混沌是不是有序的?

40 年前,爱因斯坦在给波恩的一封讨论有关量子理论几率解释的信中写道:"上帝不喜欢玩掷骰子游戏."说明爱因斯坦对运动中出现的随机性颇不以为然,他致力于寻找量子理论与决定论的经典力学之间的直接类比. 但在40 年后的今天,没有人会对甚至在经典的哈密顿系统中也存在着混沌现象感到惊奇.

混沌是在决定论系统中出现的明显的随机运动现象.简单说来,就是即使没有随机外力,在一定的外界和初始条件下,物理系统可以同时表现出决定论的运动和随机运动.混沌现象的发现,导致了对自然规律的新的认识.混沌现象对即使非常简单的物理系统也是不可避免的,而另一方面,混沌中又存在着惊人的有序.

复杂的混沌来自于系统的非线性,混沌的发生并不要求大量的自由度,例如在一定的初始条件下,被弹簧连接的两个摆,就会出现随机运动.从决定论到随机运动的转变,并不是一个陌生的概念.在流体中,层流随着流动速度的增加而成为湍流就是这种转变. 很久以来,湍流的转变被认为是与大量自由度的相互作用有关,而混沌完全可能只出现在仅有几个自由度的情况.

一、局域不稳定性

了解混沌现象的基础是局域不稳定性的概念. 一个系统的状态可以用相空间的点来表示,我们将系统所有可能初始态的集合看成是相空间中的一个"液滴",体系状态随时间的变化等价于相空间中液滴的运动.保守系满足刘维定理,也就是液滴在相空间中运动时可以产生变形,但保持体积不变.当液滴运动过程中只产生很小的变形时,这对应于稳定的动力学系统;如果最初为任意接近的两个相点,在相空间运动过程中很快分离,液滴形状就会发生很大变化,其边界成为很不规则的,这就是系统的局域不稳定性.如果我们在相空间中液滴的外面放进另一种颜色的"液体",局域不稳定性会使两种颜色的液体很快混合,混合的结果使在原来液滴所占有的相空间区域中,混进了大量的"气泡",对液滴所占有的区域作一个光滑的边界,这边界所包围的体积 $\Gamma(t)$ 与液滴最初的体积 Γ_0 相比,会很快地增长,这种增长具有指数形式:

$$\Gamma(t)=\Gamma_0^2\cdot\exp(ht), \tag{1}$$

其中增长率 h 被称为 Коломогоров 熵. 通常熵的定义为 $S=\ln\Gamma$,故量 h 决定了熵的改变率,且正比于局域不稳定性增长率的平均值,因而系统的熵实质上是与系统的稳定性有关的物理量.

熵 h 也可以从另外一个意义上去理解.如果我们用一定数量的符号构成一个符号序列,序列长度与所用符号个数并不需要成某种比例,若序列是周期的,则符号的个数不依赖于周期的长度.在给定的符号个数下,最复杂的序列是随机序列,这是由于序列中每次下一个符号的出现是不可预见的.在给定时间内,物理系统的状态序列也可以被看成是一个符号序列,系统的一个复杂轨道对应于一个不可预见的不规则序列,动力学系统的熵与符号序列的信息熵之间的这种相似性,给出了对随机过程不确定性的更深的认识.因而混沌轨道的复杂特征,与其说来自于它的不确定性,不如说来自于那样的事实:它的确定性要求描述一个相当长的复杂的符号序列.

在自然界中,几乎所有的实际系统都存在着一定的参数或初始条件区,在这些区域中,系统会出现混沌现象.当然,对有些系统,混沌可以是很弱的或被其他现象所掩盖;而另外有些系统,混沌所产生的区域在物理上是很难达到的.总之非线性系统的基本性质,导致了混沌产生的可能性.一个重要问题是究竟什么样的性

质孕育着混沌的可能性?

