热流演化方程及其推证

凌瑞良
(苏州师范专科学校物理系)

在经典的输运过程中，各向同性的均匀介质中的热传导方程,可从 Fourier 定律

$$\boldsymbol{J}=-K\nabla T \tag{1}$$

和热流的能量守恒方程

$$C\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)=-\nabla\cdot J \tag{2}$$

推得．得到的热传导方程为

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)=\frac{K}{C}\nabla^2 T, \tag{3}$$

式中 C 是传热介质每单位体积的比热，K 是热传导系数，T 是介质的温度．(3) 式在偏微分方程中属抛物线型，它预示热扰动(热波)将以一个无限大速度传播,这显然不符合实验事实．实际上波速是决不能超过热载体的速度的．Vernotte[1] 正视了这一点,早在 1958 年就建议把 (1) 式修正成如下最简单的热流演化方程:

$$\boldsymbol{J}+\tau\left(\frac{\partial \boldsymbol{J}}{\partial t}\right)=-K\nabla T, \tag{4}$$

式中 τ 是弛豫时间．(4)式的合理性是显然的，因为按 (2) 式和 (4) 式可得

$$\frac{\partial T}{\partial t}+\tau\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}=\left(\frac{K}{C}\right)\nabla^2 T. \tag{5}$$

在偏微分方程中，(5) 式属于双曲线型,它预示着热扰动以有限速度 $\left(v=\sqrt{\frac{K}{\tau C}}\right)$ 及一定的衰减率 τ^{-1} 传播．可见 (4) 式比 (1) 式更符合实验事实．此外，如果弛豫时间 $\tau\to 0$，或者热流 $\boldsymbol{J}$ 随时间变化不太快，则 (4) 式自然就退化成 (1) 式．进一步可以证明[2]，若传播速度与热载体的速度相一致，则弛豫时间 τ 的数量级必定是热载体间相互作用的弛豫时间的数量级．正因为由 (4) 式决定的热流时空演化规律比由 (1) 式决定的热流时空演化规律更符合热流的真实时空发展行为，所以才把 (4) 式作为拓广不可逆热力学 (EIT) 理论的两个基本假设之一[3]．

必须指出，(4)式只是根据经验得出的．在这方面 Simons 做了有益的工作[4]．他首先用微观理论研究 (1) 式和 (3) 式的修正，并用由 $\boldsymbol{J}$ 和 T 逐次递进的高阶微商所组成的无穷级数形式给出了 (1) 式和 (3) 式的修正．不难发现，(4) 式仅是这种理想修正的一级近似．不过，Simons 给出的修正虽较理想,但其方法所用的计算却相当冗长．好在最近 Simons[5] 又从研究各向同性介质中的玻耳兹曼输运方程出发,利用巧妙的物理思想和方法,简单地推证了热流演化方程 (4) 式．鉴于热流演化方程的重要,这里,我们特将此法作一简介．

我们假设热在一各向同性介质中输运，这种介质由状态为确定的波数 $\boldsymbol{k}$ 所决定的粒子组成．这些粒子可以是电子或声子，或者实际上是任何其它与本身能量有关的基本激发．如果 $n(\boldsymbol{k},t)$ 表示在 t 时刻波数为 $\boldsymbol{k}$ 的粒子数，则关于 n 依赖时间的玻耳兹曼输运方程取如下形式:

$$\frac{\partial n}{\partial t}=-v_p\frac{\partial n}{\partial x_p}+\left.\frac{\partial n}{\partial t}\right|_c, \tag{6}$$

式中 v_p 是粒子速度 $\boldsymbol{v}$ 的 p 分量，$\left.\frac{\partial n}{\partial t}\right|_c$ 是由于粒子间相互作用所引起的 n 变化速率．关于 n 随粒子相互作用机制而定的 $\left.\frac{\partial n}{\partial t}\right|_c$ 项较适当的表达式可参阅 Ziman[6] 的《电子和声子》一书．一般来说，$\left.\frac{\partial n}{\partial t}\right|_c$ 的严格形式应包含相当复杂的积分表式,而这里,我们给出的只是用所谓的"弛豫时间"作近似的近似表达式

$$\left.\frac{\partial n}{\partial t}\right|_{c}=\frac{n_0-n}{\tau}, \qquad (7)$$

