

# 物质波理论的创立 (I)

向义和

(清华大学现代应用物理系, 北京 100084)

路易·德布罗意 (Louis de Broglie) 是物质波理论的创立者。他提出了电子和原子中的其它粒子具有波动性的假说, 创造性地构思了物质波的概念, 为波动力学的创立奠定了基础, 从而成为现代量子力学新时代的开创者之一。

## 一、物质波思想的起源

德布罗意在谈到关于波粒二象性思想的起源时, 这样写道: “在我年轻时代, 也就是在 1911—1919 年间, 我满腔热情地钻研了那个时期理论物理的一切最新成果。我了解庞加莱、洛伦兹、朗之万……的著作, 也了解玻耳兹曼和吉布斯关于统计力学方面的著作。但是, 特别引起我注意的是普朗克、爱因斯坦、玻尔论述量子的著作。我注意到爱因斯坦 1905 年在光量子理论中提出的辐射中波和粒子共存是自然界的本质现象。在随我哥哥莫里斯作了 X 射线谱的研究后, 我觉察到电磁辐射的这种二重性具有十分重要的意义。在研究了力学中的哈密顿-雅可比理论后, 我进一步在其中发现了一种波粒统一的初期理论。最后, 在深入地研究了相对论后, 我深信它一定是一切新的假设的基础。”<sup>[1]</sup> 他在其它地方还谈到布里渊的原子核周围的以太波的思想对他的影响。本节将从德布罗意提出的这几个方面, 阐述物质波思想的起源。

### 1. X 射线的研究

自从 1895 年伦琴发现 X 射线以后, 对 X 射线的研究就成了一个非常热门的课题。X 射线与  $\alpha$  射线和  $\beta$  射线一样都是从放射性原子中射出的, X 射线通过气体时具有电离气体的能力, 根据这些就可以判断 X 射线显然是一种粒子

流。1911 年, 布拉格在一篇题为《 $\gamma$  射线、X 射线粒子假设的结论和  $\beta$  射线的种类》的论文中写道: “一束 X 射线为一束  $\beta$  射线提供能量, 同样, 在 X 射线管中, 一束  $\beta$  射线激发一束 X 射线……次级  $\beta$  射线的速率是与 X 射线通过的距离无关的, 因此 X 射线的能量在运动中不会扩散, 这就是说, 它是一种粒子。”<sup>[2]</sup> 1912—1914 年间, 莫塞莱利用 X 射线波谱验证了玻尔模型, 又发现了 X 射线谱的频率正比于原子序数  $Z$  的平方, 再一次揭示了 X 射线的粒子性。

1912 年劳厄提出如果 X 射线是波长极短电磁波, 它通过晶体会产生衍射现象, 这一设想被在实验室工作的 Friedrich 和 Knipping 所证实。当 X 射线通过晶体时, 发现了明显的衍射现象, 有力地显示了 X 射线的波动性。

X 射线时而象波时而象粒子的奇特性质使一些实验物理学家感到困惑不解, 在 1912 年末, 在回顾这种情形时, 布拉格作了这段深刻的、有远见的叙述: “对我来说, 问题似乎并不在于判定 X 光的两种理论何者更为正确, 而在于去寻求一种理论, 它能同时把握这两个方面。”<sup>[3]</sup>

莫里斯·德布罗意是路易·德布罗意的哥哥, 莫里斯和布拉格都出席了 1911 年在布鲁塞尔举行的第一次索尔维 (Solvay) 国际物理会议。布拉格关于 X 光的研究给了莫里斯很大影响, 稍后莫里斯的主要研究方向即转为对 X 射线本性的探索。他具有布拉格类似的观点, 但却不想从理论上探讨这一问题。路易·德布罗意说: “我的哥哥把 X 射线看作波和粒子的一种结合, 但他不是一个理论物理学家, 对这个问题没有特别清晰的看法。”<sup>[4]</sup> 莫里斯让他的弟弟阅读索尔维会议的记录, 在他的装置优良的私人物理实验室里进行 X 射线的研究。莫里斯在

