

麦克斯韦电磁场理论的建立

向义和

(清华大学现代应用物理系, 北京 100084)

麦克斯韦(1831—1879)是继法拉第之后,集电磁学大成的伟大科学家。他全面地总结了电磁学研究的全部成果,并在此基础上提出了“感生电场”和“位移电流”的假说,建立了完整的电磁场理论体系。

一、《论法拉第力线》——麦克斯韦的物理类比,电紧张态的数学描述和感生电场的提出

在大学期间,麦克斯韦就阅读了法拉第的《电学实验研究》。1856年2月,他在剑桥哲学学报上发表了他的第一篇电磁学论文《论法拉第力线》。麦克斯韦环顾了当时电磁学研究的现状,指出虽然已经建立了很多实验定律和数学理论,但未能揭示各种电磁现象之间的联系。他写道:“电科学的现状看来特别不便于思索。”他认为“有效的科学研究的第一步必须把已有的研究成果简化和归纳成一种思维易于领会的形式”,“寻找一些在思维发展的每一步保持清晰物理概念的研究方法”^[1]。他认为“物理类比”就是这一研究方法。

麦克斯韦指出:“物理类比的意思是,利用一种科学定律和另一种科学定律之间的部分类似性,用它们中的一个去说明另一个。”“类比是建立在两类定律在数学形式上相似的基础上。”^[2]在这方面,W. 汤姆孙(1824—1907)的研究给了麦克斯韦以很大的启示。1842年,当汤姆孙还是剑桥大学的学生时,就把包含带电导体的区域内的静电力分布与无限固体中的热流相比较,指出前一种情形下的等势面与后一种情形下的等温面对应,前者的电荷与后者的

热源相对应;与距离成平方反比的吸引力方程与均匀媒质中均匀热流方程相对应^[2]。麦克斯韦认为,这种类比方法“对于电现象的研究是必要的”。

这篇论文可分为两部分。第一部分阐述了力线和不可压缩流体之间的类比。麦克斯韦着重分析不可压缩流体通过有阻力媒质的运动,这个阻力取决于介质的性质,与运动方向相反,与速度大小成正比。如果用 v 表示速度大小, K 表示阻力系数,则作用在单位流体体积上的阻力为 Kv 。因此,为了保持这一速度,在流体的后一部分必须比它的前一部分保持较大的压强,这一压强差可以抵消阻力的效应。

麦克斯韦把流线的开始处称为源,流线的终止处称为穴。他讨论了一块中间嵌有一个单位流体元的各向同性的无限大的均匀介质,以此流体源为球心,在单位时间内从任意一个球面流出一个单位体积的流量,与源距离 r 处的速度 $v = \frac{1}{4\pi r^2}$,因此压强的减小率 $Kv = \frac{K}{4\pi r^2}$ 。因为无限远处压强 $p = 0$,所以在距离流体源为 r 处的压强 $p = \frac{K}{4\pi r}$ 。

麦克斯韦把流体源产生的流线与点电荷产生的力线加以类比。因为点电荷之间的作用力与距离的平方成反比,所以点电荷产生的电场强度与流体源在流体中产生的速度相对应,从而得出:流体中的压强与静电电势相对应;流体中的压力梯度与电势梯度相对应。

麦克斯韦还把流体运动和电流加以类比。流体中的压强相应于导体中的电张力,物理上等同于静电电势。流体中某方向的压力减少率,相应于沿该方向该点的电动势。他明确指

出,为了在一个闭合回路中产生稳恒电流,除了静电力外,还必须有其它作用力存在,他把这个力称为环路的电动力(即现代所说的电动势)。

麦克斯韦在描述流线与力线时,涉及到“量”和“强度”的术语。对于流体情形,前者表示“流量”,后者表示克服阻力的“力”。对于电流情形,电流的量指的是在单位时间内通过一个截面的电量,电流的强度指的是电动力,即克服阻力的能力。他指出矢量场中的“量”,即力线的通量,可以通过面积分求出,场中的“强度”可以通过线积分求出。

