水平为 ϵ ，则输出信噪比为 $\frac{\gamma_n}{\epsilon}$ 。在噪声的影响下，探测过程出现失真。信噪比越高，抗干扰性能就越好，“误码率”就越低。一般说来低频信号的误码率较低。

存在噪声时，随着 n 增大， γ_n 单调下降，总归存在一个 $N(\epsilon)$ ，当 $n > N$ 时，更高频率的谱项淹没在噪声中测不出来(图4)。

$N(\epsilon)$ 又称为光学系统的自由度或纬度， γ_N 称为系统的截止频率。由于噪声的存在，实际的光学系统都是有限维的，其功能相当于低通滤波器。

这样一来，可以把噪声光学信道进一步简

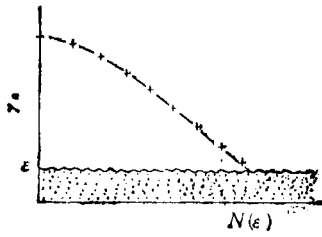


图 4

化,输入和输出谱项分别形成有限集合:

输入: $A\{a_0, a_1, a_2, \dots, a_{N-1}\}$ (信源),

输出: $B\{b_0, b_1, b_2, \dots, b_{N-1}\}$ (信宿).

只有 N 个谱项可以通过信道,信道矩阵也成为有限的

$$\{P_{mn}\} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 - \gamma_1 & \gamma_1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 - \gamma_2 & 0 & \gamma_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 - \gamma_{N-1} & 0 & 0 & \dots & \gamma_{N-1} \end{pmatrix} \quad (13)'$$

四、光学图象的平均信息量和熵

1. 等概率假设和信源的熵

各态历经假说导致了下面的结果:

$$p(a_m) = \frac{1}{N}. \quad (14)$$

按照信息论^[4]的定义,信源的平均信息量

$$H(A) = \sum_{m=0}^{N-1} p(a_m) \log_2 \left[\frac{1}{p(a_m)} \right] = \log_2 N (\text{bit}), \quad (15)$$

$H(A)$ 又称为信源的熵.熵是事物不确定性的度量.如果光学图象仅有一种空频,例如 γ_0 ,则信源 A 中只有 a_0 一项, $p(a_0) = 1$. 这样的图象不存在任何的不确定性,它只是一片均匀的照明,不包含任何信息, $H(A) = 0$. 反之,在等概率假设下,具有各种空频分布的图象都可能出现,我们无法预测哪一种空频出现的概率大一些.事实上,大量图象中包含的空频出现的概率相等.显然,这样的信源包含的平均信息量最为丰富.

2. 前向条件概率和后向条件概率

由 $p(a_m)$ 和 $P(b_n/a_m)$,可以得到信宿(象

物理

面)中谱项 b_n 出现的概率

$$p(b_n) = \sum_{m=0}^{N-1} p(a_m) P(b_n/a_m) = \frac{1}{N} \gamma_n + \left(1 - \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \gamma_m \right) \delta_{n0}. \quad (16)$$

一对谱项 (a_m, b_n) 发生的概率为

$$P(a_m, b_n) = p(a_m) P(b_n/a_m) = p(b_n) P(a_m/b_n), \quad (17)$$

式中 $P(a_m/b_n)$ 为接收到 b_n 后,发送的谱项为 a_m 的概率. $P(a_m/b_n)$ 又称后向条件概率或后验概率, $P(b_n/a_m)$ 则称为前向条件概率或先验概率.

3. 疑义度(条件熵)——信道中的信息损失

由后验概率构成条件熵

$$H(A/B) = \sum_{m,n=0}^{N-1} p(b_n) P(a_m/b_n) \times \log_2 \left[\frac{1}{P(a_m/b_n)} \right] = \sum_{m,n=0}^{N-1} P(a_m, b_n) \log_2 \left[\frac{1}{P(a_m/b_n)} \right], \quad (18)$$

$H(A/B)$ 又称为“疑义度”.任何光学仪器都是通过象来表现物的.借助于光学仪器,我们只能看到象而看不到物.由于光学仪器的象差、衍射效应、杂散光效应,象总是有失真和有缺陷的,使我们在一定程度上无法认识“庐山真面目”.就好比用显微镜来观察细胞,如果显微镜质量差,成象模糊,我们对检查结果就会有怀疑,不能肯定.疑义度 $H(A/B)$ 恰恰表示当接收到一个光强分布 $B\{b_0, b_1, \dots, b_{N-1}\}$ 时,我们对于输入的光强分布 $A\{a_0, a_1, \dots, a_{N-1}\}$ 认识的不确定性或怀疑的程度. $H(A/B) = 0$ 时,象是物的精确的复制品; $H(A/B)$ 越大,成象过程中物信息的损失越严重,象与物的差别就越大.

