

爱因斯坦对光辐射理论的重大贡献

李 树 春

(延安大学物理系)

爱因斯坦一生涉及的科学领域甚广,而且做出第一流的巨大贡献。其中对光辐射理论的创造性研究,就是卓著的贡献之一。本文就爱因斯坦在光辐射理论方面的主要研究成果作一回顾性分析。

一、光辐射量子假说的创立

十九世纪末,麦克斯韦的电磁理论使光的波动理论建立在更加坚实的基础上,但在黑体辐射问题上却遇到了不可逾越的障碍。1900年,普朗克大胆提出量子论假定,出色地解决了这个问题。不过,对1887年赫兹发现的光电效应又不能给以满意的解释。赫兹的着眼点是证实电磁波理论,所以他引不出新的见解来。但是,却吸引了许多科学家去探求这个现象的奥妙。W. 哈尔瓦克斯(W. Hallwachs, 1859—1922)发现用紫外线照射不带电的金属会带正电,证明有负电荷质点发射^[1]。1899年—1902年,赫兹的助手P. 勒纳德(P. Lenard, 1862—1947)对光电效应作了系统的研究,实验证明带负电质点的荷质比与电子相同,确认这是电子。同时,勒纳德还发现^[2]: 电子的初始动能与光强度无关,而与光频率有关;光强度只决定单位时间释放的电子数。电磁理论对实验结果的解释也遇到了困难。勒纳德实验对爱因斯坦有很大的影响,激起他钻研这个问题的兴趣。当时,他任伯尔尼瑞士联邦专利局三级技术员,从1902年一直任职到1909年,这是他科学生涯中最富有创造性的时期。

爱因斯坦早期着力于热力学和统计物理学的研究。他从1901年开始,在德国《物理学杂志》上接二连三发表有重要意义的热力学和统

物理

计物理学方面的研究论文。这些论文反映出爱因斯坦十分精通统计物理方法,在完全不知道吉布斯工作的情况下,推广和发展了玻耳兹曼的思想,为统计物理学的发展做出了重大贡献^[3]。由于统计物理与量子理论有着密切的关系,所以爱因斯坦的工作为以后建立辐射量子论奠定了理论基础。

1905年是爱因斯坦才华横溢、成果累累的一年。他在物理学的几个不同领域同时展开研究,且屡有建树。在德国《物理学杂志》17卷上发表了具有划时代意义的三篇论文,每篇论文都足以使他留芳百世。物理学家M. 玻恩(M. Born, 1882—1970)指出,这是整个科学文献中最不平常的书卷中的一卷,这三篇论文的每一篇都被公认为名著,并且是物理学分支的生长点。其中在《关于光的产生和转化的一个启发性观点》的论文里第一次提出光辐射量子假说^[4],这是他研究辐射量子论的开端,自称为“非常革命的”一篇。他尽量避免复杂的数学,用简洁的语言揭示出问题的实质。

爱因斯坦看到麦克斯韦的电磁理论描述光的干涉、衍射等光学现象“是十分成功的,似乎很难用任何别的理论来替换”。但是,当应用到光与物质相互作用时,却“导致和经验相矛盾”。爱因斯坦认为麦克斯韦理论存在着三个缺陷:(1)这是一个连续函数的理论;(2)仅对时间平均值的光学测量结果是有效的,对瞬时值的测量发生了矛盾;(3)对纯粹的光学现象是正确的,对光与物质的相互作用是矛盾的。

同时,爱因斯坦也看到普朗克量子论对黑体辐射是成功的,但对光电效应等现象却不能解释,说明普朗克理论也有局限性。他认为,普朗克只考虑了黑体空腔器壁上的谐振子是能量

量子化的，而腔内的辐射场仍是麦克斯韦的连续电磁场，是非量子化的。这充分暴露了普朗克量子论是一个不彻底的量子理论。

爱因斯坦在以上两种理论的困境中看到了矛盾的根源，决定以牺牲麦克斯韦的连续场为代价，弥补普朗克理论的不足，建立了彻底的量子理论。他在这篇论文中以理论物理学家的胆识，大胆地提出一个卓越的假说：“在我看来，如果假定光的能量不连续地分布于空间，那么，我们就可以更好地理解黑体辐射、光致发光、紫外线产生阴极射线及其它涉及光的发射和转换的现象的各种观测结果”。根据这种假设，能量“是由一个数目有限的局限于空间中的能量子组成，它们在运动中并不瓦解，并只能整个地吸收或发射。”爱因斯坦称这种能量子为光量子。1926年，美国化学家路易斯(G. N. Lewis, 1875—1946)将光量子定名为光子。爱因斯坦突破经典物理学的束缚，在发现电磁场的40年后，首先把场量子化，堪称光辐射量子论的先驱者。