1913年10月和1921年4月在布鲁塞尔举行的第二和第三次国际物理会议任科学秘书时, 曾将劳厄在两次会议上和布拉格在第二次会议上分别作的X射线晶体衍射和反射强度的专题报告, 及卢瑟福在第三次会议上报告他的《原子结构》时提到的有关莫塞莱的元素X光谱实验的文件带回家里, 使路易详细了解会议的文件和讨论情况, 对X射线的波动性和粒子性等问题以及当时的研究动向有了深入的认识<sup>[3]</sup>。

1919年战争结束后, 路易·德布罗意又回到他兄长的实验室进行X射线研究。他的头两篇论文就是用玻尔原子理论分析X射线的吸收。随后他又与他兄长合作研究光电效应产生的光谱的测量结果, 他还与其他人合作研究X射线光谱问题。这些研究不但使路易了解到原子结构的许多知识, 更重要的是使他形成了X射线具有波粒二象性的思想<sup>[4]</sup>。他在一篇自传性的短文中写道: “我曾长期向我的哥哥讨论如何解释关于光电效应的和粒子谱的漂亮实验。……同他进行有关X射线性质的长时间的讨论……使我陷入波和粒子必定总是结合在一起的沉思中。”<sup>[2]</sup>

## 2. 接受相对论和光子学说

由X射线的研究所引起的对波粒二象性的思索, 并不是决定德布罗意思想方向的唯一因素, 普朗克的量子论、爱因斯坦的相对论和光子学说对德布罗意物质波概念的形成起着极大的作用。他后来回忆道: “我怀着年轻人特有的热情对这些问题发生了浓厚的兴趣, 我决心致力于探究普朗克早在十年前引入理论物理的, 但还不理解其深刻意义的奇异的量子。”<sup>[4]</sup>

战后, 他继续在巴黎大学攻读他的博士学位。他对于涉及到时间、空间、物质结构和光的本性等基本概念特别感兴趣。例如朗之万的相对论讲演和他对时间概念的分析(朗之万是第一个详细处理所谓“时钟佯谬”的人)给德布罗意留下了深刻的印象。他的位相波概念是与他和时间问题的思考紧密相连的。他曾写道: “时钟频率的相对论性变化及波的频率之间的差异是基本的, 它极大地引起了我的注意, 仔细地考

虑这个差异, 决定了我的整个研究方向。”<sup>[2]</sup> 在本文的第二部分中, 我们将会看到德布罗意正是在解决这一矛盾过程中引入“与质点相缔合的波”的概念的。

德布罗意很早就读过关于光量子假说的文章, 对X射线的研究使他接受了光的波粒二象性思想。1922年1月26日, 他发表了题为《黑体辐射和光量子》<sup>[4]</sup>的论文。他在引言中谈到他试图“只利用热力学, 气体运动理论和量子理论, 而不借助于电磁学推出辐射理论中一系列已知的结果”。他采用光量子假说, 把光子当作具有能量 $h\nu$ 和动量 $h\nu/c$ 的光量子来处理。在他的计算中, 把一定温度下的黑体辐射认为是由光原子组成的气体。他引进了光量子静止质量 $m_0$ 的概念, 并定义光量子的能量为

$$W = h\nu = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

在这里 $v$ 是光量子的速度。他认为 $v$ 低于但又无限接近于真空中的光速 $c$ 。然后, 他按照气体运动理论讨论了这些有质量的光原子组成的系统, 推导出能量在 $W \sim W + dW$ 范围内单位体积中的光原子数为

$$dn_W = \frac{n}{2k^3 T^3} e^{-\frac{W}{kT}} W^2 dW,$$

在这里 $n$ 是单位体积中的光原子数,  $k$ 是玻耳兹曼常数,  $T$ 是绝对温度。每个光原子具有 $3kT$ 的平均能量, 是气体分子具有非相对论性能量的两倍。接着, 德布罗意指出, 如果考虑一种由单原子、双原子、三原子……组成的“光的混合气体”, 则可得到普朗克的黑体辐射公式。

1922年11月, 德布罗意发表了《干涉与光子》一文。在此文中, 他考虑了干涉问题, 认为必须用光子假设来解释干涉现象。他谈到爱因斯坦用能量涨落对热平衡时的黑体辐射所作的分析, 并写下了爱因斯坦的表示式:

$$\overline{(E - \bar{E})^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nh\nu E_n,$$

