实验的不确定度评定

李化平　　　　刘智敏

(北京科技大学应用物理系)　(中国计量科学研究院)

测量的不确定度是一个新的术语．现在国际上已普遍接受了«国际计量局实验不确定度的规定：建议书 INC-1 (1980)»．我国计量科学研究院也于 1985 年制定了不确定度的应用办法．本文综合介绍了测量不确定度的各种评定方法，并举例分析了频率测量和杨氏模量测量的不确定度计算方法．

根据定义，误差是指测量值和真值之差，这通常是无法知道的；而不确定度是表征被测量的真值在某个量值范围的一个评定，显然后者更能表示测量结果的性质，因此用不确定度取代误差来评价测量质量，在国外已普遍地被采用．中国计量科学研究院也在 1986 年发出不确定度应用办法的通知，规定：在基准标准研究中，在测量和检定工作中，应采用不确定度作为误差数字指标的名称；不确定度的评定应按国际计量局《实验不确定度的规定：建议书 INC-1 (1980)》[1] 计算．不确定度的大小，反映了测量结果可信赖程度的高低，不确定度小的测量结果可信赖程度高，反之则低．测量结果的不确定度，一般来源于测量装置、环境、测量方法、测量人的技术水平和测量对象变化的波动．我们分析测量不确定度时，对不确定度来源应尽可能做到不遗漏、不重复．若是遗漏了，则不确定度变小；重复了，则会增大．

测量不确定度是一个新的术语，它从根本上改变了以往将测量误差分为偶然误差和系统误差的传统分类方法．它在将可修正的系统误差修正以后，将余下的全部误差划分为可以用统计方法计算的（A 类分量）和其它方法估算的（B 类分量）两类误差，前者用估计方差 s_i^2（或估计标准差 s_i）来表征，后者用近似方差 u_j^2（或近似标准差 u_j）表征．若上述各分量彼此独立，则可用方差合成法求出合成不确定度的表征值：

$$\sigma = \sqrt{\sum s_i^2 + \sum u_j^2}.$$

将已修正的测量值按其测量的不确定度水平截取有效数字，合成不确定度可表示出 1 ～ 2 位．

总的不确定度可用极限误差表示：

$$U = c\sigma,$$

其中 c 为置信因子．考虑到测量不确定度是以正态分布为基本分布，故一般取

$$c = 2 \qquad (p = 0.95),$$
$$c = 3 \qquad (p = 0.99).$$

一、不确定度统计处理方法[2]

统计不确定度用标准差 s 及自由度 ν 表征，$\nu = n - t$，其中 n 为测定值个数，t 为待测量个数．n 越大，评定结果可信赖程度就越高．

1. 贝塞耳法

设对某一物理量作多次等精度独立测量，得 $x_1, x_2, \cdots x_n$，则

$$s_i = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$$

2. 最大残差法

设对某一物理量作多次等精度独立测量，得 $x_1, x_2, \cdots x_n$，残差 $v_i = x_i - \bar{x}$，则由 $\max|v_i|$ 分布，可求出测量列的标准差：

$$s_i = c_n |v_i|_{\max},$$

其中 c_n 的数值由表 1 查出．

3. 最大误差法

表 1

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20
c_n	1.77	1.02	0.83	0.74	0.68	0.64	0.61	0.59	0.57	0.51	0.48

表 2

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20
c'_n	1.25	0.88	0.75	0.68	0.64	0.61	0.58	0.56	0.55	0.53	0.49	0.46

表 3

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20
d_n	1.13	1.69	2.06	2.33	2.53	2.70	2.85	2.97	3.08	3.47	3.73

设对某量 a 作多次等精度独立测量，得 $x_1, x_2, \cdots x_n$，计算出 $|\Delta_i| = |x_i - a|_{\max}$，则由 $|\Delta_i|_{\max}$ 分布，我们可以得到

$$s_i = c'_n |\Delta_i|_{\max},$$

c'_n 值见表 2.

4. 极差法

若多次独立测量值为 $x_1, x_2, \cdots x_n$. 将测量值按其数值大小由小到大顺序排列，得

$$x_{(1)} \leqslant x_{(2)} \leqslant \cdots \leqslant x_{(n)},$$

极差为

$$w_n = x_{(n)} - x_{(1)},$$

则由极差的分布，可求得

$$s_i = \frac{w_n}{d_n}.$$

系数 d_n 由表 3 给出.