爱因斯坦进一步引入辐射熵，从维恩辐射公式出发，用统计物理的方法，导出了光量子能量的表示式，使其定量化。他由此得出一个结论：“能量密度小的单色辐射(在维恩辐射公式有效的范围内)，从热学方面看来，就好像是由一些互不相关的，大小为 $R\beta\nu/N$ 的能量子所组成。”这里，爱因斯坦未用普朗克常数 h ，这不仅仅是形式的差别，而反映了他的思路与普朗克不同。他是以一定的物理含义引出的，使普朗克常数具体化了，而普朗克则是把它作为一个经验常数而引入的。

爱因斯坦紧接着用光量子假说对斯托克斯的光致发光定则、光电效应和紫外线对气体的电离作用的实验结果进行分析，都得到了简洁而完美的解释。尤其是对十多年来使物理学家困惑的光电效应问题，他按能量守恒原理得到著名的爱因斯坦方程，给出了最精辟的解释。同时，爱因斯坦预言截止电位对光频率的函数“必定是一条直线，它的斜率与所研究的物质的性质无关。”为此提供了验证光量子假说真伪的

实验方案。这一项工作是由物理学家密立根(R. A. Millikan, 1892—1962)完成的^[5]。他经过多年的精心实验，于1916年发表了五页篇幅的论文，精确地证实了爱因斯坦方程的基本关系，并确证了爱因斯坦的预言，他测定的普朗克常数与用其它方法所测定的相符合。他由此而感慨地说：“我用了我生命中的十年来检验爱因斯坦1905年的方程，同我的全部期望相反，我不得不在1916年宣称它已得到毫不含糊的实验证实，尽管由于它似乎违反了我们所知道的关于光的干涉的每一件事而显得是不合理的。”他还认为这个方程的“重要性跟麦克斯韦方程并列。”由此，他们都获得不同年度的诺贝尔奖金物理学奖。

爱因斯坦光量子假说的又一成功是对比热与温度关系的解释。1819年法国物理学家杜隆(P. L. Dulong, 1785—1838)与珀替(A. T. Petit, 1791—1820)发现一切固体的克分子比热都有相同的值，由玻耳兹曼能量均分定律直接解释了这个结果。但是，1872年德国物理学家韦伯(W. Weber, 1804—1891)测出金刚石等固体的克分子比热较杜隆-珀替定律的测定值低的多，尤其在极低温度下，比热都趋于零，引起人们极大的兴趣，也引起爱因斯坦的关注。他在1907年发表题为“普朗克的辐射理论和比热理论”的论文中用辐射的量子论阐明了低温下比热与温度变化的关系。德国物理学家能斯特(W. Nernst, 1864—1941)花了近三年的时间进行实验，证实了爱因斯坦的论断。爱因斯坦高兴地说：“把一切有关的结果都从理论蒙昧状态中解脱了出来。”这样，比热量子理论，同样成为坚强的量子论支柱，又开辟了光辐射量子论新的应用领域。

二、光辐射波粒二象性的证明

爱因斯坦的光量子说提出后，在物理学界引起的反响一是怀疑，二是反对。洛伦兹(H. A. Lorentz, 1853—1928)认为“那是绝对不可能的”。就连量子论的创始人，对相对论表示热

烈支持的普朗克也持反对态度。1913年,普朗克推荐爱因斯坦为德国普鲁士科学院院士时,认为爱因斯坦在思辨中迷失了方向。1923年,康普顿在解释X射线散射实验遇到困难时,不得不求助于光子动量表示式,才打消了对光子的怀疑。该实验也就成为光量子论的确凿证据之一,使一些物理学家开始改变了看法。