二、随 机 层

以周期外力作用下的非线性振子为例，来简述一下混沌发生的过程. 这一体系的运动方程为

$$\ddot{x}+\omega_0^2\sin x=\varepsilon\sin(kx-\Omega t),\quad(2)$$

式中 ω_0 是微振动的角频率，ε 是微扰参数，$2\pi/k$ 和 $2\pi/\Omega$ 是微扰的空间和时间周期. 当没有外力 ($\varepsilon=0$) 时，在振子运动的相平面 (x, $\dot{x}$ 平面) 上，存在着一条特殊的轨道，称为"分界线"，它经过不稳定的平衡点——鞍点，构成了相平面上两种不同类型轨道的边界 [图1(a)]. 分界线本身既不对应于振子的振动，也不对应于绕固定点的转动. 所以在相平面上的分界线附近的区域，对哪怕是非常小的微扰，亦将是十分敏感的. 有人证明[1,2]，在未受微扰的分界线附近，任意小的 ε 将导致相空间中振子作随机运动区域的产生，这区域称为随机层[图1(b)]，层的厚度随 ε 趋于零而趋于零.

随机层的存在是哈密顿系统的普遍性质. 典型的情况是相空间中存在着很多分界线，它们将相空间分成尺度不同的区域. 外加的微扰或不同自由度之间的相互作用破坏了分界线，使每个分界线成为随机层. 根据层的厚度和位置，它们可以连接成更大的随机运动区域，这区域被称为随机海. 所以随机层可以看成是哈密顿系统中混沌的萌芽. 对至少有两个自由度的非线性系统，随机层总是存在的，且为稳定的，也就是稍稍改变体系的参数，并不能去掉随机层. 凡初始条件属随机海的任何轨道，将通过海的每一点，即运动是遍历的，这种遍历的能力是上面所述混合过程的直接结果. 在随机海中存在一些稳定的岛，在这些岛中混沌轨道不能进入，岛中存在着准周期运动区. 混沌运动越强，岛越小，随机海所占有的相空间体积越大. 当微扰参数改变时，原有的岛开始分裂，并产生新的更小的岛，这过程被称为"分岔"(bifurcation)，对一个有混沌运动的系统，可以有无限多次分岔，每次分岔都将改变相空间的整体结构.

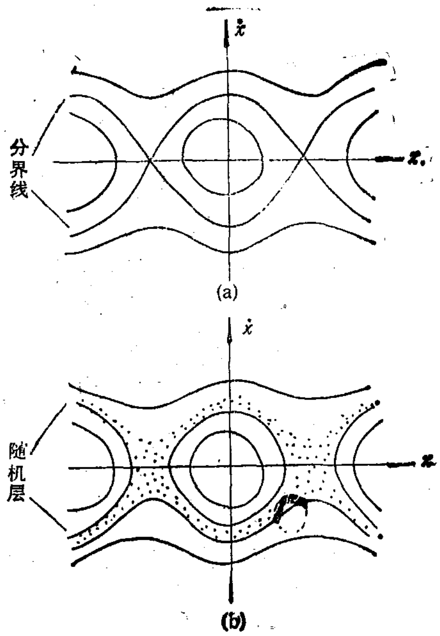

图 1 具有周期性外力的非线性振子的相图

研究与分岔过程相对应的微扰参数序列的一个有效的方法是重整化群理论[3].

从上面的简单分析不难看出，混沌运动是一个非常复杂的现象.

三、KAM 定 理

在相空间中稳定与不稳定轨道的共存，使哈密顿系统成为一个十分奇妙的体系. 对这种体系研究已取得重要进展，其中之一就是 KAM 定理. 这定理的主要目的是研究当一个可积的哈密顿量中存在微扰时，体系运动的稳定性问题. 假定没有受微扰的体系有 N 个自由度，是可积的，用哈密顿量 $H_0(I_1,\cdots I_N)$ 来表示，H_0 依赖于 N 个作用量 I_K，这些作用量可以被选为 N 个独立的运动积分. 在这种情况下，系统在相空间的轨道是周期性的，被约束在 N 维环面上，可以用 N 个角频率来表示:

$$\omega_K=\frac{\partial H_0(I_1,\cdots I_N)}{\partial I_N}\quad(K=1,2,\cdots N).\quad(3)$$

这样的环面称为不变环面.