五、光学信道容量

我们不妨将系统信息定义为^[4]

$$I(A; B) = H(A) - H(A/B), \quad (19)$$

I 又称信道容量,表示光学系统所能传递的信

息量。当疑义度 $H(A/B) = 0$ 时, 信息在信道中传递时没有损失, 信道容量等于物的平均信息量, 成象是完美的。 $H(A/B)$ 越大, I 和 $H(A)$ 差别越大。

利用 (14)–(19) 式, 可以得到

$$I(A; B) = \sum_{m,n=0}^{N-1} P(a_m, b_n) \times \log_2 \left[\frac{P(a_m, b_n)}{p(a_m)p(b_n)} \right]. \quad (20)$$

由上式可以看到, $I(A; B)$ 对于 A 和 B 对称,

$$I(B; A) = I(A; B). \quad (21)$$

其次, 当 B 相对于 A 独立时 (也就是象与物毫无共同之处时), $P(a_m, b_n) = 0$, $I(A; B) = 0$ (在极限的意义下得到), 表明这样的信道不能传递图象信息。此外, 还容易证明 $I(A; B) \geq 0$ 。由此可见, 信道容量 $I(A; B)$ 满足成象质量评价指标的三个基本要求。

最后, 我们再来看看这一指标是否反映象的清晰度。我们利用光学系统的离焦效应来进行检验。

一般说来, 一个成象仪器只能对一对共轭平面成清晰象, 在这个物象配置下, 成象关系式满足。当物平面或象平面前后移动, 偏离最佳成象位置时, 象的清晰度就将下降, 这一效应称为“离焦”。物面或象面偏离最佳成象位置的值称为离焦量 δ , 清晰度随 δ 的增大而下降。表 1 给出一个高质量的 40 倍显微物镜离焦时的 H 和 I 的计算值。图 5 画出 I 随 δ/λ (λ 为波长) 的变化曲线。我们可以看出, 随着 δ 的增大, I 下降, 开始变化较慢, 在这一区域可以认为成象质量虽有所下降, 但基本上还是清晰的, 还在仪器的“景深”范围内; 当 $\delta/\lambda > 1$ 时, I 开始急剧下降; 当 $\delta/\lambda > 2$ 以后, I 降到最大值的一半以下, 成象就模糊不清了。这和景深的计算结果是大体相符的, 说明信道容量 $I(A; B)$ 确实反映了成象的清晰程度, 把它看作是成象质量的数字特征量是恰当的。

最后, 我们还要指出, 除了平面镜这类最简单的系统外, 所有实际成象系统的 $I(A; B)$ 都

表 1 信源熵 $[H(A)]$ 、疑义度 $[H(A/B)]$ 和信道容量 $[I(A; B)]$ 随 δ/λ 的变化

δ/λ	$H(A)$	$H(A/B)$	$I(A; B)$
0.1	3.0	1.871	1.129
0.2	3.0	1.875	1.125
0.5	3.0	1.904	1.096
1.0	3.0	2.003	0.997
2.0	3.0	2.326	0.674
3.0	3.0	2.675	0.325

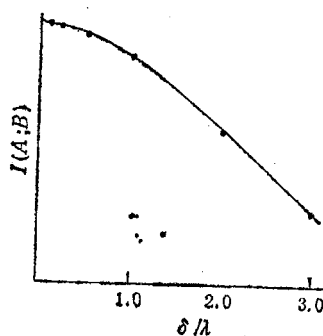


图 5 信道容量 $I(A; B)$ 随 δ/λ 的变化

比 $H(A)$ 小得多, 从表 1 可以看出, 即使高质量的镜头也是如此。这是衍射效应造成的。由于镜头的相对孔径总归是有限的, 只能接收来自物平面的一部分光波所荷载的信息, 其余的信息随着光波被镜框或光圈所遮拦而散逸, 未能通过光学信道。镜头的象差 (由于设计、加工和调试造成) 又使通过镜框的信息进一步失真, 使清晰度或 I 值进一步下降。所以, 成象光学系统的疑义度 H 恒大于零, 说明光学仪器的象或多或少地异于物。如果把成象作为对物平面上的图象进行测量的手段, 那么测量结果永远存在某种程度的“不确定性”, 造成测量的误差。这也是测不准原理在成象过程中的反映。

- [1] 王竹溪, 统计物理学导论, 人民教育出版社, (1962), 42.
- [2] 宋菲君、张涛, 光学学报, 7-11(1987), 1021.
- [3] F. W. 拜伦, R. W. 富勒著, 蔡纬译, 物理学中的数学方法, 科学出版社, (1982), 623.
- [4] R. W. 汉明著, 朱雪龙译, 编码和信息理论, 科学出版社, (1984).