

$f=ma$ 究竟是谁首先提出来的?

阎康年

(中国科学院自然科学史研究所)

众所周知,牛顿发现了运动第二定律。但是,这个定律的表示式 $f=ma$ 究竟是不是由牛顿首先提出来的?从牛顿在世的1700年至今,一些著名的物理学家和科学史学家一再地提出这个问题,并且在学术界和教学中产生很大的影响。

显然,问题产生的原因是 $f=ma$ 难以从牛顿的运动第二定律直接得出来,而且人们也没有从牛顿的著作中发现他写出过这个公式。因此,二、三百年来,不少学者对它的提出者有以下几种说法,现举例予以说明:

例一 欧拉在1735年发表的《力学》一书中,推导出 $F = M \frac{dv}{dt}$,说此式包含了“以前给出的求自然运动的一切原理”^[1]。并且,他未提牛顿的名字,实际上认为是他自己提出来的。

例二 莫泊丢(P. L. Maupertuis)在1756年提出“欧拉先生已经从伽利略发现的原理推导出这些定律,并被今天研究力学和动力学的人们所接受。这个原理就是“力乘以产生速度增量的时间,欧拉先生用一个卓越的和严格的分析,从这个原理推导出了运动交换的定律”。他还牛顿是应用伽利略原理的人,显然相信第二定律包含在伽利略的有关落体运动的著作中”^[2]。

例三 M. 雅莫(M. Jammer)在1961年发表的《经典物理和现代物理中的质量概念》一书中,指出欧拉说的物体的质量不由其体积而由加到物体上的运动(加速度)决定,“这就是熟知的公式‘力等于质量乘加速度’并将它用作质量精确定义的最早表述”^[3]。他还认为质量和重量的区别虽然隐约地蕴含在《原理》一书中,但是他却说它“由约翰·伯努力在《振荡中心性

质的沉思》一书中第一次明确强调的。其中,他说明‘质量’乘自由落体加速度是物体的重量”^[4]。

例四 S.G. 布拉什(S. G. Brush)在1983年发表的《统计物理和从玻意耳、牛顿至伦敦和翁萨格》一书中,提出“正是欧拉在1750年首先把牛顿的第二定律表示成 $F = ma$ 的形式”^[5]。

例五 T. L. 汉金斯(T. L. Hankins)在1967年发表的《18世纪接受牛顿运动第二定律的情况》一文中说明,欧拉在1750年提出了一篇《一个动力学新原理的发现》论文,文中写了 $2Md^2x = \pm Fdt^2$,并说“所有其他的原理应当建立在这个简单原理的基础上”。汉金斯认为“欧拉的‘新’原理是以今天物理学家熟悉的形式写的牛顿运动第二定律”,“显然,他相信他的基本原理比牛顿的第二定律更普遍”^[6]。他说:“P. 法里格农也以一种‘速记’的形式

$$\left(f = m \frac{d^2x}{dt^2} \right)$$

写了这个比例,我们现在称之为牛顿的第二定律”。他认为法里格农在1700年的论文省去了 m ,因为它是常数,所以写成

$$f = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} \quad [7]$$

接着,他指出在法里格农之后, $F = m \frac{dv}{dt}$ 已变得很普遍,如海尔曼(J. Hermann)将它用于他在1716年发表的著作中, J. 伯努力在1724年把它作为“熟悉的加速体定律”,达朗伯在1743年发表的《动力学论著》中应用了与法里格农的类似的方程。他进一步针对 $f=ma$ 指出“它不是牛顿的第二定律,不是伽利略的,不是法里格农的,而完全是新的。它是物理学家

们为了寻求力学上意义深刻的概念和准确的定律,而经过一个世纪努力奋斗的产物^[8]。

这些例证说明,很多科学家和科学史学家从1700年至今,一再地提出 $f = ma$ 的发现者可能是法里格农和欧拉, $W = mg$ 的发现者是J.伯努力,或者认为 $f = ma$ 是在1750年前经许多人的努力逐渐形成的。但是,这些学者的共同主张就是认为它们都不是牛顿提出来的。究其原因,无非是牛顿没有写过 $f = ma$ 或 $f = m \frac{dv}{dt}$

