

不用说了。

1961年,费因曼在英国和关妮丝结婚。他们生养了一子一女。

近几年来,费因曼曾不止一次接到过访问中国的邀请,可惜因有病在身,未能实现。如今,我们再也不可能得到在中国接待他的机会,而他的品格和业绩将永远值得我们怀念。

[1] R. P. Feynman, *Phys. Rev.*, **56**(1939), 340.  
 [2] R. P. Feynman, *Rev. Mod. Phys.*, **20**(1948), 367.  
 [3] R. P. Feynman et al., *The Feynman Lectures on Physics*, Vol. 1—3, Addison-Wesley, (1963—1965).  
 [4] R. P. Feynman and A. R. Hibbs, *Quantum Mechanics and Path Integrals*, McGraw-Hill, (1965).

[5] R. P. Feynman, *Phys. Rev.*, **76**(1949), 749.  
 [6] R. P. Feynman, *Phys. Rev.*, **76**(1949), 769.  
 [7] R. P. Feynman, M. Gell-Mann, *Phys. Rev.*, **109**(1958), 193.  
 [8] R. P. Feynman, *Photon-Hadron Interactions*, Benjamin, (1972).  
 [9] R. P. Feynman, *Quantum Electrodynamics*, Benjamin, (1961).  
 [10] R. P. Feynman, *The Theory of Fundamental Processes*, Benjamin, (1961).  
 [11] R. P. Feynman, *Statistical Mechanics*, Benjamin, (1972).  
 [12] R. P. Feynman, *The Characteristics of Physical Law*, BBC, (1964).  
 [13] R. P. Feynman, "Surely You're Joking Mr. Feynman!" *Adventures of a Curious Character*, Norton, (1985).

## 再论静电中场强与等位面曲率的关系

周邦寅

(西安电子科技大学物理系)

文献[1]已对静电中场强的量值与等位面曲率的关系作过研究,并对所得到的微分方程的近似解作了初步的讨论。本文进一步研究了这个问题的近似解,并对其应用作了更具体的说明。

### 一、静电中场强与等位面曲率的关系式的近似解

已知静电场中等位面曲率与场强沿电力线方向的变化率之间的关系式为

$$\frac{dE}{dn} + 2H(n)E = 0. \quad (1)$$

在条件  $E|_{n=0} = E_0$  下求解,可得到沿电力线场强量值的大小。其中,  $E$  是沿电力线通过等位面  $S$  的交点处场强的大小,而  $E_0$  是在参考等位面  $S_0$  上的电力线出发点的电场量值,如图1所示。 $H$  是等位面  $S$  在计算量值  $E$  处的平均曲率。(1)式的一般解是

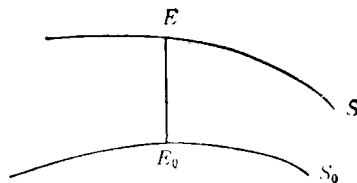


图 1

$$E = E_0 e^{-2 \int_0^n H(n') dn'} \quad (2)$$

我们已经指出,(2)式中的积分一般情况下是不能准确计算的。因为除特殊情况外,一般说来沿电力线的  $H(n)$  是事先无法知道的,除非预先知道电力线的分布。而如果已知电力线分布再来计算场强,就会导致逻辑上的悖论。但在  $S_0$  附近,在电力线长度  $n$  很小 ( $n \ll H_0^{-1}$ ) 的范围内( $n$  是垂直  $S_0$  面的),求(1)式的近似解是可行的。

由于求解的方法或近似函数的选取不同,所得到的近似解的近似程度也就不同。例如,我们用毕卡逐步逼近法来解(1)式<sup>[2]</sup>,所得到的

级数解可化为下列闭合形式,即

$$E = E_0 e^{-2H_0 n} \quad (n \ll H_0^{-1}), \quad (3)$$

其中  $H_0$  是参考面  $S_0$  在电场强度量为  $E_0$  的点的平均曲率(见图1)。在(3)式中它被认为是常数。

如果在  $n$  很小的范围内引用平行曲面的概念,则可以获得更为准确的近似函数  $H = H(n)$ 。利用这个函数能够得到比(3)式更为准确的结果,它将不是指数函数。我们所用的方法如下面所述。

