分形研究中的复分形概念

丁菊仁　柳百新
（清华大学材料科学与工程系）

本文介绍了分形研究领域近几年提出的复分形概念及复分形研究的新进展，对 f-α 谱的计算方法及物理意义也作了较详细的阐述.

近几年来，分形现象得到了物理学界普遍的关注，各国物理学家从实验和理论模型二个方面对分形现象进行了广泛而深入的研究[1-4]. 有关分形现象研究结果的报道也日趋增多. 电解淀积、电解质击穿、固体薄膜中非晶态到晶态的相变过程、凝胶等是分形研究常常使用的手段，而计算机模拟则是进行模型研究的主要手段. 目前，有两个主要的模型：其一为 DLA 模型[5]，即扩散控制的聚集模型（diffusion limited aggregation model)；其二是 NPW 模型[6]. 前者是一个几何模型，而后者是一个物理模型(考虑能量最低原则). 在这两个模型基础上又发展了一系列适用于各种具体物理系统的模型，在此就不一一赘述了.

描述分形的一个主要物理量是 Hausdorff 维数. Hausdorff 维数的定义是

$$M \propto r^{D}, \qquad (1)$$

其中M是半径为 r 的圆(或球)内分形面积（或体积)，D是 Hausdorff 维数. 虽然D值能在一定程度上反映一个分形的特点，但是仅用一个 Hausdorff 维数是不够的，因此人们发展了复分形的概念[7]，用以更详细地描述分形及其生长过程的特点. 本文的目的就是简单地介绍复分形（multifractal）的概念.

复分形考虑的问题，是分形的生长过程. 分形表面上的每一点都具有一定的生长几率，不同点的生长几率有很大的差异. 有些点的生长几率非常大，有些点的生长几率非常小，趋于零. 因此，生长几率分布是一个有层次的结构，不能简单地用一个维数来描写，而是需要用无穷多个维数来描述. 对应于每一个层次的生长几率，可以用一个维数来描述，再用另外一个量来描述这一层次在总的分布中所占的份量.

对分形表面的每一个点给定一个度量值 $P(\boldsymbol{x})$(measure)，这个度量值一般是指生长几率. 用许多线度为 ε 的小区覆盖整个分形表面，对第 i 个小区定义 $P_i(\varepsilon)=\sum P$（对整个小区的每一点求和). 从 $\{P_i(\varepsilon)\}$ 序列可以定义无穷多个维数：

$$D_q=\lim_{\varepsilon\to 0}(q-1)^{-1}\ln\left\{\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)}[P_i(\varepsilon)]^q\right\}\times(\ln\varepsilon)^{-1}, \qquad (2)$$

其中 $N(\varepsilon)$ 是覆盖整个分形表面所需要的线度为 ε 的小区数目.

显然，q 不同时，不同子集对 D_q 的贡献就不同，D_0 就是分形表面的 Hausdorff 维数，D_1 是信息维数，D_2 是相关维数. 对二维情形，假定分形本身的 Hausdorff 维数是 $D=5/3$，M. Matsushita 等人[8]已经证明

$$D_q=\frac{2}{3}+\frac{1}{q+2}\quad (q>1). \qquad (3)$$

定义标度指数 α 如下

$$P_i^q(\varepsilon)\sim\varepsilon^{\alpha q}, \qquad (4)$$

α 在分形表面不同的区域可以取不同的值. 假定 α 值在 $\alpha'\sim\alpha'+d\alpha'$ 之间的次数为

$$\rho(\alpha')\cdot\varepsilon^{-f(\alpha')}\cdot d\alpha', \qquad (5)$$

并且(2)式中令

$$x(q)=\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)}[P_i(\varepsilon)]^q, \qquad (6)$$

则由(5)，(6)两式可得

$$x(q)=\int d\alpha'\cdot\rho(\alpha')\cdot\varepsilon^{-f(\alpha')}\cdot\varepsilon^{q\alpha'}. \qquad (7)$$

因此，(2)式可写成

$$D_q = \frac{1}{q-1}\{q\alpha(q) - f[\alpha(q)]\}. \qquad (8)$$

如果知道 α 可取的值,并且知道 $f(\alpha)$,便可以计算出 D_q 值. 也可用下式求出 α:

$$\alpha = \frac{d}{dq}[(q-1)D_q], \qquad (9)$$

再代入(8)式,即可求出 $f(\alpha)$.

Shonosnke Ohta 等人[9]首次对真实物理系统中观察到的分形图形进行复分形分析,他们研究了 NH_4Cl 结晶过程的等级性质. 图 1 是不同时刻记录下的 NH_4Cl 结晶图形的重叠.