5. 分组极差法

用极差法计算标准差虽然简便，但由于它没有充分利用数据，因而反映实际数据波动情况的精度较差，特别是当 n 大于 10 时，估计精度就更差一些.

当 n 大时（例如几十），宜采用分组极差法. 这里仍假定测量是等精度、独立. 将 n 次测量值分为 M 组，每组 m 个测量值，算出各组极差分别为

$$w_1, w_2, \cdots w_M,$$

则平均极差为

$$\bar{w} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{M} w_i,$$

标准差可估计为

$$s = \frac{\bar{w}}{d(m, M)},$$

极差系数 $d(m, M)$ 之值如表 4 所示.

表 4

m \ M	1	2	3	4	5	10
2	1.41	1.28	1.23	1.21	1.19	1.16
3	1.91	1.81	1.77	1.75	1.74	1.72
4	2.24	2.15	2.12	2.11	2.10	2.08
5	2.48	2.40	2.38	2.37	2.36	2.34

方法 2—5 可使标准差计算简化，但若发生争执时，仍应以贝塞耳法为准.

对于平均值

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i,$$

有

$$s_{\bar{x}} = \frac{1}{\sqrt{n}} s.$$

除上述方法外，也可用最小二乘法等有统计学根据的方法计算 s.

二、不能用统计法计算的不确定度[3]

B类分量是不能用统计法算得，需采用其它方法．估计法就是常用的一种，即用估计方法来确定非统计不确定度表征值的近似标准差 u_j.

1. 误差来源的不确定度

若误差来源不确定度为 σ_{a_i}，它对测量结果 f 的不确定度传播系数为 $\frac{\partial f}{\partial x_i}$，则该误差来源对 f 造成的不确定度为

$$\sigma_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}\sigma_{a_i}.$$

例如，钢尺长度受温度不确定度 u_{1j} 的影响，将其乘以长度的温度膨胀系数，即不确定度传播系数为 $\frac{\partial f}{\partial x_i}$，即得温度对长度造成的不确定度为 $\frac{\partial f}{\partial x_i}u_{1j}$.

若 $u_{1j} = 0.2$℃，钢尺长度 $l = 1\mathrm{m}$，线膨胀系数 $\beta = 11.5 \times 10^{-6}$度$^{-1}$，则温度对长度造成的不确定度为

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}u_{1j} = l \cdot \beta \cdot u_{1j} = 2.3 \times 10^{-6}\mathrm{m}.$$

2. 能估计误差限 $\pm a$ 及分布的误差分量

对能估计某误差来源的误差限 $\pm a$，并能通过分析可以掌握其分布规律的误差，可按下式计算出它的近似标准差为

$$u_j = \frac{a}{c},$$

c 为相应分布的置信因子．

考虑到一般测量误差（包括数值比较小的未定系统误差）大都服从 $N(0, \sigma)$ 分布，则由正态分布的特点，标准差的近似，可有如下四种情况：

（1）如果估计值 a 可使 70% 误差落入 $\pm a$ 内，则标准差的近似值 $u_j = a$;

（2）如果估计值 a 可使 50% 误差落入 $\pm a$ 内，则 $u_j = 1.5a$;

（3）如估计值可使 95% 误差落入 $\pm a$ 内，则 $u_j = a/2$;

（4）如果估计值差不多能保证误差落入 $\pm a$ 内，则 $u_j = a/3$.

当特别说明误差为非正态分布时，由 a 值计算 u_j，其值如表5所示．

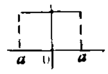
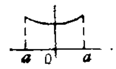
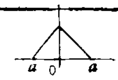
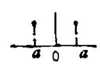
3. 仅能估计误差限 $\pm a$，但不能确切掌握规律的误差分量

有的时候，对某些分量仅能估计其误差限 $\pm a$，而不掌握其规律，或者是该分量对合成误差起的作用小，不值得仔细研究它．对于这样的一些误差分量，在实际处理中常需做一些补充，即根据经验，假设它服从某种分布，从而估计出该分量对总不确定度所产生的影响．

由于所作的分布假设是对实际分布的一种非常近似的估计，所以分布假设可在常见的几种分布中去选择，如正态分布、均匀分布和反正弦分布等，它们的相应置信因子 c 分别为 3，$\sqrt{3}$ 和 $\sqrt{2}$．分布假设应以经验资料为依据，避免主观随意选择．