论文的第二部分主要是讨论了电磁感应现象。首先,麦克斯韦全面地阐述了法拉第的电磁感应定律。他写道:“当导体在电流或磁铁附近运动时,或者当电流或磁铁在导体附近运动时,或者在电流强度变化或磁场强度改变时,在导体中就产生一个电动力。”“如果导体环路是闭合的,那么就有连续的电流产生;如果导体环路是开放的,那么在它的端部就产生电的张力。如果在闭合导体横切磁感应线的运动中,通过环路的力线数不变,整个环路的电动力就为零。”“无论用什么方法,只要使得通过环路的力线数改变,环路中就有电动力产生,而感应电路所产生的磁力线总是反抗磁力线的变化。”^[4]

接着,麦克斯韦阐述了法拉第的电紧张态(electro-tonic state)概念。他写道:“导体环路内的感应电流只是由于它周围的电的或磁的现象的改变而产生的,只要这些现象不变,在导体中就没有任何效应产生。当导体接近电流或磁铁,以及远离其影响时,导体是处在不同的状态中。”他指出,法拉第关于取决于力线数改变的电动力是由于状态的改变产生的,该状态由力线数目来确定。在磁场中,一个闭合导体处在由磁作用引起的一定的状态中,只要这种状态不变,就没有效应发生,但是当这个状态改变时,电动力就产生了,它的强度与方向取决于状态的改变。这一状态就是法拉第所说的“电紧张态”。但是,这些概念和想法还没有作为数学研究的课题。麦克斯韦强调:“电紧张态是电磁

场的运动性质,它具有确定的量,数学家应当把它作为一个物理真理接受下来,从它出发得出可通过实验检验的定律。”^[4]

麦克斯韦证明了磁感应强度 B 可以用电紧张态函数 α 和标量函数 U 表示为

$$B = \text{curl} \alpha + \text{grad} U.$$

当不存在磁极时,此式右边第二项可被变量的适当变换略去,从而得到

$$B = \text{Curl} \alpha.$$

麦克斯韦在电紧张态的理论总结中指出:“绕着一个面边界的整个电紧张态强度,等于通过那个面的磁感应量,或者换句话说,通过那个面的磁力线数量。”用现代的形式表示,就是

$$\oint_L \alpha \cdot dL = \int_S B \cdot dS = \phi,$$

式中 ϕ 表示磁力线的数量。

麦克斯韦在总结中还写道:“一个闭合电流的总的电磁势(即总能量)是由电流的量(即电流密度)与同方向绕该环路的电紧张态强度的乘积所量度。”用现代形式表示,即为

$$W = \oint_L j \cdot \alpha dL.$$

麦克斯韦在讨论电流密度与电动力的关系时,引进了某点的电动力的概念。他写道:“导体中任何一点的电流是由于作用在那个点的电动力产生的。这些电动力可能是外部的,也可能是内部的。外部的电动力或者是由于电流和磁铁的相对运动引起,或者是来自它们的强度的改变,或者是来自于其它的原因。内部的电动力是由于导体中相邻点之间的电张力之差引起的。”^[4]这里所说的外部的电动力就包含变化磁场产生的感生电场。他在总结中写道:“任何导体元上的电动力,无论是在大小还是在方向上,由在那个元上电紧张态强度的瞬时变化率来量度。”^[4]用现代形式表示,即为

$$E = - \frac{\partial \alpha}{\partial t}.$$

对感生电场在一个闭合回路上进行积分,就得到感生电动势。所以麦克斯韦写道:“在一个闭合导体上的电动力(即电动势)是由绕着

这个环路的整个电紧张态强度对时间的变化率来量度。虽然产生的电流是随电阻而改变，但是电动力不依赖于导体的性质。而且，无论用什么方式使得电紧张态强度改变，或者是由于导体的运动，或者是由于外部环境的改变，产生的电动力都是相同的。”^[1]