人们为什么这样难以容忍光量子的存在呢?除与人们的传统观念有关外,其主要原因是光量子还不能占有支持电磁理论的实验事实。爱因斯坦为电磁理论的成功而赞叹,并给于高度评价,他说:“这些方程的提出是牛顿时代以来物理学上一个最重要的事件,这不仅是因为它的内容丰富,而且它构成了一种新型定律的典范”^[6]。可他把光量子论又称为“非常革命的。”这时,爱因斯坦看到用单一的理论不能说明光的行为,他意识到光辐射用波动和粒子两种描述的重要性。在1905年的那篇光量子论文中,爱因斯坦的这种思想已反映出来。正如美国物理学家、诺贝尔奖金物理学奖获得者赛格雷(Emilio Gino Segre, 1905—)对这篇论文的评价^[7]:“我认为,这篇论文是物理学最伟大的著作之一……进而揭示了光的双重性质——波粒二象性。这一发现与相对应的物质二重性,成了二十世纪最伟大的成就。”的确如此,爱因斯坦在肯定电磁理论的同时,从全局出发,运用普遍的统计方法,着手解决理论基础问题,最后引出了光量子结果。

我们知道,爱因斯坦是以解决基本问题和普遍问题为主要着眼点,这次同样体现了这种精神。爱因斯坦看到根据电磁理论建立的瑞利-金斯公式在低频高辐射密度下成立;根据统计力学理论建立的维恩公式在高频低辐射密度下成立。他精明地沿着维恩的道路继续研究,得到了光量子的结论,这实际上创造了显示光量子存在的条件,所以结论是客观的、真实的。他从两种理论权衡对比中,萌发了有重大意义的二象性概念。这种概念是逐步形成的,爱因斯坦为此而锲而不舍,最后终于有了新的突破,从理论上证明了他的想法。

物理

1908年末,爱因斯坦发表了《论辐射问题的现况》的论文,他通过探讨辐射腔中的能量涨落问题,第一次明白地证明辐射的波粒二象性,创造了微观领域中的一个最基本概念,为辐射理论的发展又树起一个丰碑。爱因斯坦运用研究布朗运动的方法和热力学的基本性质,利用普朗克公式导出在黑体辐射容器的一子区域 ΔV 内,由于辐射的进出引起在频率 ν 处 $\Delta\nu$ 范围内能量 E 的方差涨落为^[8]

$$\overline{(\Delta E)^2} = h\nu \cdot \bar{E} + \frac{1}{Z} \bar{E}^2,$$

其中, $Z = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \Delta V \Delta\nu$, c 为光速, h 为普朗克常数,这就是爱因斯坦涨落公式。公式右边两项反映了各自独立的涨落机制。爱因斯坦证明,如果腔内只有能量子组成,那么可导出公式右边第一项;如果腔内的辐射场看作纯电磁波组成,那么辐射场在子区域中可看作发生波之间的短时干涉效应,有干涉相长和相消的存在,利用简单的量纲理论可导出公式右边第二项。1912年,洛伦兹用长达六页的详细计算验证了这个结果。由此可见,对于统计的平均现象,光表现为波动;对于瞬时的涨落现象,光表现为粒子,进而从理论上深刻揭示了光辐射的波粒二象性。另外,爱因斯坦在同一篇论文中通过分析黑体辐射中动量的涨落,为波粒二象性提供了另一个很好的证明。

值得注意的是,在上述的证明中,若利用维恩公式,则只能得到反映光量子引起的涨落公式;若利用瑞利-金斯公式,只能得到电磁波引起的涨落公式。这意味着普朗克公式已隐含着波粒二象性的内涵,进一步证实了爱因斯坦在1906年所作的准确判断。1906年,他在《光的产生和吸收》的论文中^[9],论证了光量子假说与普朗克量子论之间的内在联系,他指出光量子假说“不违反普朗克的辐射理论;相反,在我看来,这表明,普朗克先生在他的辐射理论中给物理学引进一个新的假设性元素——光量子假说。”

1909年9月,爱因斯坦在德国自然科学家

第 81 次大会上,他发表《论我们关于辐射的本质和组成观点的发展》的演讲,反映出他的波粒二象性思想日臻成熟,他很有远见地指出:“我的意见是理论物理发展的下一阶段将给我们带来一种可以认为是波动论和发射论相结合的理论……,我们对光本性和结构的观点深刻改变是不可避免的。”他明确地预示了光辐射的二象性是辐射理论发展的必然趋势。

