亨利·卡文迪什、约翰·冯·索尔特纳和光线的偏转

大约在1784年，亨利·卡文迪什就已经在牛顿理论和光的粒子模型的基础上计算了光线的引力偏转，但他从未发表过自己的这一计算。他比冯·索尔特纳（Johann Georg von Soldner）首次发表的计算几乎早20年。他们两人的结果略有差别，这是因为卡文迪什讨论从无限远处发射的光，而索尔特纳则讨论从引力物体表面发出的光。在第一级近似时，他们的结果相互一致，都是广义相对论所预言并由实验证实的数值的一半。

当提起引力物体引起光线偏转这一概念时，通常就会想到爱因斯坦的名字，因为他在1915年11月曾利用广义相对论计算并预言了现在为大家所公认为正确的这一效应。1919年英国天文学家在日全蚀时测量到太阳附近恒星位置的偏斜，从而证实了光线经过太阳附近将发生偏转的预言。在60年代后期与70年代初期，有人利用长基线无线电干涉仪测量了来自遥远的类星体的无线电波在太阳附近的偏转，又证实了爱因斯坦的预言，而且其准确度达到1.5%。

今天，像光线偏转这类效应的测量已被用来区别广义相对论和其他关于引力的相对论理论（例如Brans-Dicke的标量-张量理论）。但是在1919年，这类测量的目的是想要区分广义相对论偏转、根本没有偏转和某种所谓的“牛顿”偏转。牛顿偏转值恰好是广义相对论偏转值的一半，它是由爱因斯坦在1911年以等效原理为基础（但没有涉及广义相对论的完美公式）计算出来的。然而比爱因斯坦的计算早一百多年前，就有一个名叫冯·索尔特纳的巴伐利亚天文学家（1776—1833），他利用牛顿的引力理论计算了光线的引力偏转。计算时冯·索尔特纳把光看成由粒子组成，这些粒子除了其速度为光速外，其余都像普通质点一样，在引力场中运动着。冯·索尔特纳的计算虽然曾在较为重要的天文学杂志上发表过，但已在很大程度上被人们所遗忘。直到1921年，在德国的纳粹同情者因为不信任爱因斯坦的“犹太”相对论，才把它重新提出。

光的牛顿偏转在更早一些，大约可能在1784年左右就由亨利·卡文迪什（1731—1810）计算出来，这件事并不广为人知。对卡文迪什大家最熟悉的是：他发现水的化合物本性，证实氢是一种单独的物质，以及完成测定地球密度及引力常数的“卡文迪什”实验。卡文迪什是通过他的好友，一个地质学家、天文学家和自然哲学家John Michell（1724—1793）才对光的引力效应发生兴趣的。1783年，Michell送给卡文迪什一篇论文，在论文中他提出：当光粒子从恒星的引力场传向地球时，由于牛顿引力的作用引起光速减小，可以通过它来测定恒星质量。这篇论文以及随后的卡文迪什与Michell之间的通信明显地促使卡文迪什认为光线轨迹的偏斜或许是一种称量星球的方便的方法（这和目前建议研究起着引力透镜作用的星系与星群的密度分布的想法是类似的）。

Michell在他的1783年论文中指出，他发现了一个质量与密度都足够大的物体有可能使其发出的光完全停止传播，从而使人们看不见它，只察觉到它施于附近星体的引力。现在，对黑洞概念的历史的通俗说明中已广泛地引用了这个看法。1796年，拉普拉斯完全不依赖Michell而独立地作出了同样的预测。某些人竟认为是拉普拉斯的讨论推动了索尔特纳，使他在1801年左右作了对光线弯曲的计算，这真是令人难以理解。