二、《论物理力线》——电磁作用的力学模型；位移电流概念的提出

1862年，麦克斯韦发表了《论物理力线》这篇重要论文。为了对已经确立的电学量和磁学量之间的关系给以物理解释，他设计了电磁作用的力学模型。

在这以前，“以太旋涡”的思想早已有了。1856年，汤姆孙从研究光的偏振面在磁场中的旋转效应得出磁具有旋转的特征。他认为可以把磁致旋光效应归结为以太振动和分子旋转运动之间的耦合。这给麦克斯韦以很大的启发，使他认识到磁是一种旋转的效应。他写道：“对于由电流引起的电离质在一定方向上的传送和由磁力引起的偏振光在一定方向上的转动这一事实的思考，导致我把磁认为是一种旋转现象。”^[2]

麦克斯韦把磁旋转这一概念与法拉第的力线思想相联系。按照法拉第的力线思想，力管倾向于纵向收缩和横向膨胀。他想，如果假设每个力管所包含的流体是处在绕它的管轴而转动中，这样一种倾向就可以归因于离心力。于是他设想了一个“分子涡旋”模型。假设涡旋绕磁力线旋转，即从S极到N极沿磁力线看去，涡旋在顺时针方向旋转，由于旋转引起的离心力使每个涡旋在横向扩张，从而纵向收缩，因而磁力线在纵向表现为张力，就象绳上的拉力一样，横向表现为压力。

麦克斯韦假设涡旋速度正比于磁场强度，介质的磁导率 μ 与涡旋的密度成正比，根据应力的平衡定律他得出磁场作用在磁极、磁感应物质以及电流上的力的公式。

在论文的第二部分《应用于电流的分子涡

旋理论》中讨论了电磁感应现象。这就要求对电流与分子涡旋的物理联系有所理解。而它又引起了另一个问题，由于相邻涡旋的表面在空间任意一点运动方向相反，这两个相邻的涡旋如何在相同的方向上自由转动呢？麦克斯韦设想每个涡旋同它相邻的涡旋被一层细微的粒子隔开，这些细微的粒子能够绕着它们的轴在与涡旋相反的方向上转动，从而使相邻的涡旋在相同的方向上转动。麦克斯韦通过计算得到这些粒子的运动与电流相对应，穿过单位面积的粒子数等于流过单位面积的电量。因此，电流由这些穿插在相邻涡旋之间的粒子的移动来表示。

然后麦克斯韦计算了媒质中涡旋运动引起的能量。他假设单位体积中涡旋的能量正比于密度和速度的平方，从而推导出磁场能量密度的公式 $\frac{\mu H^2}{8\pi}$ 。接着，他根据粒子层的切向力对涡旋作的功应等于涡旋能量的改变，推导出重要的磁场状态的改变和感生电场的关系式

$$\text{curl } \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}.$$

接着麦克斯韦按照他的分子涡旋假设对感应电流的起因进行了力学解释。如图1所示，六角形空白代表涡旋，分开涡旋的小圆圈代表带电粒子。当电流从左到右通过AB时，AB上面的一排涡旋gh按逆时针方向旋转，如果kl排涡旋仍然处于静止状态，则这两排涡旋之间的粒子将在顺时针方向上转动，粒子层pq由右到左运动，即产生与AB电流方向相反的电流。如果AB中的电流突然停止，则gh排涡旋将受到阻碍，而kl排涡旋仍然在反时针方向上快速转动，这就使pq层中的粒子从左向右运动，即产生与AB电流方向相同的感应电流。因此，感应电流的现象是涡旋转速改变时发生的作用力的一种效应。

在论文的第三部分《应用于静电的分子涡旋理论》中，他引进了“位移电流”的概念。他把导体比作多孔的膜，允许电流通过。把介质比作一个流体通不过的弹性膜，能把流体的压力

从一边传到另一边。他指出：“虽然电流通不过介质，但是电的效应可以通过介质传播。”他肯定在变化电场的作用下，电解质中也会有一种能够产生磁效应的特殊的“电流”。他写道：“只要有电动力作用在导体上，它就产生一个电流……。作用在电介质上的电动力使它的组成部分产生一种极化状态，有如铁的颗粒在磁体的影响下的极性分布一样，……在受到感应的电介质中，可以想象每个分子中的电是这样移动的，使得一端为正，另一端为负，但是这些电仍然完全同分子联系在一起，而不从一个分子跑到另一个分子上去。这种作用对于整个电介质的影响是引起电在一定方向上的一个总位移。这一位移并不构成电流，因为它达到某一定值时就保持不变了。不过当电位移不断变化时，随着电位移的增大或减少，就会形成一种沿着正方向或负方向的电流。”^[3]