及其说明,而以 dx 和 $\frac{dx}{dt}$ 表示微分和导数的方法却始于莱布尼茨,因此 $f = ma$ 只能产生于欧洲大陆。上述事例也说明,否定牛顿是 $f = ma$ 的提出者的说法从1700年起,延续到1960年和1983年,并且多出名人之口,可见其影响是深远的和很大的。

作者仔细地阅读和研究了牛顿的几种原著和手稿之后,基本上可得出牛顿确实以文字说明的方式明确表述了 $f = ma$ 的关系,却没有写成公式。正如他只是在《原理》中以文字的形式表述了万有引力定律,却从未写出

$$F = G \frac{mm'}{r^2}$$

的表示式一样。

根据牛顿的有关手稿和《原理》,可以提出以下几则论证和看法:

《原理》一书对运动第二定律的表述:

定律 II 运动的变化与外加的动力成比例,并在外加力的直线方向运动。

显然,这个定律的表述并未直接涉及物体的质量和加速度,尽管它们在实际上是有关的,这或许就是后来产生种种分歧的重要原因之一。但是,下面引证的几则史料却说明,牛顿确实以文字的方式明确地表述了 $f = ma$ 关系。

约在1684年11月写的《论物体的运动》手稿的第5节中,牛顿写道:

加速的量或力 (accelerative quantity or force) 与既定时间内产生的速度成比例……运动的量 (motive

quantity) 或力与在既定时间内产生的运动成比例,象重物的力在较大的物体中较大和在较小的物体中较小。所以运动的力 (motive force) 与加速的力之比和运动与速度之比一样,因为运动之量 (quantity of motion) 是由速度乘以运动的物体 (body) 和加速力量 (quantity of accelerative force) 是由加速的力乘以同一物体 (same body) 得出来的^[9]。

文中的许多术语和说明与今天的差异很大,有必要根据牛顿在一系手稿和著作中的常用说法和含义加以说明:

加速的量: 加速度 a 加速的力: 单位粒子上的动力 f_1

动力: 整个物体受的力 f 运动: 动量, 相当于 mv

运动的量: 动量, 相当于 $m(v_2 - v_1)$

物体: 质量 m 加速力量: 质量 m

运动力量的量: 即动力之量或动力 f

根据这种理解,这一段话中的“加速的量或力与既定时间内产生的速度成比例”可表示为 a 或 $f_1 \propto \frac{v_2 - v_1}{t}$ 。“运动的量或力与在既定时间内产生的运动成比例”说明动量或动力与

$$m \frac{v_2 - v_1}{t}$$

成比例。“运动的力与加速的力之比和运动与速度之比一样,因为运动之量是由速度乘以运动的物体”意味着动力 $f (=mf_1)$ 和加速的力 f_1

之比等于动量与速度之比,即 $\frac{f}{f_1} = \frac{mv}{v}$ 。“加速力量之量是由加速的力乘以同一物体得出来的”说明 $f = f_1 m$, 但是如前述 $a \propto \frac{v_2 - v_1}{t} \propto f_1$, 所以 $f \propto ma$ 。这段话中,牛顿通过动力

$$f \propto m \frac{v_2 - v_1}{t}$$

和 $f \propto ma$, 提出了 $f = ma$ 的文字表述。

在这篇手稿中,牛顿还对 $W = mg$ 关系作了比较详细的说明。他写道:

因此,在接近地球表面处,在所有物体上加的力是一样的,运动的重力或重量随物体而变。但是,如果一物体离地球而去并上升到加速的量较小的区域,重量同等地减小,并且将一直随物体乘以加速的重力 (accelerative gravity) 而变^[10]。