在此

$$E_n = \frac{8\pi h\nu^3 V}{c^3} e^{-\frac{nh\nu}{kT}} \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

$E$  表示在体积  $V$  中实际辐射能量。而  $\bar{E} = \sum_{n=1}^{\infty} E_n$  是在热平衡时它的平均值。德布罗意认为,上述公式“具有如下的重要性:从光量子的观点来看,干涉现象可被当作与光原子的集合有关。这些光原子的运动不仅不是独立的,而且是相干的.因此,如果有一天光量子理论能够解释干涉现象,那么采用这种量子集合的假定是十分自然的”<sup>[4]</sup>。这就是说,利用这种集合效应可以描述辐射所具有的包括干涉现象在内的象波一样的行为。1963年,德布罗意在巴黎与库恩会晤时指出,这篇论文是他后来工作的出发点。“我开始有了那种想法,不过它尚未诞生,我可能不敢讲出来,但我心中已经开始孕育它。”<sup>[5]</sup>这种对量子论的兴趣促使他去探索把物质的波动方面和粒子方面统一起来的理论。

1923年4月21日,康普顿公布了光经散射后波长变长的结果,并用光量子理论作了正确解释,使德布罗意更加坚定了自己的信念。在德布罗意看来,“最近几年累积的实验证据对光量子的实际存在是一个有力的支持。光电效应看来正越来越倾向于由爱因斯坦的光子假说所统治。不采用光量子概念,要解释康普顿关于散射 X 射线波长变长的最终结果是十分困难的”。但他又不同意一般人把康普顿实验作为粒子判决性实验的看法。德布罗意认为,在一个粒子理论中能量项由  $h\nu$  来定义是不能令人满意的。于是他宣称:“仅此一端就提供了一个必要性,即在光的理论中应该同时引进粒子概念和周期性概念。”<sup>[6]</sup>

德布罗意后来谈到他是如何把光的波粒二象性推广到实物粒子上来的。他在1964年春天致 Fritz Kubli 的信中写道:在1922—1923年期间,当我开始获得波动力学的基本想法时,我的意图是把爱因斯坦发现的光的波粒共存现象推广到所有粒子,因此我开始用爱因斯坦建立的光量子公式:  $W = h\nu$  和  $P = h\nu/c = h/\lambda$ 。我把这些公式应用到光子以外的其它粒子上。对于这些粒子有下列公式:

$$W = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} = h\nu$$

和

$$P = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{h}{\lambda} \left( \beta = \frac{v}{c} \right).$$

不过从我看来,这和爱因斯坦理论还对不上,除非人们赋予光子以适当的质量  $\mu_0$ , 这样允许人们以下列形式写出爱因斯坦方程<sup>[4]</sup>

$$W = \frac{\mu_0 c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} = h\nu$$

和

$$P = \frac{\mu_0 v}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{h}{\lambda}.$$

德布罗意根据相对论力学和光量子假说,从考虑对称性出发,把光看成是由质量极小的、但不为零的、速度接近于但又略低于真空中光速  $c$  的光原子所组成。他认为光子具有质量的想法对他提出实物粒子具有波动性的想法起了很大的作用。

### 3. 哈密顿-雅可比理论的启示<sup>[2]</sup>

最早试图揭开光的本性的神秘面纱,把牛顿的粒子说和惠更斯的波动说统一起来的人是哈密顿,他想使光学具有象拉格朗日所赋予力学那样的“审美性、权威性与和谐性”的一门正规科学。通过寻求支配光的传播和粒子运动的一种单一的自然规律,借助于他的作用函数  $S = \int L dt$  (式中拉格朗日函数  $L = T + U$ ,  $T$  为质点系动能,  $U$  为势能)来达到这点。他发现一个力场中质点的运动与光射线的传播,受同一形式规律的支配。哈密顿的变分原理对于真实运动来讲作用函数的变分为零,即  $\delta \int L dt = 0$ , 在能量为常数时,可以导出莫培督 (Maupertu) 的最小作用原理。这个动力学的古老的变分原理

$$\delta \int 2T dt = 0$$

或

$$\delta \int [2m(E - U)]^{\frac{1}{2}} ds = 0.$$

而费马的最小时间原理可表示为

$$\delta \int \frac{n}{c} dS = 0,$$

即在光线的实际路程上光程的变分等于零。把以上二式加以比较,我们看到在力学中的表示式  $[2m(E-U)]^{-\frac{1}{2}}$  与光学中的相速度  $u = \frac{c}{n}$  起着相同的作用,可以用符号表示为