这样，对于仅能估计误差限，但不能确切掌握分布规律的误差分量，可由假设分布的置信因子 c 及估计的误差限 $\pm a$ 按下式求得近似标准差：

表 5

分布类型	均匀分布	反正弦分布	三角分布	两点分布
图形				
u_j	$a/\sqrt{3}$	$a/\sqrt{2}$	$a/\sqrt{6}$	a

$$u_j = \frac{a}{c}.$$

三、合成不确定度与总不确定度

1. 合成不确定度

若测量结果含统计不确定度分量(A 类)和非统计不确定度分量(B类)，它们的表征值为

$$s_1, s_2, \cdots \quad (s_i),$$
$$u_1, u_2, \cdots \quad (u_j),$$

则合成不确定度表征值为

$$\sigma = \sqrt{\sum s_i^2 + \sum u_j^2 + \text{协方差项}},$$

其中协方差项(相关项)是任意两误差间协方差之和.

设有两个误差 σ_1, σ_2，它们合成为

$$\sigma = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\rho_{1,2}\sigma_1\sigma_2},$$

其中 ρ 为相关系数，$\rho \in (-1, 1)$. 两误差之间相关系数有多种计算方法，如物理直观判断法(即直接根据实验条件进行分析)、观察法、计算法、推算法等[4]. 由于相关系数的计算非常麻烦，应尽可能避开它的计算. 方法有二：一是将各相关量事先合成一个量；二是尽可能选取无关的误差来源，分别计算各自产生的误差，将由同一来源产生的各项误差列为相关的，由不同来源产生的误差列为互不相关的. 例如，有一实验结果为

$$y = f[x_1(T, S, \cdots), x_2(T, S, \cdots), x_3(T, S, \cdots)],$$

其中 x_1, x_2 和 x_3 为直接观测量，它们是 $T, S, \cdots$ 的函数，而 $T, S, \cdots$ 是无关的(如温度、读数等)，则计算 y 误差时，不按 x_1, x_2, x_3 来考虑误差来源，此时 T 的误差 δ 对 y 带来的误差为

$$\delta_{y_T} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial T} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial T} + \frac{\partial f}{\partial x_3}\frac{\partial x_3}{\partial T}\right)\delta_T.$$

S 的误差 δ_S 对 y 带来的误差为

$$\delta_{y_S} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial S} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial S} + \frac{\partial f}{\partial x_3}\frac{\partial x_3}{\partial S}\right)\delta_S.$$

因 δ_T 和 δ_S 等是互不相关的误差来源，故 δ_{y_T} 和 δ_{y_S} 也是互不相关的.

当两误差完全正相关时，$\rho = 1$，

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2;$$

当两误差不相关时，$\rho = 0$，

$$\sigma = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}.$$

此结论可以推广至多个.

对于通常误差无关情况，

$$\sigma = \sqrt{\sum \sigma_i^2}.$$

2. 总不确定度

对特殊用途(如开具鉴定证书)，须对合成不确定度乘以一个因子，以获得总不确定度，即总不确定表征值

$$u = c\sigma.$$

对所乘因子必须加以说明. 在一般情况下，取 $c = 2$，有时取 $c = 2.5$ 或 3. 若可能时(即能计算出 σ 的自由度)，c 也可以由 t 分布计算.

四、不确定度的传播

通常，实验工作中所要求测定的物理量，不能在实验中直接测得，需要根据数学关系从其它量算出，而其它量是可以用量仪和量具直接测量出的，或可以通过文献资料和其它方法获得信息. 如何将测量值的不确定度和其它信息的不确定度合成，以得到测量最后结果的不确定度，这个问题就特别重要.

为保证不确定度的传播关系广泛应用，它应有与问题独立的公式且能普遍适用. 而且，方法应尽可能简单，容易理解，且仅基于少量假设，仅需少量知识，就能用于实际问题所要求的精度评定工作中去. 高斯"误差传播定律"的广义形式，为"协方差传播律"，能最好地满足这些要求.