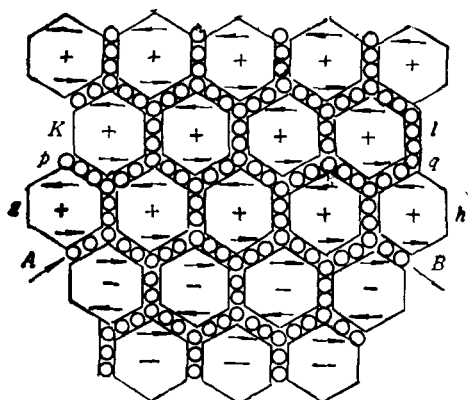


图1 分子涡旋和电粒子的模型

麦克斯韦就是这样表述了位移电流的概念。所以位移电流出现在任何电场强度有变化的电介质中。麦克斯韦按照他的分子涡旋模型，根据力的平衡条件，得出了电动力 R 与电位移 h （指的是穿过垂直于运动方向上的单位面积的电量）成正比的结论，即 $R \propto h$ 。微分得

$$\frac{dh}{dt} \propto \frac{dR}{dt},$$

即位移电流与电动力随时间的变化率成正比。

用现代形式表示为 $i_{位移} \propto \frac{\partial E}{\partial t}$ 。

最后，麦克斯韦讨论了在涡旋物质中波的传播速度。对于密度为 ρ 和切变模量为 m 的弹性媒质，横波的传播速度

$$v = \sqrt{\frac{m}{\rho}}.$$

他认为这一公式也适用于具有弹性结构的涡旋物质。涡旋介质的密度 ρ 与介质的磁导率 μ 有关， $\mu = \pi \rho$ 。 m 与涡旋介质的电学量有关。在 $\mu = 1$ 的涡旋介质中波的传播速度为 $\sqrt{\pi m}$ ，经他推导，这就是电量的电磁单位和静电单位的比值。1856年韦伯（1804—1891）和柯尔劳斯（Kohlrausch）得出这一值为 $3.1074 \times 10^9 \text{ m/s}$ 。这个值与斐索（1819—1896）在1849年测定的光在空气中的速度 $3.14858 \times 10^8 \text{ m/s}$ 符合得很好。这一惊人的结果进一步揭示了电磁现象和光现象之间的联系。麦克斯韦在论文中着重指出：“我们不可避免地推论，光是媒质中起源于电磁现象的横波”。^[3]

三、《电磁场的动力学理论》——场的概念的确立，电磁场方程组的建立

1865年，麦克斯韦发表了电磁场理论的第一篇重要论文《电磁场的动力学理论》。在这篇论文的第一部分的《引言》中，麦克斯韦最早明确地提出了电磁场的概念。他在评价韦伯和纽曼的超距作用的电磁理论时写道：“然而，在依赖于粒子速度的力超距作用在另一些粒子上的假设中包含着力学上的困难，阻止我认为这一理论是最终的理论。”“所以，我宁愿从另一方面去寻找对这一事实的解释，假设它们是被周围媒质以及在激发物体中所发生的作用而产生，而不需要假定在相当距离上直接作用的力存在就可以解释远距离物体之间的作用。”“所以，我提出的理论可以称为电磁场理论，因为它与带电体或磁体附近的空间有关；它也可以称为动力学理论，因为它假定在该空间中有运动的物质，从而产生了我们所观察到的电磁现象。”^[4]