在静电场中任取一等位面,在其上截取一小面积元  $S_0$ ,并设  $S_0$  面的两个主曲率半径分别为  $\rho_1, \rho_2$ 。沿  $S_0$  面的外法线方向,即电力线的方向,外移一线元  $n$  ( $n \ll \frac{\rho_1 + \rho_2}{2}$ ),即得新的等位面的面积元  $S$ ,如图2所示。根据微分几何中

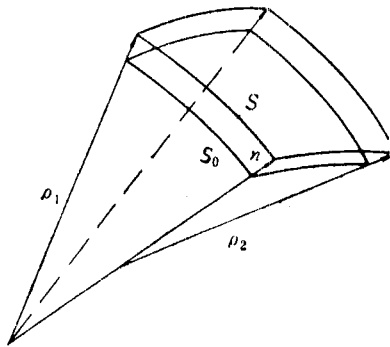


图 2

曲面和平均曲率的定义,可得  $S$  面的平均曲率为

$$H = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\rho_1 + n} + \frac{1}{\rho_2 + n} \right) \\ = \frac{H_0 + K_0 n}{1 + 2H_0 n + K_0 n^2} \quad (n \ll H_0^{-1}), \quad (4)$$

其中  $H_0 = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \right)$ ,  $K_0 = \frac{1}{\rho_1} \cdot \frac{1}{\rho_2}$  分别为  $S_0$  面的平均曲率和总曲率(高斯曲率),它们可视为已知值。 $n$  是从  $S_0$  面起沿电力线方向的微小距离。这就是等位面平均曲率沿法线的长度  $n$  (即电力线)在平行曲面近似下的关系式。这个关系式可用微分几何的方法来严格地导出<sup>[3]</sup>。(4)式即我们所求的近似函数  $H =$

$H(n)$ 。

把(4)式代入(2)式,经过简单的积分计算,即可求得(1)式的近似解为

$$E = E_0 \exp \left( -2 \int_0^n H(n') dn' \right) \\ = E_0 \exp \left( -2 \int_0^n \frac{H_0 + K_0 n'}{1 + 2H_0 n' + K_0 n'^2} dn' \right),$$

即

$$E = E_0 (1 + 2H_0 n + K_0 n^2)^{-1} \quad (n \ll H_0^{-1}). \quad (5)$$

这是参考等位面  $S_0$  附近 ( $n \ll H_0^{-1}$ ) 点的场强与电力线  $n$  之间的一个代数关系式。它不仅含有  $S_0$  的平均曲率  $H_0$ ,而且含有  $S_0$  的总曲率(高斯曲率)  $K_0$ 。

如果参考等位面  $S_0$  上的点是脐点,则  $\rho_1 = \rho_2 = \rho$ ,且  $K_0 = H_0^2$ , (5)式可简化为

$$E = E_0 (1 + H_0 n)^{-2}. \quad (6)$$

如果参考等位面是一带电导体表面,那么其面电荷密度  $\sigma$  也可利用(5)式表示为

$$\sigma = \epsilon_0 E_0 = \epsilon_0 E (1 + 2H_0 n + K_0 n^2). \quad (7)$$

而对导体表面上的脐点,则有

$$\sigma = \epsilon_0 E (1 + H_0 n)^2. \quad (8)$$

## 二、应用实例

若我们已知带电体(即参考等位面)上一点的  $E_0, H_0, K_0$ , 则(3), (5), (6)式均可用来计算带电导体表面附近一点的场强大小。反之,若已知导体表面附近的场强,也可用它们来估算导体上的面电荷密度。

例1: 半径为  $a$  的均匀带电导体球壳,求球外距球面为  $\Delta r$  处一点的场强的量值(见图3)。

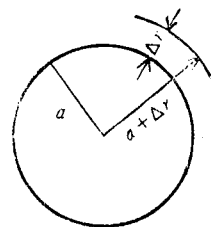


图 3

已知此球面上的  $E_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{a^2}$ , 在球面上每一点的平均曲率  $H_0 = \frac{1}{a}$ , 总曲率  $K_0 = \frac{1}{a^2}$ , 首先用(3)式进行计算, 可得