十多年后,爱因斯坦进一步把波粒二象性推广到理想气体分子。1924 年夏,爱因斯坦收到了印度物理学家玻色(S. N. Bose)寄来的论文《普朗克定律和光量子假说》,他看出其中的重要意义,而后推荐给德国《物理学杂志》主编,并附上意见^[10]:“在我看来,玻色对普朗克公式的推导意味着一个重要进展。这里所用的方法也得出我在别处阐述的关于理想气体的量子理论。”玻色论文发表后,没过几天他向普鲁士科学院提交了《单原子理想气体的量子理论》论文,在 1925 年 2 月又发表了同样题目的论文。他把玻色的方法推广到单原子分子组成的理想气体,开拓了波粒二象性的研究领域。他的先导性工作对后来的费密统计法起了很大的推动作用。

爱因斯坦的理论给以法国物理学家德布罗意极大的启示,他晚年回忆说^[11]:“1923 年,我蓦然想到:爱因斯坦在 1905 年所作出的发现,应当加以推广,把它扩展到一切物质粒子,特别是电子。”1924 年 11 月,他向巴黎大学提交的论文《关于量子理论的研究》中有创见性地提出物质波假说。他的论文经评审人朗之万(P. Langevin, 1872—1946)转给爱因斯坦,爱因斯坦十分赞赏:“已揭开了巨大帷幕的一角”,他相信德布罗意的物质波与他的理论之间有着内在的联系。在爱因斯坦的建议下,物理学家薛定谔(E. Schrödinger, 1887—1961)对德布罗意假说仔细研究后,在短短的几个月之后,推广了德布罗意的理论,建立了近代量子力学的一种形式,称为波动力学。不难看出,爱因斯坦是当之无愧的量子力学奠基人之一。

三、受激辐射的提出

1914 年,爱因斯坦从瑞士迁居柏林,任柏林大学教授,在这期间他集中精力研究广义相对论。到了 1916 年他又回到辐射问题上,这时辐射理论已有很大发展,尤其玻尔的量子辐射理论对他的启发很大,在他看来,玻尔理论“是一个奇迹”,是思想领域内“最和谐的形式”。

1913 年,丹麦物理学家玻尔以批判旧观念的勇气,抛弃了经典辐射理论发射和吸收模式,运用普朗克的量子论,吸收卢瑟福原子结构的合理部分,根据描述光谱规律的巴耳末(J. J. Balmer, 1825—1898)的经验公式,实现了一次不小的物理综合^[12]。他创造性地提出量子化的有核原子模型,摆出一个辐射新格局,提出“定态”和“跃迁”两个全新概念,解决了原子的稳定性和光谱实验结果。但是,这个模型仍有经典物理学的影子,也没有涉及原子跃迁的详细过程和所遵循的规律,发光机制依然玄妙莫测。由于玻尔对爱因斯坦的光子有反感,所以他不会给出更深刻的认识,爱因斯坦对此作了深入的研究。

爱因斯坦于 1917 年发表了两篇辐射方面的论文:《按照量子论辐射的发射和吸收》和《关于辐射的量子理论》。这是对量子辐射理论的系统总结,后一篇^[13]中明确阐述了玻尔还不完全清楚的能量和动量交换的基元过程和跃迁的详细机制,第一次预言了受激辐射的存在和光放大的可能性。他认为这篇论文是“过去我这个领域中最成功的东西”。爱因斯坦首先从能量交换的角度,把经典电磁理论的已知关系变为用未知的量子论语言描述,从中引出意想不到的受激辐射新概念,进而发展和完善了玻尔的量子辐射理论。爱因斯坦用类似放射性蜕变的实验结论,并作了适当修正后,解释了自发辐射过程。对于在外界辐射作用下的辐射,按照经典辐射理论,这是辐射场对谐振子做功,使其作受迫振动,从而改变谐振子的能量。由于辐射场与谐振子之间的位相关系,这种功可正