麦克斯韦认为电磁场既可在物体内存在，也可在真空中存在。他写道：“电磁场是包括

和环绕那些处于电或磁状态的物体的那一部分空间,它可以被任何一种物质所充满,也可以抽成没有任何宏观物质的空间,就象在盖斯勒管或其他称为真空的情形下一样。”他假定以太物质是电磁场的物质承担者。他指出:“从光和热的现象看来,我们有理由相信,有一种以太媒质充满空间和渗入物体,它能运动并将该运动从一部分传到另一部分,它能将运动传到宏观物体,使其加热,并以各种方式影响它。”^[4]

在物理学发展史上,麦克斯韦第一个表述了能量局域性的概念。这就是说,对于带电物体或磁性物体,能量并非只存在于这些物体的内部,而且也存留在该物体周围的空间中。他写道:“按照旧的理论,它存在于带电物体、导体环流以及磁铁的内部,……按照我们的理论,它存在于电磁场中,存在于带电体的周围空间和这些物体内部。它以两种不同的形式表现出来,这两种形式就是电极化和磁极化;或者按照一种可能的假设,把它们看成是同一媒质的运动和应力。”麦克斯韦对电磁场的能量还作了定量计算,推导出了电磁场能量密度公式和总能量方程。

在论文的第三部分,麦克斯韦根据电磁学的实验事实和普遍原理建立了电磁场方程。下面我们用今天使用的术语和符号,把这些方程表示如下。

(1) 全电流方程

$$\mathbf{j}' = \mathbf{j} + \partial \mathbf{D}' / \partial t,$$

式中 \mathbf{j} 为传导电流密度, \mathbf{j}' 为总电流密度, $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ 为电位移对时间的变化率,即位移电流密度。

(2) 磁力方程

$$\mu \mathbf{H} = \text{curl} \mathbf{a},$$

式中 \mathbf{H} 为磁场强度, μ 为磁导率, $\mu \mathbf{H}$ 即磁感应强度 \mathbf{B} , \mathbf{a} 为电磁动量。他指出“ \mathbf{a} 是与法拉第称为电紧张态相同的量。”对此式两边取散度,即得现代形式的方程

$$\text{div} \mathbf{B} = 0.$$

(3) 电流方程

$$\text{curl} \mathbf{H} = 4\pi \mathbf{j}.$$

将它与全电流方程结合起来,即为

$$\text{curl} \mathbf{H} = 4\pi \left(\mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right),$$

写为现代形式(高斯制)的方程为

$$\text{curl} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}.$$

1873年,麦克斯韦在他的《电学和磁学通论》这部经典著作中,叙述了引入位移电流概念这一思想过程。他在该书的第607条中作出这一评述:“只有很少的实验,证明介质中位移电流的改变与电流的电磁作用相联系。但是协调电磁定律与不闭合电流存在的极大困难使我们必须接受瞬变电流的存在是由位移变化产生的,这是许多理由中的一个理由。”^[5]

对安培环路定律的微分形式有

$$\text{curl} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}.$$

这就要求

$$\text{div} \mathbf{j} = 0,$$

也就是说该定律只能在闭合回路中成立。在闭合回路中的任何点上没有电荷的累积。在开路的情形下,例如在电容器充电时,我们有

$$\text{div} \mathbf{j} = -\frac{d\rho}{dt},$$

ρ 是单位体积中所包含的电荷量。这时在电容器的极板上有电荷累积, \mathbf{j} 的散度不为零,这就表明在不稳定电流的情形下,安培环路定律不成立。为了克服这一困难,麦克斯韦引进了全电流思想。

因为

$$4\pi \frac{d\rho}{dt} = \text{div} \frac{d\mathbf{D}}{dt},$$

所以

$$\text{div} \left(\mathbf{j} + \frac{1}{4\pi} \frac{d\mathbf{D}}{dt} \right) = 0.$$

如果假设 $\frac{1}{4\pi} \frac{d\mathbf{D}}{dt}$ 这项象 \mathbf{j} 一样,具有电流的性质,于是有

$$\text{curl} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}.$$

(4) 电动力方程

$$\mathbf{E} = \mu\mathbf{v} \times \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} - \text{grad}\varphi,$$

