圆锥复数及其在物理学中的应用

田 巨 平

（江 汉 石 油 学 院）

圆锥复数是一种泛复数，由它可以非常方便地导出伽里略变化、洛伦兹变换和欧几里得变换，以及相应的速度变换规律，而这些规律分别是研究低速运动、高速运动和超光速运动的基础．下面简要地介绍圆锥复数的性质及其在物理学中的应用．

考虑某虚单位 ω，它可用来定义泛复数

$$a=\alpha+\beta\omega, \tag{1}$$

这里 α,β 均为实数．若ω分别取 i,j,k 且满足以下诸式

$$a=\alpha+\beta i \quad (i \text{ 满足 } i^2+1=0), \tag{2}$$

$$a=\alpha+\beta j \quad (j \text{ 满足 } j^2-1=0), \tag{3}$$

$$a=\alpha+\beta k \quad (k \text{ 满足 } k^2=0), \tag{4}$$

我们把(2),(3),(4)式的 a 分别称为椭圆数(简记为 C)、双曲数(简记为 H)和抛物数（简记为 P)，并统称为平面泛复数或圆锥复数．

同复数一样，有

$$\alpha=\mathrm{Re}a, \quad \beta=\mathrm{Im}a, \tag{5}$$

$$\bar{a}=\alpha-\beta\omega. \tag{6}$$

称 $\bar{a}$ 是 a 的共轭元．显然，$a\bar{a}$ 是实数．若两个非零泛复数 a 和 $b=\nu+\delta\omega$ 满足 $a\cdot b=0$，我们就说 a 和 b 共轭或相伴零因子．

圆锥复数可作加减乘除运算

$$(\alpha+\beta\omega)\pm(\nu+\delta\omega)=(\alpha\pm\nu)+(\beta\pm\delta)\omega; \tag{7}$$

$$(\alpha+\beta\omega)(\nu+\delta\omega)=\begin{cases}(\alpha\nu-\beta\delta)+(\alpha\delta+\beta\nu)i, \\ (\alpha\nu+\beta\delta)+(\alpha\delta+\beta\nu)j, \\ \alpha\nu+(\alpha\delta+\beta\nu)k;\end{cases} \tag{8}$$

$$\frac{\alpha+\beta\omega}{\nu+\delta\omega}=\begin{cases}\dfrac{\alpha\nu+\beta\delta}{\nu^2+\delta^2}+\dfrac{\beta\nu-\alpha\delta}{\nu^2+\delta^2}i\,(\nu,\delta\text{ 不全为 }0), \\ \dfrac{\alpha\nu-\beta\delta}{\nu^2-\delta^2}+\dfrac{\beta\nu-\alpha\delta}{\nu^2-\delta^2}j\,(\nu\neq\pm\delta), \\ \dfrac{\alpha}{\nu}+\dfrac{\beta\nu-\alpha\delta}{\nu^2}k \quad (\nu\neq 0).\end{cases} \tag{9}$$

定义算符

$$\oplus=\begin{cases}+ & (C), \\ +0\times & (P), \\ - & (H),\end{cases} \tag{10}$$

则有

$$\omega^2\oplus 1=0, \tag{11}$$

$$(\alpha+\beta\omega)(\nu+\delta\omega)=(\alpha\delta-\oplus\beta\delta)+(\alpha\delta+\beta\nu)\omega, \tag{12}$$

$$\frac{\alpha+\beta\omega}{\nu+\delta\omega}=\frac{\alpha\nu\oplus\beta\delta}{\nu^2\oplus\delta^2}+\frac{\beta\nu-\alpha\delta}{\nu^2\oplus\delta^2}\omega. \tag{13}$$

a 的模定义为

$$|a|_M=\sqrt{|a\cdot\bar{a}|}=\begin{cases}\sqrt{\alpha^2+\beta^2} & a\in C, \\ \sqrt{\alpha^2-\beta^2} & a\in H, \\ |a| & a\in P.\end{cases} \tag{14}$$

记为

$$|a|_M=\sqrt{|\alpha^2\oplus\beta^2|}. \tag{15}$$

现在我们来看圆锥复数的指数形式

$$e^{\theta\omega}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\theta\omega)^n}{n!}=\begin{cases}\cos\theta+i\sin\theta & \omega\in C, \\ \mathrm{ch}\theta+j\mathrm{sh}\theta & \omega\in H, \\ 1+k\theta & \omega\in P,\end{cases} \tag{16}$$

$$a=\alpha+\beta\omega=re^{\theta\omega}=$$

$$=\begin{cases} r(\cos\theta+i\sin\theta) & \omega\in C,\\ r(\text{ch}\theta+j\text{sh}\theta) & \omega\in H,\\ r(1+k\theta) & \omega\in P.\end{cases}\tag{17}$$