可负。爱因斯坦巧妙地用量子论的语言表达了上述过程：在外界光子的作用下，若是正功，分子（当作谐振子）从低能态跃迁到高能态，分子吸收能量，这就是受激吸收辐射过程；相反，若是负功，分子从高能态跃迁到低能态，分子释放出一定能量的光子，这就是受激发射辐射过程，即受激辐射的机理。这类辐射是玻尔等人完全没有想到的。这是爱因斯坦天才地运用功能原理，用量子论改造经典物理的典范，充分体现了爱因斯坦惊人的洞察力和超人的思辨能力。另外，他在理论分析中，取消了跃迁过程的因果描述，引入跃迁几率的崭新概念，为决裂旧观念迈出了可贵的一步，这种决裂程度要比相对论还要彻底。他自己也说：“科学不能仅仅在经验的基础上成长起来，在建立科学时，我们免不了要自由创造概念，可以后验地用经验方法来检验。”

爱因斯坦用能量分析之后想到，能量转移的同时，总伴随着动量的传递，他第一次从这个角度探讨辐射问题，这又能引出什么样的结果呢？受激吸收时在辐射的传播方向上传递给分子的动量为 $(\epsilon_m - \epsilon_n)/c$ ；在受激辐射时，传递给分子的动量相等，但方向相反。这里隐藏着一个很重要的物理思想：当入射光子碰撞分子而受激辐射时，将辐射出与入射光子频率相同（能量相同）、方向一致（动量相同）的光子。进去一个光子，出来两个全同光子，这就是光放大的机制。这种潜在的光放大原理的推出，是前所未有的。

爱因斯坦提出受激辐射之后，他又提出一个创造性的假说：在每一个单位时间内，吸收跃迁平均发生的次数应当等于自发跃迁和受激跃迁的次数之和。在此基础上，以十分简练的量子化的普遍方式推导出著名的普朗克公式，作为受激辐射理论无可置疑的佐证。如果不考虑受激辐射跃迁，则只能得到维恩公式，这充分反映了受激辐射在量子辐射中必不可少的存在价值和地位。在上述的推导中，还意外地得到两个极其重要的结论：（1）玻尔的量子跃迁条件 $(\epsilon_m - \epsilon_n = h\nu)$ 成为顺理成章的推论（玻尔把

量子跃迁条件是作为基本假说之一提出来的），无可争辩地显示了受激辐射的深刻含义。（2）导出一个自发跃迁与受激跃迁的几率比值关系，这在量子辐射理论发展和激光器的研制中起到十分重要的理论指导意义。

爱因斯坦理论的又一应用是十分明确地解释了“热辐射能量的波长分布曲线同麦克斯韦速率分布曲线之间形式上的类似性。”维恩虽然注意到这种类似性，但没有证明。爱因斯坦通过全量子化的方式，利用基元过程的可逆性，使麦克斯韦分布曲线与普朗克公式协调一致，进一步坚定了爱因斯坦对光量子理论的信心。

受激辐射的提出，对爱因斯坦来说，当时并没有想到有什么实际应用，但客观上为微波激射器和激光器的研制奠定了理论基础，对量子电子学的诞生和应用技术领域的开发有着不可估量的深远意义。遗憾的是，这个理论沉默 30 多年后，在爱因斯坦逝世（1955 年）的前一年才被用于微波放大，1960 年产生第一台激光器。这是理论远远超前应用的一个史例，有一点需要说明的是，在受激辐射理论提出后，受到科学家的冷遇，甚至遭到量子辐射理论创始人之一玻尔的反。玻尔认为，要实现受激辐射，必须使系统处于负绝对温度之下，这是不可能的，还认为，在同一光源里产生完全相干波也是不可能的^[4]。为此，他们之间进行了争论，从而增强了科学家对这一理论意义的理解，促进了辐射理论的发展。正像赛格雷所说^[5]：“爱因斯坦设法撩开了掩饰现象之面纱一角，他 1917 年的几篇论文洞察了其中的奥妙，为现代理论树起了一个里程碑。”

爱因斯坦对光辐射理论的重大贡献，不仅使人类对光本性的认识发生了根本性变革，而且为量子理论乃至现代物理学的建立奠定了牢固的基础。可这只是爱因斯坦在许多重大科学领域中的一个研究方向。