在高斯方法中，所有物理量都被看作是随机变量，这一点对使系统偏差增加的影响量也是成立的，影响量与测得量的区别，仅在于前者只有少量信息可用. 考虑到在大多数测量实践中，随机变量(测得量和影响量)是可认为(或近似认为)服从正态分布，因而不确定度的传播公式有如下二种:

1. 待测量

$$y=f(x_1,x_2,\cdots x_K),$$

其中 $x_1,x_2,\cdots$ 为相互独立的直接测量量，则

$$s_y=\sqrt{\sum_{i=1}^{K}\left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\right)^2 s_{x_i}^2}. \qquad (1)$$

对每一个直接测量的方差 $s_{x_i}^2$（或 s_{x_i}）计算，应按前面讨论过的求合成不确定度的方法和公式来进行.

2. 待测量

$$y=f(x_1,x_2,\cdots x_K),$$

其中 $x_1,x_2,\cdots x_K$ 等输入量相关，则不确定度的传播公式应为

$$s_y=\sqrt{\sum_{i=1}^{K}\left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\right)^2 s_{x_i}^2+2\sum_{1\leqslant i\neq j\leqslant K}\rho_{ij}\left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial x_j}\right)s_{x_i}\cdot s_{x_j}}, \qquad (2)$$

其中 ρ_{ij} 为任意两输入量（自变量）之间的相关系数. 显然，按(2)式来处理不确定度的传播是非常麻烦的，在实验数据处理中要尽量避免. 事实上，绝大多数实验处理不确定度的传播问题，都可采用高斯公式的简化式[(1)式].

五、测量不确定度的计算实例

1. 用利萨如方法测频率的不确定度分析

设用利萨如图形测市电频率，标准频率为晶体振荡器频率分频 50Hz，频率精度

$$\frac{\Delta f_0}{f_0}=1\times10^{-5}.$$

由于被测频率不准确地等于 50Hz，故示波器上的图形是在转动的，经过 n 次测量，取算术平均值，为一分钟转 14 次，现求 f_x 及其不确定度.

由测量方法可知，

$$f_x=f_0\pm\frac{n}{t}.$$

由图形的转动方向可判定 f_x 是大于标准频率的，故

$$\bar{f}=f_0+\frac{n}{t}=50+\frac{14}{60}=50.2333\text{Hz}.$$

f_x 的测量不确定度的计算步骤如下.

(1) 由方差合成原理推求 f_x 的不确定度计算公式:

$$\sigma_{f_x}=\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial f_0}\right)^2\sigma_{f_0}^2+\left(\frac{\partial f}{\partial n}\right)^2\sigma_n^2+\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)^2\sigma_t^2}=\sqrt{\sigma_{f_0}^2+\left(\frac{1}{t}\right)^2\sigma_n^2+\left(\frac{n}{t^2}\right)^2\sigma_t^2}.$$

(2) 确定各不确定度分量的数值.

A. 已知 $\frac{\Delta f_0}{f_0}=1\times10^{-5}$，$\Delta f_0=50\times10^{-5}=5\times10^{-4}\text{Hz}$ Δf_0 为误差限，并可假设其近似服从正态分布，则得 f_0 的不确定度为

$$\sigma_{f_0}=5\times10^{-4}/3=1.7\times10^{-4}\text{Hz}.$$

B. 确定时间测量的不确定度.

造成时间 t 测量误差的原因有二:

(a) 计时开始与停止时，秒表未及时按或早按，估计其误差限值各为 0.2s，它们具有偶然误差的特性，应服从正态分布. 这一原因造成的计时误差限值为

$$\Delta t_1=\sqrt{0.2^2+0.2^2}=0.3\text{s},$$

因而计时不确定度为

$$\sigma_{t_1}=\frac{0.3}{3}=0.1\text{s}.$$

(b) 在测量时间的过程中，秒表本身有误差. 一个合格的秒表，这项误差 Δt_2 不会超过 $0.001t$，这里 $t=60\text{s}$，故 $\Delta t_2=0.06\text{s}$. 此项误差属未定系统误差，因其值很小，仍可假定止态分布是其最佳近似[5]，则有

$$\sigma_{t_2}=\frac{0.06}{3}=0.02\text{s}.$$

由于这两个误差原因彼此无关，故时间测量的不确定度

$$\sigma_t=\sqrt{0.1^2+0.02^2}=0.1\text{s}.$$

C. 测 n 的不确定度.

n 的误差来源于示波器波形有一定宽度，结合示波器上波形宽度的实际情况，估计 n 测

量的误差限为 $\Delta n = 0.04$，相应地测得 n 的不确定度为

$$\sigma_n = \frac{0.04}{3} = 0.013.$$

（3）频率 f_x 测量的不确定度为

$$\sigma_{f_x} = \sqrt{\sigma_{f_0}^2 + \left(\frac{1}{t}\right)^2 \sigma_n^2 + \left(\frac{n}{t^2}\right)^2 \sigma_t^2}$$

