几何光学的现代理论——光线力学

薛国良　　张存善

（河北大学物理系，保定 071002）

本文介绍了几何光学的最新发展，系统论述了经典光线力学和量子光线力学的基本概念，讨论了光线力学对传统几何光学和波动光学的影响及其发展前景。

人们熟知，几何光学(光线光学)与经典力学有惊人的相似性：关于光线传输路径的费马原理与力学的变分原理是等价的。但这种等价性在很长一段时间里并未引起人们对几何光学理论的更深入的思考。因为以麦克斯韦方程组为基础的波动光学，是一个成熟的理论，用它几乎可以处理现代光学中的所有问题。70 年代以来，随着纤维光学的发展，人们在处理介质中的光传输和发射问题时发现，光的波粒二象性，特别是光的量子特性就显得尤为重要，只考虑波动光学则会带来局限性。同时，在用波动光学处理问题时求解方程往往很复杂，有时没有解析解。因此，D. Marcuse 等人[1-3]从几何光学与经典力学的相似性出发，建立了哈密顿光学(即下文所说的经典光线力学)，并提出了光线光学的量子理论。现已逐步形成了所谓“光线力学”的理论体系[4]。本文就光线力学的基本概念及其应用前景作一讨论。

一、经典光线力学的基本概念

虽然光线光学方程可由约化波动方程或费马原理得到[3]，但对于建立光线力学(尤其是量子光线力学)体系来讲，从费马原理出发建立光线方程更有其方便之处，先沿此思路来介绍经典光线力学。

采用直角坐标系描述光传输线元 ds，并假设光线沿 z 轴传播，传输介质折射率为 n，则

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \sqrt{(1 + x'^2 + y'^2)}\ dz, \qquad (1)$$

其中 $x' = \dfrac{dx}{dz}$，$y' = \dfrac{dy}{dz}$ 具有斜率意义。费马原理指出：

$$\int_{P_1}^{P_2} n(x,y,z)ds = \text{极值}. \qquad (2)$$

将(1)式代入(2)式可得费马原理的另一表式

$$\int_{P_1}^{P_2} L(x,y,x',y',z)dz = \text{极值}, \qquad (3)$$

式中 L 为光线的拉格朗日函数，由下式定义

$$L(x,y,x',y',z) = n(x,y,z)\sqrt{1 + x'^2 y'^2}. \qquad (4)$$

(3) 式与经典力学中的哈密顿最小作用量原理形式上完全相同，区别仅在于用长度坐标 z 代替了时间坐标 t。(3) 式称为光线力学的哈密顿最小作用量原理。

为建立光线力学的哈密顿方程，引入光线广义动量

$$P_x = \frac{\partial L}{\partial x'},\ P_y = \frac{\partial L}{\partial y'},$$

并定义光线的哈密顿函数为

$$H(x,y,P_x,P_y) = P_x x' + P_y y' - L, \qquad (5)$$

则可建立如下形式的光线哈密顿正则方程

$$\frac{dx}{dz} = \frac{\partial H}{\partial P_x},\quad \frac{dy}{dz} = \frac{\partial H}{\partial P_y};\qquad \frac{dP_x}{dz} = \frac{\partial H}{\partial x},\quad \frac{dP_y}{dz} = \frac{\partial H}{\partial y}, \qquad (6)$$

并求得哈密顿函数为

$$H = -\sqrt{n^2 - P_x^2 - P_y^2}. \qquad (7)$$

此函数恰与静止质量为 m_0 的粒子的相对论能量[5]

$$E = c\sqrt{m_0^2c^2 + P_x^2 + P_y^2 + P_z^2}$$

相似. 如果采用傍轴近似，$x' \ll 1$, $y' \ll 1$（或 $P_x \ll n$, $P_y \ll n$），则通过级数展开，(7)式化为

$$H = \frac{P_x^2 + P_y^2}{2n_0} - n. \tag{8}$$

将此与非相对论近似下的质点力学的哈密顿函数

$$H = \frac{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2}{2m} + V \tag{9}$$

相比，具有惊人的相似性. 可见，在光线力学中，与质点力学中非相对论近似相应的理论是傍轴近似理论. 比较(8),(9)两式可知，光线力学问题比质点力学问题低一维. 粒子势能 V 很自然地由光学媒质的折射率 n 所代替. 此处两个势能的符号差异无关紧要，因为在傍轴近似下，可将折射率的变化表为常数部分 n_0 与小量变化 Δn 之和（$\Delta n \ll n_0$）:

$$n = n_0 - \Delta n. \tag{10}$$

若用(10)式取代(8)式中的 n，则连“势能”项的符号也完全一致，而附加常数 n_0 在物理上并不重要.