[1] M. H. 沙摩斯著，史耀远等译，物理史上的重要实验，科学出版社，（1985），208。

[2] M. V. 劳厄著，范岱年、戴念祖译，物理学史，商务印书馆，（1978），123。

（下转第 760 页）

系际介质。这种热星系际介质今天的温度约为 $4 \times 10^4 \text{K}$ ，与在我们周围观测到的漫 X 射线背景的视温度接近。这种设想的星系际介质的热电子将与宇宙微波背景光子发生康普顿散射并使之升高到更高能量。这一模型中，描述最后得到的黑体谱畸变的是无量纲的“康普顿化参数” y 。只有当星系际介质中自由电子密度和温度均很高时 y 才是不可忽略的。FIRAS 的观测结果已给出了 y 的上限值仅为 0.001。这就排除了热星系际介质是漫 X 射线背景源的可能。

在 FIRAS 积累更多数据并对其校准更好了解之后，最终可能发现微波背景与黑体谱小到千分之几的偏离。如果真的发现了这种偏离，就可以提供从复合到第一颗类星体出现之间宇宙演化的真实线索。

除短波长方向的畸变外，在几毫米波长以上也可能出现与黑体谱的偏离。这种长波上微波背景谱的畸变将告诉我们从大爆炸一年后直到复合时期宇宙的情况。这一时期，光子自由程还不长但已没有光子的大量产生和吸收。如果这段期间内电子被某种过程再加热，它将与光子分享这些能量。由于没有机制大量产生光子，建立起的光子热平衡分布将不是理想黑体

谱。在今天我们观测到的将是一化学势不为零的玻色-爱因斯坦分布。再加热电子的特殊热源可能是扩展等离子体湍动的耗散或某些未知粒子的衰变等。FIRAS 观测的资料表明没有任何这类东西。长波数据与普朗克谱一致给出了化学势 μ 的上限值为 0.009。

COBE 上还装载着另外两个探测宇宙微波背景的仪器，微分微波辐射计 (DMR) 和漫红外背景实验 (DIRBE)。目前，这两个仪器的观测比 FIRAS 还更处于初步阶段。DMR 是设计来观测微波辐射强度在不同方向上的变化。它的分辨率为 7° ，因而观测的主要是在空间相距很大尺度方向上微波强度的变化。初步观测表明，除了由于我们星系相对于微波背景的运动而由多普勒效应产生的偶极不对称外， $\Delta T/T$ 在各方向上的差别小于 10^{-4} 。最终，DMR 可以探测到不同方向上背景辐射温度在 10^{-5} 量级上的相对变化。把这些变化归算为 4 极矩、8 极矩等，可以直接检验暴涨宇宙学模型。因为暴涨大爆炸宇宙模型预言了微波背景的 4 极矩、8 极矩和 16 极矩之比值。

(邓祖淦根据 *Physics Today* 1990 年第 3 期第 17—20 页编译)

(上接第 751 页)

- | | |
|---|--|
| [3] 王竹溪, 自然杂志, 2(1979), 73. | 725. |
| [4] 范岱年等译, 爱因斯坦文集 (第二卷), 商务印书馆, (1979), 37. | [9] 同[4], 130. |
| [5] G. L. 特里格著, 尚惠春、王罗禹译, 现代物理学中的关键性实验, 科学出版社, (1983), 74. | [10] 同[4], 398. |
| [6] A. 爱因斯坦、L. 英费尔德著, 周肇威译, 物理学的进化, 上海科学技术出版社, (1962), 102. | [11] 中国科学院自然科学史研究所近现代科学史研究室编著, 20 世纪科学技术简史, 科学出版社, (1985), 54. |
| [7] 埃米里奥·赛格雷著, 夏孝勇等译, 从 X 射线到夸克, 上海科学技术文献出版社, (1984), 95. | [12] 朱荣华编, 物理学基本概念的历史发展, 冶金工业出版社, (1987), 297. |
| [8] 申先甲等编, 物理学史简编, 山东教育出版社, (1985), | [13] 同[4], 335. |
| | [14] 徐启阳, 物理, 9(1980), 47. |
| | [15] 同[7], 105. |

(上接第 758 页)

- | | |
|---|--|
| [16] Ochi Toshihiko et al., 10th International Workshop on Rare-Earth Magnets and Their Application Proceedings Book, Japan, (1989), 196. | (1984), 4334. |
| [17] H. Oestterreicher et al., <i>J. Appl. Phys.</i> 55 | [18] S. kouvel et al., <i>Phys. Rev.</i> , 136A(1964), 1626. |
| | [19] 前田弘等, 日本金属学会誌, 47(1983), 683. |
| | [20] 前田弘等, 日本金属学会誌, 47(1983), 688. |