(17)式称为广义欧拉公式．显然

$$\alpha=\begin{cases} r\cos\theta\\ r\text{ch}\theta\\ r\end{cases},\qquad \beta=\begin{cases} r\sin\theta\\ r\text{sh}\theta\\ r\theta\end{cases},$$

$$\theta=\begin{cases} \text{arctg}\,\dfrac{\beta}{\alpha} & \omega\in C\\ \text{arth}\,\dfrac{\beta}{\alpha} & \omega\in H\\ \beta/\alpha & \omega\in P\end{cases}.\tag{18}$$

圆锥复数亦有广义隶莫弗公式

$$a^n=r^n e^{n\theta\omega}$$

$$=\begin{cases} r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta) & \omega\in C,\\ r^n(\text{ch}n\theta+j\text{sh}n\theta) & \omega\in H,\\ r^n(1+kn\theta) & \omega\in P.\end{cases}\tag{19}$$

下面我们应用圆锥复数来导出伽里略变换、洛伦兹变换和欧几里得变换以及相应的速度变换．为此，考虑映射

$$z'=az,\tag{20}$$

其中

$$z=r+s\omega,\quad z'=r'+s'\omega,\tag{21}$$

$$|a|_M=1,\tag{22}$$

则有

$$a=\begin{cases} \alpha+\beta i=\cos\theta+i\sin\theta & \omega\in C,\\ \alpha+\beta j=\text{ch}\theta+j\text{sh}\theta & \omega\in H,\\ \alpha+\beta k=1+k\theta & \omega\in P;\end{cases}\tag{23}$$

$$\theta=\begin{cases} \text{arctg}\,\dfrac{\beta}{\alpha} & \omega\in C,\\ \text{arth}\,\dfrac{\beta}{\alpha} & \omega\in H,\\ \beta & \omega\in P.\end{cases}\tag{24}$$

因此，

$$\begin{cases} r'+s'i=(\cos\theta+i\sin\theta)(r+si),\\ r'+s'j=(\text{ch}\theta+j\text{sh}\theta)(r+sj),\\ r'+s'k=(1+k\theta)(r+sk).\end{cases}\tag{25}$$

比较(25)式中各式的实部和虚部，有

$$C:\ \begin{cases} r'=r\cos\theta-s\sin\theta,\\ s'=r\sin\theta+s\cos\theta;\end{cases}\tag{26}$$

$$H:\ \begin{cases} r'=r\text{ch}\theta+s\text{sh}\theta,\\ s'=r\text{sh}\theta+s\text{ch}\theta;\end{cases}\tag{27}$$

$$P:\ \begin{cases} r'=r,\\ s'=s+r\theta.\end{cases}\tag{28}$$

在抛物复数中，即在(28)式中，取 $r=t, r'=t', s=x, s'=x', \theta=v$，则

$$\begin{cases} t'=t,\\ x'=x+vt.\end{cases}\tag{29}$$

这就是伽里略变换．

在双曲平面上，即在(27)式中，取 $r=ct,\ r'=ct',\ s=x,\ s'=x', \beta/\alpha=v/c$，则

$$\begin{cases} t'=\dfrac{t+vx/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}},\\ x'=\dfrac{x+vt}{\sqrt{1-v^2/c^2}}.\end{cases}\tag{30}$$

这就是洛伦兹变换．

在椭圆平面上，即在(26)式中，取法同上，则

$$\begin{cases} t'=\dfrac{t-vx/c^2}{\sqrt{1+v^2/c^2}},\\ x'=\dfrac{x+vt}{\sqrt{1+v^2/c^2}}.\end{cases}\tag{31}$$

这就是欧几里得变换．

平面复数幅角相加的物理意义是平面力学中的速度合成．若二泛复数 $a_1=\alpha_1+\beta_1\omega$ 和 $a_2=\alpha_2+\beta_2\omega$ 的幅角分别为 θ_1 和 θ_2，而 $\theta=\theta_1+\theta_2$，则

$$\text{arctg}\,\frac{\beta}{\alpha}=\text{arctg}\,\frac{\beta_1}{\alpha_1}+\text{arctg}\,\frac{\beta_2}{\alpha_2}\quad \omega\in C,\tag{32}$$

$$\text{arth}\,\frac{\beta}{\alpha}=\text{arth}\,\frac{\beta_1}{\alpha_1}+\text{arth}\,\frac{\beta_2}{\alpha_2}\quad \omega\in H,\tag{33}$$

$$\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\beta_1}{\alpha_1}+\frac{\beta_2}{\alpha_2}\quad \omega\in P,\tag{34}$$