卡文迪什没有发表过他的光线偏转的计算

(实际上他只发表了他的著作的一小部分). 我们可以找到的关于他确实曾做过这一计算的唯一证据，是本世纪初将他的作品汇编与出版的计划过程中，在 Devonshire 公爵所收藏的他的论文中找到了一个单独条目. 卡文迪什在电学方面的论文是由麦克斯韦在 1879 年汇编出版的;第二个汇编他的化学与动力学论文的计划，直到第一次世界大战发生前才刚刚开始，而于 1920 年完成. 曾经在 1919 年带头致力于派遣天文学家小组去测量光的爱因斯坦偏转的英国皇家天文学家 Frank Dyson 爵士，当时受委托处理未发表的天文学论文，而他是这样叙述这一条目的:"这是关于光线被引力偏转的一个孤立而有趣的片断，这种可能性……目前正在引起人们的关注，尽管卡文迪什是以微粒论为基础进行计算的. "这篇论文片断写道:

> "为了求出光线经过任意物体表面附近时由于该物体的吸引力所产生的偏转，
> 设 s 为某一物体的中心，而 a 为表面上的一点. 设在与该物体距离为 as 的圆周上转动的另一物体的速度与光速之比为 $1:u$，则光线偏转角的一半的正弦将等于 $1/(1+u^2)$".

现在知道这一答案与索尔特纳所得到的并不完全相同，尽管在第一级近似中他们是一致的，并且所得到的值是广义相对论数值的一半. 在撇开他自己详细计算的情况下重新算出卡文迪什的答案并找出产生差别的原因是有趣的.

一、在牛顿引力理论中光的偏转

获得光的牛顿偏转的一种方法是: 按照牛顿光学的精神，假设光由物质微粒组成，它们像普通质点一样被万有引力所吸引，按照等效原理，一物体在引力场中的加速度跟它的质量、结构和成分无关. 因此一个光粒子经历的加速度由下式给出:

$$\frac{d^2\boldsymbol{x}}{dt^2}=-\frac{Gm\boldsymbol{x}}{r^3}, \tag{1}$$

式中 $\boldsymbol{x}$ 是微粒的位置矢量，$r=|\boldsymbol{x}|$ 是微粒与质量为 m 的物体之间的距离，t 是时间，而 G 是引力常数. 因为光的速度很大，以致像太阳或地球等弱引力物体的场中，它的轨道是不受约束的，所以运动方程的解是双曲线轨道，它可以用参量表示为

$$r=R(1+e)/(1+e\cos\varphi), \tag{2}$$

$$r^2\frac{d\varphi}{dt}=[GmR(1+e)]^{1/2}, \tag{3}$$

式中 φ 是 x-y 平面内从 x 轴量起的角度，e 是离心率，而 R 是最近点的半径并选定它沿 x 轴(见图 1). 在坐标这样选择时，矢量 $\boldsymbol{x}$ 由下式给出:

$$\boldsymbol{x}=r(\boldsymbol{e}_x\cos\varphi+\boldsymbol{e}_y\sin\varphi), \tag{4}$$

而速度 $\boldsymbol{v}$ 由下式给出:

$$\boldsymbol{v}\equiv\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}=\left[\frac{Gm}{R(1+e)}\right]^{1/2}[-\boldsymbol{e}_x\sin\varphi+\boldsymbol{e}_y(\cos\varphi+e)], \tag{5}$$

$$v^2=\frac{Gm}{R(1+e)}(1+2e\cos\varphi+e^2). \tag{6}$$

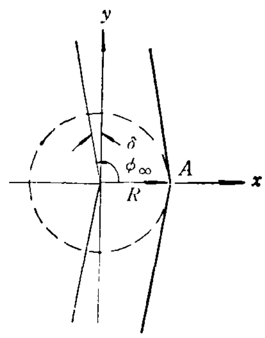

图 1 在最小距离 R 处掠过一质量很大的物体时光线的轨迹(平行于轨迹渐近线的直线与 x 轴成 φ_∞ 角，与 y 轴成 δ 角，净偏转为 2δ)

当 $r\to\infty$ 时，轨迹趋近于与 x 轴成 φ_∞ 角的渐近线，这发生在 $\cos\varphi_\infty=-\frac{1}{e}$ 时，如果我们定义 $\varphi_\infty=\frac{\pi}{2}+\delta$，此处 δ 是偏转角的一半，则

$$\sin\delta=1/e. \tag{7}$$

现在我们需要确定离心率 $\boldsymbol{e}$. 索尔特纳所讨论的问题是在 A 点沿引力物体表面切线方向(即垂直于 x 轴)并向无限远处传播的光微粒的偏转，他假定此质点在 A 点具有标准的光速 c，因

此

$$c^2 = v^2|_{\varphi=0} = Gm(1+e)/R, \quad (8)$$

而

$$e = (Rc^2/Gm) - 1, \quad (9)$$

所以

$$\sin\delta = \varepsilon/(1-\varepsilon), \quad (10)$$

式中 $\varepsilon = Gm/Rc^2$.