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a^2} e^{-\frac{2\Delta r}{a}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a^2} \left(1 - \frac{2\Delta r}{a}\right). \quad (9)$$

其次用(5)式进行计算, 可得

$$\begin{aligned} E &= E_0 \left( \frac{1}{1 + 2\frac{1}{a}\Delta r + \frac{1}{a^2}\Delta r^2} \right) \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{a^2} \frac{1}{\left(1 + \frac{\Delta r}{a}\right)^2} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(a + \Delta r)^2}. \end{aligned} \quad (10)$$

(9)式是一个近似值, 而(10)式的结果是均匀带电球壳外电场强度量值的精确表示式。

例2: 求单位长度电荷密度为  $\lambda$  的均匀无限长带电圆柱面外一点的场强的大小 (见图4)。

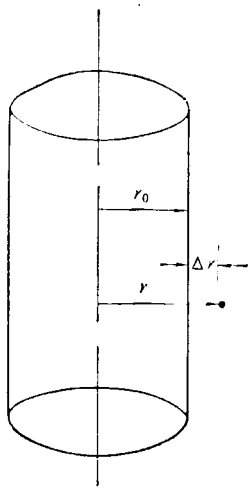


图4

已知柱面上的场强  $E_0 = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r_0}$ , 圆柱面的平均曲率  $H_0 = \frac{1}{2r_0}$ , 总曲率  $K_0 = 0$ . 如利用(3)式, 则柱面外一点场强的近似值为

$$E = E_0 e^{-\frac{\Delta r}{r_0}} = E_0 e^{-\frac{\Delta r}{r_0}} = E_0 \left(1 - \frac{\Delta r}{r_0}\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r_0} \left(1 - \frac{\Delta r}{r_0}\right). \quad (11)$$

如利用(5)式, 则可求得柱面外一点场强大小的准确值为

$$\begin{aligned} E &= E_0 (1 + 2H_0 n + K_0 n^2)^{-1} \\ &= E_0 \frac{1}{\left(1 + 2\frac{\Delta r}{2r_0}\right)} \\ &= \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r_0} \frac{1}{\left(1 + \frac{\Delta r}{r_0}\right)} \\ &= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}. \end{aligned} \quad (12)$$

(12)式是精确解。

从以上两个例子可清楚地看出, 用(5)式计算导体表面附近一点的场强所得的结果比(3)式简单[因为(5)式是一多项式, 而(3)式是一指数式], 且精确度高. 由于在上述两例中, 用(5)式所得的结果和精确解完全一样, 容易产生这样一个错觉, 似乎在任何情况下用(5)式来计算导体表面附近的  $E$  都可得到精确解. 事实上并非如此, 因为只有在场中的等位面是一系列平行曲面的情况下, 用(5)式求得的结果, 才和精确解一样. 对一般的场, 等位面不可能都是平行曲面, 这时由(5)式求出的导体表面附近的场值仍为近似值, 这一点可由下例看出。

例3: 在场强为  $A$  的均匀电场中, 放置一个半径为  $a$  的导体球 (如图5), 求球外任一点场强的量值. 我们采用球坐标进行计算, 则场强有两个分量<sup>[4]</sup>, 它的量值的计算式为

$$E = A \left[ \left(1 + \frac{2a^3}{r^3}\right)^2 \cos^2\theta + \left(1 - \frac{a^3}{r^3}\right)^2 \sin^2\theta \right]^{1/2}. \quad (13)$$

在球面上,  $r = a$ , 我们有

$$E_0 = 3A \cos\theta. \quad (14)$$

在距球面一小距离  $\Delta r$  处, 由于球面上每一点都是脐点, 可由(6)式得到

$$E = 3A \cos\theta \left(1 + \frac{\Delta r}{a}\right)^{-2}. \quad (15)$$

为了便于比较不同的结果, 我们设  $\theta = 0$ ,  $r = a + \Delta r$ , 即对在球面上  $\theta = 0$  的点取力