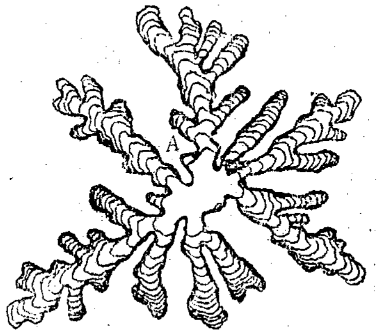

图 1 NH_4Cl 结晶中出现的分形图形

对分形表面上的每一点分别赋于下面三种生长几率:

(1) $P(\boldsymbol{r},t) \sim \rho(\boldsymbol{r},t+\Delta t) - \rho(\boldsymbol{r},t)$,其中 $\rho(\boldsymbol{r},t)$ 是图形的密度. 在 $\boldsymbol{r}$ 处有图形,则 $\rho = 1$; 在 $\boldsymbol{r}$ 处无图形,则 $\rho = 0$.

(2) $P(\boldsymbol{r},t) \sim |V_n(\boldsymbol{r},t)|$,其中 $V_n(\boldsymbol{r},t)$ 是在一个时间间隔内图形在每一点生长的垂直长度.

(3) $P(\boldsymbol{r},t) \sim |\nabla_n\phi(\boldsymbol{r},t)|$,其中$\nabla_n\phi(\boldsymbol{r},t)$ 是每一点的拉普拉斯场梯度值. 确定拉普拉斯场的方法是: 令分形图形本身为等势体 V_0,外围边界条件为等势体 V_1,然后用数值方法计算拉普拉斯场,外围边界尺寸大约是图形的三倍.

分别用上面三种生长几率计算得 D_q 值,图 2 为计算结果. 由 D_q 值进一步用(9)式计算出 α,再用(8)式计算 $f(\alpha)$. 图 3 为用第三种生长几率计算得到的 f-α 曲线. 由计算结果可知,二维 NH_4Cl 结晶过程确实是一个层次分明的过程,具有多标度性质. 为了更清楚地说明 α 的物理意义,比较图 1 中的 A, B 两点. A点的生长几率很小,相应的 α 值也很小; 而 B 点的生长几率很大,因此相应的 α 值较大. $f(\alpha)$ 是指取某一 α 值的点所占的份量.

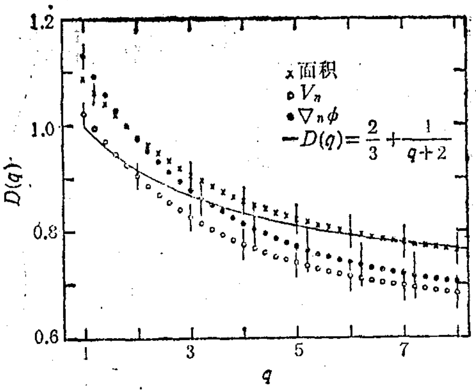

图 2 用三种生长几率计算获得的 D_q-q 曲线

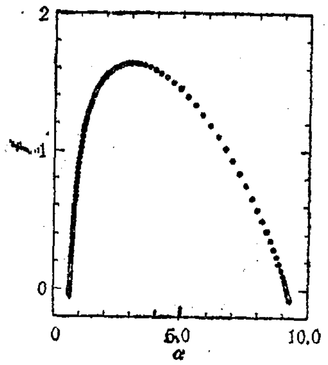

图 3 用第三种生长几率计算得的 f-α 曲线

[1] F. Family and D. P. Landau (eds.), Kinetics of Aggregation and Gelation, North-Holland, Amsterdam, (1984).
[2] H. E. Stanley and N. Ostrowsky(eds.), On Growth and Form, Nijhoff, the Hague, (1985).
[3] L. Pietronero and E. Tosatti(eds.), Fractals in Physics, North-Holland, Amsterdam, (1986).
[4] B. B. Mandelbrot, The Fractal Geometry of Nature, Freeman, San Francisco, (1983).
[5] T. A. Witten and L. M. Sander, *Phys. Rev. Lett.*, **47** (1981), 1400; *Phys. Rev.*, **B27**(1983), 5686.
[6] L. Niemeyer, et al., *Phys. Rev. Lett.*, **52**(1984), 1033.
[7] T. C. Halsey et al., *Phys. Rev.*, **A33**(1986), 1141.
[8] M. Matsushita et al., *Phys. Rev. Lett.*, **59**(1987), 86.
[9] S. Ohta, and H. Hanjo, *Phys. Rev. Lett.*, **60**(1988), 611.