这不同于卡文迪什给出的答案，在半径为 $as = R$ 的轨道上的速度是 $(Gm/R)^{1/2}$，因而卡文迪什的符号 u 由 $u = (Rc^2/Gm)^{1/2} = \varepsilon^{-1/2}$ 给出。所以卡文迪什的结果是

$$\sin\delta = \varepsilon/(1+\varepsilon). \quad (11)$$

(10)式与(11)式之间的差别的根源是什么？最简单的解释是卡文迪什假定不是在A点而是在无限远处光速为 c. 在卡文迪什的假定下，

$$c^2 = v^2|_{\varphi=\varphi_\infty} = [Gm/R(1+e)](e^2-1)$$
$$= Gm(e-1)/R. \quad (12)$$

这样

$$e = (Rc^2/Gm) + 1, \quad (13)$$

从而我们得到卡文迪什关于 $\sin\delta$ 的值，即(11)式.

二、讨　论

在牛顿的光学观点中，不论在何处，光相对于发射体的速度都取为 c. 这与相对论的观点明显不同，在相对论观点中任何自由落下或惯性参照系中的观察者测得的光速都为 c，与发射体无关。索尔特纳没有意识到：一条在A点以速度 c 发射而在无限远处被接收的光线，其实际状况并不恰好是一条在无限远处以速度 c 发射而在A点被接收的光线的时间反演，这是因为按牛顿学说沿着轨道存在着速度的变化. 因而，他的结果与卡文迪什的答案略有不同，后者是以假设光在无限远处发射出来为基础的. 当然，沿着轨道光线速度的变化的百分比与 ε 同数量级，因而这两种偏转的相对差别也与 ε 同数量级. 在实用情况中，这一差别是不重要的，因为对于掠过太阳的光线，$\varepsilon \approx 2\times10^{-6}$，所以仅仅一次项是重要的. 在这两种情况下，所得结果总偏转是 2δ 或

$$\Delta\theta = 2\delta \approx 2\sin\delta \approx 2\varepsilon = 2Gm/Rc^2, \quad (14)$$

对于掠过太阳的光线给出 0.875″.

广义相对论使这一效应加倍，实质是增加了引力物体附近空间弯曲的效应，对这种现象牛顿理论本身是没有能力讨论的. 这一预言是所谓广义相对论的后牛顿近似的一部分，因为必须超出牛顿(或“后”牛顿)引力理论之外去看弯曲效应. 再者，还有所谓后-后牛顿效应的偏转的高次项贡献，这样广义相对论的预言通常近似写成

$$\Delta\theta_{GR} \approx 4Gm/Rc^2 + O(Gm/Rc^2)^2. \quad (15)$$

后-后牛顿项已被理论家计算出来，虽然他们所作的贡献仅在微弧秒的水平，但可能有一天它们会被诸如轨道光学干涉仪之类的装置所测出，于是按照这种相同的精神可以把卡文迪什与索尔特纳的计算总结为给出偏转

$$\Delta\theta_{NEWT} \approx 2Gm/Rc^2 + O(Gm/Rc^2)^2. \quad (16)$$

当然，这些牛顿力学的计算并不恰当，因为它们在第一项中就给出了错误结果. 尽管如此，这还是很有趣的，因为这两位在引力场以外的工作中知名的伟大科学家，在爱因斯坦之前一个世纪就彼此独立地想到了光的偏转.

（何克明　沈光年根据 American Journal of Physics 1988 年第5期第 413—415页编译）