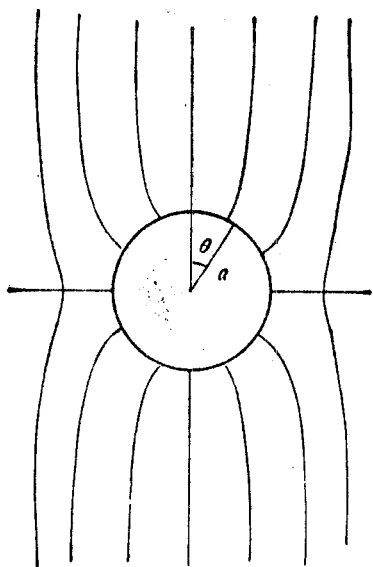


图 5

线上的距离  $\Delta r$  进行电场量值大小的比较。此时(13)式可简化为

$$E = 3A \left[ 1 - 2 \left( \frac{\Delta r}{a} \right) + 4 \left( \frac{\Delta r}{a} \right)^2 - \dots \right]. \quad (16)$$

而(15)式的结果是

$$E = 3A \left[ 1 - 2 \left( \frac{\Delta r}{a} \right) + 3 \left( \frac{\Delta r}{a} \right)^2 - \dots \right]. \quad (17)$$

如用(3)式,则结果是

$$E = 3A \left[ 1 - 2 \left( \frac{\Delta r}{a} \right) + 2 \left( \frac{\Delta r}{a} \right)^2 - \dots \right]. \quad (18)$$

把(17),(18)式与(16)式进行比较,(16)式的解可以准确到  $0(\Delta r/a)^2$ , 而(17)和(18)两式的解到此数量级时都有误差,但(17)式比(18)式更接近精确解。也就是说,利用(5)式所得的计算结果比利用(3)式所得的计算结果,其近似程度要更好些。

例 4: 求半径为  $a$  的孤立带电导体球壳上面电荷密度  $\sigma$ ?

我们由(8)式或(7)式可得

$$\begin{aligned} \sigma &= \epsilon_0 E (1 + H_0 n)^2 \\ &= \epsilon_0 \frac{q}{4\pi \epsilon_0 (a + \Delta r)^2} \left( 1 + \frac{\Delta r}{a} \right)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{q}{4\pi (a + \Delta r)^2} \left( 1 + \frac{\Delta r}{a} \right)^2 \\ &= \frac{q}{4\pi a^2}. \end{aligned} \quad (19)$$

这个结果和精确值完全一致(见图 3)。但这只是在等位面是一系列平行曲面的情况下,利用(7)式或(8)式才能得到和精确值一致的结果,而在一般情况下,由(7)式或(8)式得出的结果只能是导体上面电荷密度的近似值。

总之,以上的演算和例子说明,在一般情况下,用等位面的曲率与场强沿电力线变化率所满足的微分方程来求解场,由于使用的近似方法不同,可以在邻近参考面上的一个点得到不同近似程度的近似解。在计算导体上的面电荷密度时,一般说来,找不到一个只与带电导体曲率(包括平均曲率和高斯曲率)有关的精确显函数形式解,而只能在面上一给定点得到近似的结果。在这种情况下无法求得表示面电荷密度在导体面上各点分布的精确解。

这样的结论是不难理解的,因为当用(1)式的解来计算电场时,在一般情况下,在电场未求出之前,沿某一根力线各等位面平均曲率的变化函数  $H = H(n)$  是未知的,同时从某一个参考等位面  $S_0$  上某一点出发的力线的走向也是未知的。这就决定了我们只能得到(1)式的近似解,它只适用于计算在参考等位面  $S_0$  上一点附近沿一根力线的一小段距离上的场强量值。如果参考等位面  $S_0$  是带电导体的表面,则利用(1)式的解能够反过来求得导体上一点面电荷密度的表示式,这个式子显含导体面在该点的曲率,如(7)式和(8)式所示,但其中的  $E$  并不是导体上的电场量值而是导体上该点沿电力线经过一个小距离处的电场量值,它只是近似地和导体上该点的场强值相等。这就是说,导体的曲率半径在计算一个点的面电荷密度时的显函数性质是由放弃电场强度的准确性而得到的,这种近似性是公式本身固有的。

最后,还应指出,在(1)式的所有近似解表达式中,  $E$  都不表示电场量值沿参考等位面

$S_0$  的横向分布,如同我们采用的(14)式那样,因而不能认为(7), (8)两式是面电荷密度在导体面上的分布函数。

【1】 周邦寅,物理,17(1988),176.