这段话是说地球表面附近的一切物体的加速度(即重力加速度)是相同的,重力或重量 W 随物体的质量大小而变化,因此,当重力加速度 g 一定时,如等高度物体位置的情况, $W \propto m$ 。但是,当物体离地面升起的高度很大时,重力加速度明显地减小,重量也就按同一比例减小。由于牛顿说的“加速的重力”就是重力加速度,所以物体的重量随物体的质量与重力加速度的乘积而变化,这就是他说的重量“随物体乘以加速的重力而变化”,其表示式就是 $W \propto mg$ 。

《论物体的运动》手稿中关于 $f = ma$ 和 $W = mg$ 的文字表述,可以从《原理》的《定义 VIII》中的说法看得更清楚。关于 f 与 ma 的关系问题,牛顿写道:

所以,加速的力与运动的力之比将与迅速 (celerity) 和运动保持同样的比例,因为运动之量由迅速乘以物质之量产生。并且,运动的力是由加速的力乘以同一物质之量求出来的^[11]。

“迅速”一词在牛顿时代经常被用以表示物体运动之快慢或速度,这里指速度而言。“物质之量”一词按牛顿的质量定义指质量。所以,这段话的前一句表明,加速的力 f_1 与运动的力 f 之比 $\frac{f_1}{f}$ 或 $\frac{f_1}{f_1 m}$ 等于速度 v 与运动或动量 mv 之比

$\frac{v}{mv}$, 即 $\frac{f_1}{f_1 m} = \frac{v}{mv}$ 。后一句话为运动的力 f

由加速的力 f_1 乘质量求出,即 $f = f_1 m$ 。由于前面说过 $f_1 \propto a$, 所以 f_1 就等于单位质量的加速度或加速度 a 。因此, $f = f_1 m = ma$ 。这是牛顿在《原理》中说法的本意,原因是他明确指出“因为作用在物体的几个粒子上的加速的

力的总和就是所有粒子的运动的力”,单个粒子上的加速的力就是单位质量上的加速的力或加速度。

在这段话的后面,牛顿继续谈到重力或重量与质量和重力加速度的关系,并着重提出了 $W \propto mg$ 的文字表述,还加了具体算法的例证。他写道:

因为作用在物体的几个粒子上的加速的力的总和就是所有粒子的运动的力,所以正是在接近地球表面处,加速的重力或重力产生的力在一切物体上都是一样的。运动的重力或重量随物体而变化。但是,如果我们会上升到较高的区域,在那里加速的重力较小,重量将同等地减小,并将总是随物体乘以加速的重力而变。所以,在那些加速的重力减小成一半的区域,一个物体小二或三倍的重量将小四或六倍^[12]。

这段话说明,加速的重力或重力加速度因物体离地面的高度而变化,重量随质量(即牛顿讲的物体)和重力加速度(即牛顿讲的加速的重力)而变化。所以,牛顿明确提出 $W = mg$ 的文字表述:重量随质量乘重力加速度而变化,虽然他谈的是比例关系而不是相等。

从上面引证的牛顿在 1684 年和 1685 年写的论文和《原理》的定义与定理部分手稿,可以看出尽管牛顿在那时没有采用 $f = m \frac{dv}{dt}$ 的形

式表述他的运动第二定律,但是他一再地用文字表述的形式明确地写出了作用力或动力与物体的质量和加速度的乘积成正比,也写了重力或重量与物体的质量和重力加速度的乘积成正比。如果前者主要指水平的运动,而后者指垂直地面的运动,则存在一个明显的区别,即水平的物体加速运动时外力并不持续地作用在物体上而重力则在垂直地面运动的物体上持续地作用。为了将二者统一地用一个公式表述,牛顿在《论物体的运动》一文手稿中,将向心力和重力与磁力比较,因为它们力持续地作用于物

体上是一致的,并且都与质量和加速度有关.此外,他进而通过磁力在水平和垂直地面方向上的力与加速度关系,将二者统一在一个普遍的 $F = ma$ 关系式中.所以,他写道:

而且,有三种向心力的量:绝对的,加速的和运动的,指向一个中心的向心力的绝对量(也可称之为绝对的力)大于指向另一个中心的,而勿需注意其他被吸引物体的距离和大小,象一磁铁中的磁力较大而另一磁铁中较小.加速力的量或力与一既定时间内产生的速度成比例,象同一磁铁的力在较小距离上较大和在较大距离上较小,或象重力在接近地球时较大和在较高地区较小.运动的量或力与在一既定时间内产生的运动成比例,象重物的力在较大物体中就较大和在较小物体中就较小.所以,运动的力与加速的力之比等于运动与速度之比,因为运动之量是由速度乘以运动的物体得出的和加速的力的量由加速的力乘以同一物体得出的^[13].