$$= \sqrt{(1.7 \times 10^{-4})^2 + \left(\frac{1}{60}\right)^2 (0.013)^2 + \left(\frac{14}{3600}\right)^2 (0.1)^2}$$

$$= 4.7 \times 10^{-4}\text{Hz}.$$

故频率测量的不确定度为

$f_x = 50.2333 \pm 0.0005\text{Hz}$　　（一倍标准差）；

$f_x = 50.2333 \pm 0.0015\text{Hz}$　　（三倍标准差）.

2. 悬丝耦合法测杨氏模量实验的不确定度分析

一段截面均匀的圆柱形试棒，在两端自由的条件下作弯曲自由振动时，它的杨氏模量与试棒的固有频率、几何尺寸及试棒的质量有如下的关系：

$$E = 1.6384 \times 10^{-7} \frac{l^3 m}{d^4} f^2 \quad (\text{单位：kgf/mm}^2),$$

式中试棒长度 l 的单位为 mm，直径 d 的单位为 mm，m 的单位为 g，基频频率的单位为 Hz.

在室温条件下，对 l，d 和 f 均进行了多次重复测量，结果列于表 6. m 是用物理天平重复称量了几次，数值不变，其值为 30.78g，估计误差限为 0.01g，即

$$m = 30.78 \pm 0.01\text{g}.$$

将各测量值代入杨氏模量的计算公式，计算得

$$E = 2.209 \times 10^4 \text{kgf/mm}^2.$$

计算 E 的实验不确定度：

（1）由方差合成原理求 E 的不确定度计算公式.

因各误差之间彼此无关，故相对方差

$$\left(\frac{\sigma_E}{E}\right)^2 = \left(3\frac{\sigma_l}{l}\right)^2 + \left(-4\frac{\sigma_d}{d}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_m}{m}\right)^2 + \left(2\frac{\sigma_f}{f}\right)^2,$$

由此得

表 6

物理量	测量次数						平均
	1	2	3	4	5	6	
l(mm)	139.70	139.72	139.68	139.70	139.74	139.72	139.71
d(mm)	5.996	5.998	6.000	6.002	6.000	5.998	5.999
f(Hz)	1440	1443	1441	1443	1443	1442	1442

$$\sigma_E = E\sqrt{\frac{9}{l^2}\sigma_l^2 + \frac{16}{d^2}\sigma_d^2 + \frac{1}{m^2}\sigma_m^2 + \frac{4}{f^2}\sigma_f^2}.$$

（2）确定各独立自变量的误差引起的不确定度.

A. 质量称量的不确定度

$$\sigma_m = \frac{0.01}{3} = 0.007\text{g},$$

B. l 测量的不确定度.

根据贝塞耳公式，计算得一次测量标准差为

$$s_l = \sqrt{\frac{\sum(l_i - \bar{l})^2}{n-1}} = 0.021\text{mm}.$$

（按最大残差法，$s_l = c_n \max|v_i| = 0.68 \times 0.03 = 0.02\text{mm}$）

C. d 测量的不确定度.

$$s_d = \sqrt{\frac{\sum(d_i - \bar{d})^2}{n-1}} = 0.0021\text{mm}.$$

D. 频率 f 的测量不确定度.

（a）判断外激发频率与样品基频共振的误差，由这项误差引起的测频不确定度为

$$s_{f_1} = \sqrt{\frac{\sum(f_i - \bar{f})^2}{n-1}} = 1.1\text{Hz}.$$

（b）悬挂点位置对频率测量的影响.

试棒作基频振动时，其驻波节点位于距端点 $0.224l$ 处，悬丝如吊扎在节点，试棒不能激发，因此悬挂点必须偏离节点. 试验表明，当偏离（内或外）10mm 时，此影响不超过 1Hz，由此估计此项不确定度为

$$\sigma_{f_2} = \frac{1}{3} = 0.3\text{Hz}.$$

（下转第 253 页）