即

$$\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\beta_1/\alpha_1+\beta_2/\alpha_2}{1-(\beta_1/\alpha_1)(\beta_2/\alpha_2)}\quad \omega\in C,\tag{35}$$

$$\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\beta_1/\alpha_1+\beta_2/\alpha_2}{1+(\beta_1/\alpha_1)(\beta_2/\alpha_2)}\quad \omega\in H.\tag{36}$$

（下转第 702 页）

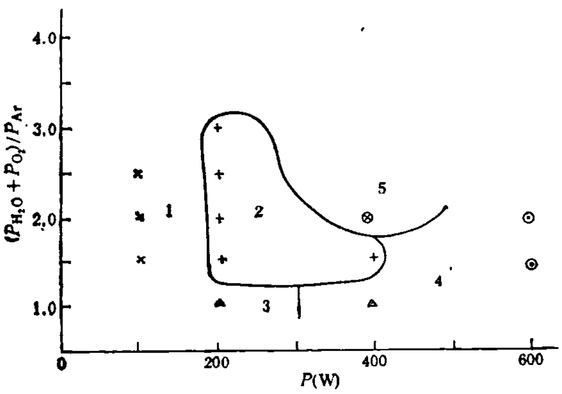
表 1

性能 / 类型	面电阻率 (Ω/□)	白光透过率 (%)	电子莫尔现象对空间分辨率影响	和光电阴极相容特性	表面处理难易
无序走向金属网络	<1	>75	无	可和各种S型光电阴极相容	易
热压金属网	<1	30—50	有	可和各种S型光电阴极相容	难
光刻正方形铬网	>20	40—50	有	可和各种S型光电阴极相容	易
钯金属薄膜	>40 (一般 100)	~30	无	可和各种S型光电阴极相容	易
二氧化锡膜	~50	~70	无	不能和含 Na 光电阴极相容	易
氧化铟锡膜	~10	>75	无	不能和含 Na 光电阴极相容	易

和动态性能. 它以后还将用于我们所研制的其他管型之中.

(中国科学院西安光学精密机械研究所
牛憨笨 王云程 杨勤劳 张济康)

(上接第 684 页)



$1.\alpha Fe_2O_3$; $2.Fe_3O_4$; $3.Fe+Fe_3O_4$; $4.Fe+\gamma Fe_2O_3$; $5.\alpha Fe_2O_3+Fe_3O_4+\gamma Fe_2O_3$

图 3 采用在溅射中加水蒸气的方法,生成氧化铁薄膜成分和工艺条件的关系

[1] S. Umeki et al., *IEEE Trans. Mag.*, **MAG-10** (1974), 655.
[2] 张凤杰,磁记录材料信息, No. 21(1989), 23.
[3] 刘文伯等,数字磁记录介质,科学出版社,(1987),14.
[4] M. Langlet et al., *IEEE Trans. Mag.*, **MAG-22**(1986), 151.
[5] C. Ortiz et al., *J. Mater. Res.*, 3-2(1988), 344.
[6] Y. Mitsuya et al., *IEEE Trans. Mag.*, **MAG-23**(1987), 2674.
[7] Y. Hoshi et al., ibid, **MAG-21**(1985), 1459.
[8] Z.-J. Zhou et al., ibid, **MAG-22**(1986), 597.
[9] K. Tagami et al., *IEEE Trans. Mag.*, **MAG-17**(1981), 3199.
[10] H. Ouchi et al., ibid, **MAG-19**(1983), 1980.
[11] S. Hattori et al., ibid, **MAG-15**(1979), 1549.
[12] Y. Ishii et al.,ibid, **MAG-16**(1980), 1114.
[13] T. Takagaki et al., ibid, **MAG-23**(1987), 3420.

(上接第 692 页)

应用 $\beta/\alpha=v/c$ 和(34),(35)和(36)式, 得

$$P:\quad v=v_1+v_2, \tag{37}$$

$$C:\quad v=\frac{v_1+v_2}{1-v_1v_2/c^2}, \tag{38}$$

$$H:\quad v=\frac{v_1+v_2}{1+v_1v_2/c^2}. \tag{39}$$

以上三式就是三种平面中的速度合成. 因当 $v>c$ 时(31)式仍然适用, 故称为超光速力学. 欧几里得变换构成的超光速力学叫做椭圆力学;洛伦兹变换构成的高速力学(但 $v<c$)叫做双曲力学; 伽里略变换构成的经典力学叫做抛物力学. 这三种力学我们统称为圆锥力学.

圆锥复数是数的扩充和拓广, 它与哈密顿四元数一样,在物理学中有着广泛的应用.

[1] R. P. Cilbert and C. Hile, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **195**(1974), 1—29.
[2] 熊锡金,武汉大学学报,**1**(1980)26—39;**4**(1981), 31—38.