所谓的牛顿的引力质量和惯性质量等效并推论出普遍的 $f = ma$ 关系式的文字说明,体现在这段话中.应该说明,牛顿从未明确提出过这两种不同性质的质量及其等效的词汇和说法,这是后人,特别是爱因斯坦,从牛顿的推理和科学思想中引伸出来的.显然,它包含在牛顿说的通过磁铁的“物体”建立起水平运动的“物体”和重物的“物体”具有等当性之中,因为“水平运动的‘物体’”指的是惯性质量,“重物的‘物体’”指的是引力质量.实际上牛顿只是在这两种质量的等当概念基础上,才提出了普遍的 $f = ma$ 的文字表述:加速力的量(即动力)由加速的力(即加速度)乘以同一物体(即引力质量和惯性质量等当的质量)得出.

通过上述史料、理解和分析,可以看出 $f = ma$ 的想法和文字表述的确是由牛顿在 1684 年首先提出和在 1687 年首先发表的.由于他在《原理》中的微积分法是以几何法表示的,以

及他的微积分不是以 $dx, \int y dx$ 形式表述的,他不可能写出 $f = m \frac{dv}{dt}$ 的公式,而这种表示式在当时只能产生于欧洲大陆,特别是德国.尽管如此,我们还是应该得出这样的看法:正象牛顿的万有引力定律是以文字表述的方式表示的一样,尽管他从未写出 $F = G \frac{mm'}{r^2}$, 他却被认为万有引力定律的发现者和 $F = G \frac{mm'}{r^2}$ 表示式的发明人.运动第二定律及其表示式 $f = ma$ 也应该认为是牛顿首先提出的.法里格农、欧拉和约翰·伯努力的功绩在于他们先后提出了 $f = \frac{d^2x}{dt^2}$, $f = m \frac{dv}{dt}$ 和 $W = mg$ 的表示法,但是第一个明确阐述 $f = ma$ 和 $W = mg$ 关系的却是牛顿.因此,本文提出牛顿是运动第二定律表示式的最早提出者.

- [1] L. Euler, Opera Omnia, Ser. 2, Vol. 1, Berlin-Göttingen, (1954), 56—57.
- [2] P. L. Maupertius, Mémoires Acad. Sci., Berlin, (1756), 421—422.
- [3] M. Jammer, Concept of Mass in Classical and Modern Physics, Harvard, (1961), 89.
- [4] M. Jammer, Concept of Mass in Classical and Modern Physics, Harvard, (1961), 74.
- [5] S. G. Brush, Statical Physics and the Atomic Theory of Matter From Boyle and Newton to London and Onsager, Princeton, (1983), 26—27.
- [6] T. L. Hankins, Archive Internationales d'histoire des Sciences, 20 (1967), 44.
- [7] T. L. Hankins, Archive Internationales d'histoire des Sciences, 20(1967), 46, 63.
- [8] T. L. Hankins, Archive Internationales d'histoire des Sciences, 20(1967), 63, 65.
- [9] J. Herivel, The Background to Newton's Principia, Oxford, (1965), 318—319.
- [10] J. Herivel, The Background to Newton's Principia, Oxford, (1965), 316.
- [11] I. Newton, Mathematical Principle of Natural Philosophy, Trans. by A. Motte and Revised by F. Cajori, Cambridge, (1947), 3.
- [12] I. Newton, Mathematical Principles of Natural Philosophy, Trans. by A. Motte and Revised by F. Cajori, Cambridge, (1947), 5.
- [13] J. Herivel, The Background to Newton's Principia, Oxford, (1965), 318—319.