在此基础上，欲建立传统的光线光学的程函方程（eikonal equation），只须写出光线力学的哈密顿-雅可比方程即可. 考虑到质点力学的哈密顿-雅可比方程(其中用函数 S 对坐标的导数代替了哈密顿函数中的动量)

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(x, y, z, \frac{\partial S}{\partial x}, \frac{\partial S}{\partial y}, \frac{\partial S}{\partial z}\right) = 0,$$

只需依前作法以空间变量 z 来代替上式中的时间变量 t 并降低一维，则可得光线力学的哈密顿-雅可比方程

$$\frac{\partial S}{\partial z} = -H\left(x, y, \frac{\partial S}{\partial x}, \frac{\partial S}{\partial y}\right). \tag{11}$$

若将(11)式两边平方并利用哈密顿函数的显式(7)式，可有

$$\left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2 = n^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2.$$

这就是程函方程

$$(\nabla S)^2 = n^2.$$

至此，我们已给出了经典光线力学的基本概念并由此导出了程函方程.

二、量子光线力学的基本问题

1. 量子光线力学中的“普朗克常数”

与质点量子力学中的作用量子 $\hbar$ 相对应，可引入量子光线力学中的“普朗克常数” κ

$$\kappa = \frac{\lambda_0}{2\pi},$$

式中 λ_0 为真空中的光波长. 由于力学中的时间坐标现在由标志传播方向的 z 坐标来代替，因而 κ 的量纲不再是能量乘时间，而是哈密顿函数乘长度. 因为哈密顿函数[(7)式]无量纲，故 κ 有长度的量纲. 量子理论的一个著名特征是，在极限 $\hbar \to 0$ 时量子力学过渡到经典力学，则应期望量子光线力学在极限 $\kappa \to 0$ 时与经典光线光学相符合. 由于极限 $\kappa \to 0$ 即为 $\lambda_0 \to 0$，而由波动方程所推导出的程函方程恰在 $\lambda_0 \to 0$ 时成为精确公式，因此 κ 作为量子光线力学中的普朗克常数是非常合理的.

由此可见，欲建立的量子光线力学与由约化波动方程描述的标量波动理论是等效的. 正如 D. Gloge 等人[1]所指出的，由费马原理也可以得到由约化波动方程导出的光线光学的所有方程，但却不能由费马原理重新导出波动方程，因为光线光学只是波动光学的一种近似. 但是，如果建立了光线光学的量子理论(即本文所说的量子光线力学)，则可由光线光学反推出波动方程来.

2. 光线力学物理量的算符化及本征方程

在经典光线力学的基础上进行量子化的重要手续是物理量的算符化:

坐标: $\hat{x}, \hat{y}$.

动量:

$$\hat{P}_x = -i\kappa\frac{\partial}{\partial x}, \quad \hat{P}_y = -i\kappa\frac{\partial}{\partial y}. \tag{12}$$

非相对论哈密顿量:

$$\hat{H} = i\kappa\frac{\partial}{\partial z}. \tag{13}$$

相对论哈密顿量:

$$\hat{H}^2 = -\kappa^2\frac{\partial^2}{\partial z^2}. \tag{14}$$

象质点量子力学一样，量子光线力学问题，归结为对算符本征方程的求解。将相对论哈密顿算符(13)式作用在波函数上，并利用(7)式和(12)式，可得到量子光线力学的克莱因-戈登方程：

$$n^2\psi+\kappa^2\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\kappa^2\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=-\kappa^2\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2},$$

即

$$\nabla^2\psi+\frac{n^2}{\kappa^2}\psi=0.$$

这个方程在形式上与约化波动方程相同。前面的普朗克常数 $\kappa=\frac{\lambda_0}{2\pi}$ 之表示式是由此方程同约化波动方程

$$\nabla^2\psi+\left(\frac{2\pi n}{\lambda_0}\right)^2\psi=0$$

相比较而得到的。

因此，我们可以直接使用量子力学的所有熟知的结论(包括算符的对易关系、厄米性和期望值等)并将之用到量子光线力学中去。如方程的本征值为光线力学物理量的可能测量值，而本征函数模量平方则为其本征值的取值几率。

通过解能量和动量的本征方程，可得到如下的重要结论：能量本征值 E 与波的传播常数 β 成正比 $E=-\kappa\beta$，将此与质点量子力学的相应结果 $E=\hbar\omega$ 比较可知，普通量子力学中的频率在量子光线力学中为传播常数所代替；动量算符的本征态为一个平面波，光线的动量相当于光线的斜率。

3. 量子光线力学中的测不准关系

依上述讨论，可写出量子光线力学的对易关系为

$$xP_x-P_xx=i\kappa,\ xP_y-P_yx=0,$$
$$yP_y-P_yy=i\kappa,\ yP_x-P_xy=0.$$

再根据

$$\Delta x=[\langle(x-\langle x\rangle)^2\rangle]^{1/2},$$
$$\Delta y=[\langle(y-\langle y\rangle)^2\rangle]^{1/2},$$
$$\Delta P_x=[\langle(P_x-\langle P_x\rangle)^2\rangle]^{1/2},$$
$$\Delta P_y=[\langle(P_y-\langle P_y\rangle)^2\rangle]^{1/2},$$

可导出如下的测不准关系为

$$\begin{aligned}\Delta x\Delta P_x&\geqslant\frac{1}{2}\kappa=\frac{\lambda_0}{4\pi},\\ \Delta y\Delta P_y&\geqslant\frac{\lambda_0}{4\pi}.\end{aligned}\qquad(15)$$