【2】 中山大学数学力学系常微分方程组编,常微分方程,人民教育出版社,(1978),60.

【3】 T. J. Willmore, An Introduction to Differential Geometry, Oxford University Press, (1959), 116.

【4】 J. R. Reitz et al., Foundations of Electromagnetic Theory, Addison-Wesley Publishing Company, (1979), 57.

【5】 D. R. Frankl, Electromagnetic Theory, Prentice Hall Inc, (1986), 216.

## 一种新的成象技术——正电子再发射显微镜 (PRM)

最近美国 Michigan 大学的研究小组和美国 Brandies 大学与 AT&T, Bell 实验室的联合研究小组,在正电子再发射显微镜 (PRM) 的研制工作中,取得了显著的进展。这种崭新的成象技术,引起了科学界的广泛兴趣和重视<sup>[1]</sup>。

PRM 是利用从试样表面自发地再发射的正电子成象。来自放射性源 (例如 40mCi Na-22 源或 80mCi Co-58 源) 的正电子,通过钨慢化器 (W-moderator) 来增强亮度,然后通过加速和会聚系统,得到能量为 1—10keV 的正电子束。正电子束射入试样后,非弹性碰撞造成的热慢化效应,使它们失去大部分能量。如果试样对正电子有负的亲和力,则入射正电子中的相当部分(对金属来说,约为 10—20%)将从试样表面自发地逸出(再发射),其能量约为 1eV。再发射的正电子经加速和成象系统的放大,在带有荧光屏的 CEMA (通道电子倍增系统) 上成象。试样的结构、取向和成分的不均匀,或试样表面局部有污染物或覆盖物,均会造成正电子再发射率的变化,从而在象上引起衬度。晶体中的缺陷(例如位错、空位或晶界等)能捕获正电子,在象上显示出衬度。

1984 年,美国橡树岭国家实验室的 L. Hulet 等人<sup>[2]</sup>,首先提出了正电子再发射显微镜的设想。1988 年 Michigan 大学的 J. Van House 和 A. Rich<sup>[3]</sup> 建造了一台反射式正电子再发射显微镜 (RPRM),它的正电子源为 40mCi Na-

22, 采用一级钨慢化器增强亮度,入射正电子束的能量为 2keV,束流密度为  $2 \times 10^{-10}$  A/cm<sup>2</sup>,束斑直径为 2.5mm (相应的束通量为  $5 \times 10^5$  e<sup>+</sup>/s),分辨率为 2 $\mu$ m,放大率为 55 倍。在 RPRM 中,再发射正电子是从入射表面发射的,因此它对试样厚度没有限制。改变入射正电子束的能量,可控制正电子束注入样品的深度,从而可以研究表面层结构特点的深度分布。这是 RPRM 的一个突出优点,它对半导体器件的研究有很大意义。但是,由于正电子束从侧面入射到试样上,使成象透镜不能更靠近试样,这就限制了分辨率。同一时期,美国 Brandies 大学的 G. Brandes 和 K. Canter 与 Bell 实验室的 A. Mills<sup>[4]</sup> 合作,建造了一台透射式正电子再发射显微镜 (TPRM),正电子源为 80mCi Co-58,采用二级钨慢化器增强亮度,入射正电子能量为 5keV,样品上的束流密度为  $3 \times 10^{-10}$  A/cm<sup>2</sup>,束斑直径为 20 $\mu$ m (相应的束通量约为  $10^4$  e<sup>+</sup>/s),分辨率为 0.3 $\mu$ m,放大率为 1150 倍。在 TPRM 中,正电子从试样背面射入,再发射正电子从试样正面射出。因此,试样厚度需适当,它应足够薄,使正电子能穿过,又需足够厚,使入射正电子能被热慢化。同时,要求试样有较好的正电子再发射性质。J. Van House 等用 RPRM 在 W 和 Mo 中,观察到辐照缺陷引起的衬度,并拍摄了人的头发丝的 PRM 象。G. Brandes 等用 TPRM 在 150nm 厚的 Ni 膜中,观察到晶界引起的衬度。由于