式中 \mathbf{E} 为电动力; 式中第一项表示导体本身运动产生的电动力; 第二项表示在场中由于磁体或电流强度的改变, 或位置的变化而引起的电动力; 第三项表示电势 φ 引起的电动力。如果导体回路静止, 则第一项为零。将此式两边取旋度并与磁力方程结合起来, 即得

$$\text{curl } \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},$$

写成现代形式的方程为

$$\text{curl } \mathbf{E} = - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}.$$

(5) 电弹性方程

$$\mathbf{E} = K\mathbf{D}.$$

电动力作用于电介质, 使它的每一部分极化, 它的相对的面上出现相反的电荷, 这个电量取决于电动力和电介质的性质。对各向同性的电介质电动力 \mathbf{E} 与电位移 \mathbf{D} 方向相同, 其大小成正比, 比例系数为 K , 写成现代形式的方程为

$$\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}.$$

(6) 电阻方程

$$\mathbf{E} = - \rho\mathbf{j}.$$

电动力作用在导体上, 产生通过导体的电流。式中 ρ 为单位体积导体中的电阻, 写成现代形式为

$$\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E},$$

其中 σ 为电导率。

(7) 自由电荷方程

$$\varepsilon + \text{div } \mathbf{D} = 0,$$

式中 ε 是单位体积内的正的自由电荷量。写成现代形式的方程为

$$\text{div } \mathbf{D} = 4\pi\rho.$$

麦克斯韦在《电学和磁学通论》一书的第 60 条中对上式说明如下: “如果电荷 e 均匀地

(上接第 38 页)

分布在一个球面上, 则在介质中与球心距离 r 处的任何点的电动力强度正比于 $\frac{e}{r^2}$, 因此介质中的电位移将正比于 $\frac{e}{r^2}$ 。如果我们画出半径为 r 的同心球面, 通过这个面的总电位移将正比于 e , 而与 r 无关。如果 U_1 和 U_2 分别是内球面和外球面的电势, 则增加电位移 $d\mathbf{E}$ 所作的功将为 $(U_1 - U_2) d\mathbf{E}$ 。如果取外球面在无限远, 则 U_1 成为带电球的势, 而 U_2 就变为零, 于是这个功就为 $U d\mathbf{E}$ 。但是这个功也是 $U de$, 在这里 de 是球的电荷的增加。如果我们承认电能存在于介质中, 则 $d\mathbf{E} = de$, 即穿过任何同心球面的电位移等于球上的电荷。由此得出结论: 位移电流给任何其它有限长的电流提供了一个连续的、等同于闭合环路中的电流。”^[1]

(8) 连续性方程

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \text{div } \mathbf{j} = 0.$$

这就是电荷守恒定律。

以上八个方程就是麦克斯韦最早提出的电磁场方程组。这是一套完备的电磁场方程组, 只要知道问题的条件, 方程中的变量是完全可以确定的。这个方程组概括了各个电磁学的实验规律, 是能够完整和充分地反映电磁场客观运动规律的理论。

本文经清华大学物理系王以炳副教授审阅、校对, 作者在此表示衷心的感谢。

- [1] J. C. Maxwell, in *The Scientific Papers of James Clerk Maxwell*, ed. W. D. Niven, Cambridge University Press, Vol. I, (1890), 155—209
- [2] E. T. Whittaker, *A History of the Theories of Aether and Electricity*, London, Longmans, Vol. I (1951), 242—247.
- [3] J. C. Maxwell *ibid.*, 451—514
- [4] J. C. Maxwell, *ibid.*, 526—536, 554—564.
- [5] R. A. R. Tricker, *The Contributions of Faraday and Maxwell to Electrical Science*, Oxford, Pergamon Press, (1966), 126—129

机产值将可能达到 2500 万美元, 而 1996 年则将增至 5 亿美元, 到 2000 年达到 18 亿美元。由此可见, 光通信技术的普遍实用化推广有赖于 OEIC, 技术的成熟与发展, 它将成为未来光通信产业发展的关键。