据此可研究两个简例：其一，若光线的状态为动量算符的本征态(平面波)，则对光线斜率的每个测量结果必定给出确定的 P 值，但此时却全然不知道光线的位置。因为无限平面波扩展到整个空间，没有哪条光线的位置能够确定。其二，当光束通过非常小的狭缝时，光线的位置在狭缝宽度之内是已知的，然而出射光线的动量(斜率)则随狭缝宽度减小而越来越不确定。这些结果与人们熟知的波动光学的结论是完全一致的。

三、量子光线力学对光学仪器分辨率之应用

作为量子光线力学应用的一个例子，我们来讨论光学仪器的分辨率问题。所谓光学仪器分辨率，从几何光学的观点来看，就是在确定一个像点时，所能确定的一条光线位置的精度极限。按照经典几何光学，每一条光线在光轴上的位置都是唯一确定的，即经典几何光学认为光学仪器具有无限的分辨率。但根据量子光线力学的测不准关系，光线的位置和动量是两个不能以任意精度来确定的量，为了能够以横向精度判定一条光线在光轴上的位置，就必须允许光线动量的扩展。由测不准关系(15)式可得到确定光线位置的精度极限，即像分辨率极限：

$$\Delta x\geqslant\frac{\lambda_0}{4\pi\Delta P}.\qquad(16)$$

在量子光线力学所允许的最精确描述中，可令(16)式取等号，即

$$\Delta x=\frac{\lambda_0}{4\pi\Delta P}.\qquad(17)$$

根据光线力学正则方程(6)式，并利用(7)式可得到光线广义动量的简单表达式

$$P_x=n\frac{dx}{dS}.\qquad(18)$$

如选择图1的坐标系，(18)式可表示为

$$P_x = n\sin\alpha.$$

因为光线广义动量的不确定性与透镜孔径容许的光线最大角度有关(见图 2),则可利用

$$\Delta P = n\sin\alpha$$

作为光线动量不确定性的粗略估计，代入(17)式,可得光学系统分辨率极限为

$$\Delta x = \frac{\lambda_0}{4\pi n\sin\alpha}.$$

若考虑小角度近似（$\sin\alpha\approx\alpha$）及 $\lambda=\lambda_0/n$，则有

$$\Delta x = \frac{\lambda}{4\pi\alpha}.$$

此结果与从波动光学得到的两物点分辨率极限的瑞利判据表达式[6]（其中也用到小角近似）

$$\Delta x = \frac{\lambda}{2\alpha}$$

只有系数的差异．这种差异是由于两种情况下讨论分辨率所用的判据不同引起的，故它们是吻合的．从此例可以看出，用量子光线力学来讨论瑞利极限,不仅经典几何光学做不到,而且其讨论过程也要比波动光学简单．

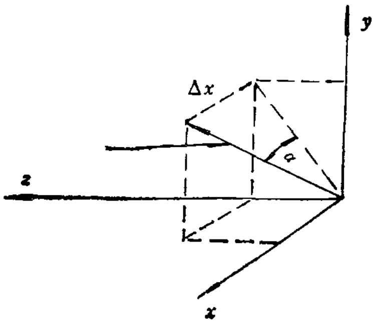

图 1 α 角的定义

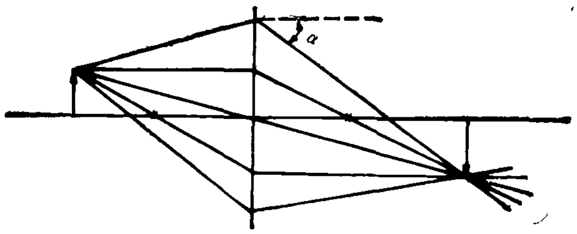

图 2 透镜孔径容许的光线最大角 α

综上所述，量子光线力学的建立将约化波动方程与量子光线力学的克莱因-高登方程等价起来，这不仅给传统的几何光学以新的物理内容(如改变了传统的“光线”面目,使其具有波粒二象性的属性),而且给波动光学以新的内容(如利用光线力学的傍轴近似式与非相对论力学的对应关系可得到约化方程的傍轴近似式[3]等),更为重要的是，它还提供了沿着量子力学的观念和方法来发展光线光学的新途径（如 G. Eichmann 又发展了光线力学的狄拉克理论，并说明了量子光线力学的狄拉克方程等价于与时间无关的麦克斯韦方程[2]）．可以想见，这些结果对于纤维光学和集成光学的发展，甚至对于揭示物理理论中的新概念来说，都是有意义的．

[1] D. Gloge and D. Marcuse, *J. Opt. Soc. Am.*, **59** (1969), 1629.
[2] G. Eichmann, *J. Opt. Soc. Am.*, **61** (1971), 161.
[3] D. Marcuse, Light Transmission Optics, 2nd Edition, Van Nostrand Reinhold, New York, (1982), 82.
[4] 陈雅苻,吉林大学自然科学学报,1990年特刊,14.
[5] 郭硕鸿,电动力学,高等教育出版社,(1979),256.
[6] G. Toraldo di Francia, *J. Opt. Soc. Am.*, **59** (1969), 799.