其中 n_0 是粒子（例如玻色-爱因斯坦声子和费米-狄喇克电子）的统计平衡态分布，而 τ 则是刻划粒子弛豫到平衡态的弛豫时间．我们先将(7)式代入(6)式，然后在所得结果的两边同乘以 $\tau E v_q$（这里 E 是单个粒子的能量），并对所有的 $\boldsymbol{k}$ 值求和，最后便得

$$\sum_{k}\tau E v_q\frac{\partial n}{\partial t}+\sum_{k}\tau v_p v_q E\frac{\partial n}{\partial x_p}+\sum_{k}E v_q n=\sum_{k}E v_q n_0. \qquad (8)$$

上式最后一项等于零，因为 $E v_q n_0$ 是 $\boldsymbol{k}$ 的奇函数．此外，我们关心的是粒子分布的均衡变化，而这种变化根据局域平衡假设是比较小的，以致 $|n-n_0|\ll n_0$．这样，(8)式左边的第二项就可改写成

$$\sum_{k}\tau v_p v_q E\frac{\partial n_0}{\partial x_p}=\frac{1}{3}\sum_{k}v^2E\tau\frac{\partial n_0}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial x_q}=K\left(\frac{\partial T}{\partial x_q}\right), \qquad (9)$$

因为对各向同性介质有

$$K=\frac{1}{3}\sum_{k}v^2E\tau\left(\frac{\partial n_0}{\partial T}\right).$$

(8)左边第三项就是热流 J_q，而第一项是 $\frac{\partial Z_q}{\partial t}$，其中

$$Z_q=\sum_{k}\tau E v_q n. \qquad (10)$$

因 τ 通常是 $\boldsymbol{k}$ 的函数，故为了能把 τ 从(10)式的求和号中提出，我们假定求和中的 $\tau(\boldsymbol{k})$ 能恰当地用一个关于所有 $\boldsymbol{k}$ 的加权平均值来代替，这样，便有 $Z_q=\tau J_q$，且(8)式可用如下形式表示:

$$J_q+\tau\left(\frac{\partial J_q}{\partial t}\right)=-K\left(\frac{\partial T}{\partial x_q}\right). \qquad (11)$$

显然，(11)式同 Fourier 传导方程的 Vernotte's 修正方程即(4)式是一致的．

实验和理论均证明，作为热流演化方程的(4)式和由它所推得的(5)式对描述高频率热波的传播尤其恰当[7]．以上讨论虽然只局限热流，但输运过程中的其它耗散流（如物质流、动量流等）也有相同的结论，即实际上，各种耗散流的时空演化规律都与经典的时空演化规律有区别[3]．

[1] P. Vernotte and C. R. Acad, *Sci. Paris*, 246(1958), 3154.

[2] P. Chester, *Phys. Rev.*, **131**(1965), 2013.

[3] 李述华，物理，**16**(1987)，79.

[4] S. Simons, *Trans. Th. Stat. Phys.*, **2**(1972), 117; *J. Phys. A*, **6**(1973), 1543.

[5] S. Simons, *Am. J. Phys.*, **54**(1986), 1048.

[6] J. M. Ziman, Electrons and Phonons, Clarendon, Oxford, (1960).

[7] C. C. Ackerman and R. A. Guyer, *Ann. Phys*, **50** (1968), 128; C. R. Brown and P. W. Matthews, *Can. J. Phys*, **48**(1970), 1200; H. E. Jackson and C. T. Walker, *Phys. Rev. B*, **3**(1971), 1428.

碘 127 分子在 640 nm 范围内 15 条新超精细结构谱线和碘 127 稳频 640 nm 激光器1)

赵克功　李成阳　李银珠　刘汉田　林贞平　许　婕

（中国计量科学研究院）

稳频激光的研究是二十年来在物理学与计量学界十分重要的研究课题．它可在不同的电磁波波段内建立波长（频率）的基准，而科学家们也一直希望建立从紫外到微波及无线电波段内直接测量电磁波频率的方法，这样对原子、分子物理学，激光光谱学，以及对用化学方法研究新物质、新材料等都是十分有价值的．

1980 年以前，国际上只在 515 nm、612nm、633 nm 和 3.39 μm 波长范围内建立了高稳频激光器．1980 年左右，法国巴黎北大学物理系

1）本文介绍的研究成果获国家自然科学奖二等奖．