将有微扰的哈密顿量表示成

$$H=H_0(I_1,\cdots I_N)$$

$$+\varepsilon V(I_1\theta_1;\cdots;I_N\theta_N),\qquad(4)$$

其中V是微扰势，ε是微扰参数，$\theta_K(K=1,\cdots N)$为角度变数．KAM 定理的基本结果是当ε很小且满足非共振条件时，由(4)式所描述的体系的大部分解依然是在不变环面上，而环面的形状与$\varepsilon=0$的情况相比，可能会略有改变．这个定理证明了相空间中稳定区的存在，且这稳定区的测度当$\varepsilon\to 0$时，接近于整个相空间的体积．在这样的区域，混沌不可能发生．但在相空间中可能存在 KAM 定理的条件不成立的区域，在这些区域中，有可能出现混沌，数值实验已证明了这一点．例如图 1 是受微扰振子的相图，其中不变曲线是环面的截面，而随机层则是被破坏了的环面的截面．

KAM 定理的重要结果之一是排除了在实际哈密顿系统中不存在“正规运动元”（即非随机运动）的绝对混沌的可能性，但可以存在这种情况，即正规运动元的测度小到可以忽略．

KAM 定理条件的破坏，会出现随机运动．对微扰很弱的情况，KAM 定理不适用的区域形成随机层，随着ε增长，这些层的厚度亦增长，相互之间的距离减小，当ε超过某值ε_c时，随机层互相连接，形成了随机海．随机海形成的条件被 Chirikov[4] 作为混沌产生的条件提出来，而 Greene[5] 给出了这个条件的更严格的形式．

四、随机网与 Арнольд 扩散

对$N>2$的系统，在$\varepsilon=0$的情况下，分界线的截面在整个相空间形成很复杂的结构，而当$\varepsilon\neq 0$时，这些分界线成为随机层，不管层的厚度多薄，粒子可以沿着这些结构之间的通道游动，这种现象被称为 Арнольд扩散，它表示了$N>2$系统的普遍存在的不稳定性，这种不稳定性对磁约束等离子体等问题有更为重要的意义．粒子在随机层之间的游动称为最小混沌，这个通道组织就称为随机网．

令人感兴趣的问题是最小混沌产生的最低维数是什么？Арнольд 给出的不等式$N>2$是不是一个极限不等式？换言之，对$N\lesssim 2$的体系是否存在随机网？这个问题直到最近才得到了回答．

KAM 定理是在一定条件下才成立的，条件之一是未受微扰的系统不存在共振条件，即

$$\det|\partial^2 H_0/\partial I_i\partial I_K|\neq 0.\qquad(5)$$

考虑到(3)式给出的频率的定义，这个条件意味着H_0是非线性的．如取消 (5) 式的限制，当$N=3/2$时，随机网的产生亦成为可能的．显然这是最低维数，因为对$N=1$，动力学系统是可积的，不可能出现混沌．

随机网的空间维数是分数，具有自相似的结构．例如，对某些体系，其随机网结构的形状类似于众所周知的 Koch 曲线．关于网的图形可以通过它的傅里叶谱来得到．这里我们遇到了一种新类型的有序，通过对它的研究，将有助于了解体系的新的自组织形式．

五、有待解决的问题

具有最小可能维数物理体系的随机网的存在，说明随机运动和决定论运动的动力学性质之间存在着很密切的联系．了解这种联系对许多物理问题，例如稳定性，从层流到湍流的转变，凝聚态中混沌的产生以及带电粒子的随机加速等，都有重要意义．

已经知道力学和电动力学方程可以同时描述随机运动和决定论运动，而这两者的结合是非常复杂的，很多有关的问题都有待解决，将这些思想应用于量子理论中是一个十分有意义的问题．目前在这问题上仅仅只迈出了第一步．

总之，在混沌问题的研究中，还存在着大量的需要探索的课题，这有待于物理学家和数学家的通力合作和不懈的努力．

[1] N. N. Filonenko et al., *Nucl. Fusion*, 7(1967), 253.
[2] G. M. Zaslavsky, N. N. Filonenko, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.*, 54(1968), 1590.
[3] J. M. Greene, et al., *Physica*, D3 (1981), 468.
[4] B. V. Chirikov, *Phys. Rep.*, 52 (1979), 263.
[5] J. M. Greene, *J. Math. Phys.*, 20(1979), 1183.

（张先蔚根据 Physics Today 1988 年第 11 期第 27—39 页编译）