$$u = \frac{c}{n} \longleftrightarrow [2m(E-U)]^{-\frac{1}{2}}.$$

这一关系称为‘哈密顿的光学力学类比.’然而,这一类比还可以进一步加以推广.作用函数  $S = \int_{t_0}^t L dt$  在位形空间 (configuration space) 确定了一个“作用面” (action surface). 众所周知,  $P = \nabla S$ , 而且  $\frac{\partial S}{\partial t} = -E$  ( $E$  是力学体系的总能量,  $E = T + U$ ). 另一方面对平面单色波,波矢  $\mathbf{k}$  和频率  $\omega = 2\pi\nu$  与位相  $\varphi = -\omega t + \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$  具有如下关系:

$$\mathbf{k} = \nabla \varphi, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\omega.$$

因此,在传播中粒子系统的常数作用面完全类似于光学中的同位相面. 波矢量相应于动量,而频率相应于粒子的能量. 这些结果是哈密顿在 1828 年到 1837 年发表的.

哈密顿-雅可比理论给了德布罗意很大的启发. 40 年后他在追忆波粒二象性思想是如何产生时说:“突然间,我萌发了把光的二象性推广到物质粒子,尤其是电子的想法. 我不能给出确切的日子,但一定是在 1923 年夏天. 我认识到,一方面,哈密顿在某种程度上指出了这点,因为它能适用于粒子,同时又表示一种几何光学;另一方面,在量子现象中得到的量子数很少在力学中被找到,但却常常出现在波动现象以及与波动运动有关的所有问题中,于是,我自信有一种与量子现象相联系的波.”<sup>[4]</sup>

#### 4. 布里渊的驻波

法国的布里渊 (M. Brillouin) 在 1919—1922 年间发表了一系列文章,提出了一个解释玻尔量子化条件的理论. 布里渊设想原子核周

物理

围存在着一层以太,电子就在该以太层中运动,这运动在以太层内掀起波,这些波相互干涉而在原子核周围形成环形驻波. 布里渊认为这一情况可以作为对玻尔神秘的量子化条件的一种物理解释. 布里渊是第一个把电子与波作为一个整体研究的人,但他借助于当时已被物理学家抛弃的以太介质,使得物理学家难于接受. 布里渊曾把自己的上述工作告诉了德布罗意,从而使后者认真地把光的二象性假说同对玻尔模型的研究结合在一起考虑,并把布里渊尊称为“波动力学的真正先驱”<sup>[6]</sup>. 布里渊的儿子证实了这一点,他说:“德布罗意采用了我父亲 1919—1922 年间提出的一些相当不成熟的想法.”但是德布罗意抛弃了以太的错误看法,把属于以太的周期性运动给了电子本身,实现了向波粒二象性思想的过渡.

## 二、物质波理论

1923 年 9 月和 10 月,德布罗意在《法国科学院导报》上发表了三篇关于物质波理论的短篇论文. 这些短文加起来不过十来页却包含了他的新理论的全部要点,标志着物质波的发现. 在写完上述文章后,德布罗意马上投入博士论文的写作. 1924 年夏天,他完成了他的题为《量子理论的研究》的博士论文. 11 月 25 日在巴黎大学举行论文答辩,后来这篇论文发表在 1925 年 1-2 月号的物理杂志上. 他的论文对前一年获得的结果提出了一个系统的有逻辑性的报告,完整地阐述了他的物质波理论及其应用.

### 1. 位相波概念的提出

1923 年 9 月 10 日,德布罗意发表了第一篇关于物质波的论文. 题为《辐射——波和量子》. 在这篇文章中,他提出实物粒子也有波粒二象性,引入了与运动粒子相缔合的波的概念.

德布罗意考虑相对于观察者以速度  $v = \beta c$  ( $\beta < 1$ ) 运动,其静止质量为  $m_0$  的一个质点. 根据相对论质能关系,该质点具有  $m_0 c^2$  的内在能量. 德布罗意把这一能量同量子现象联

系起来,他认为  $h\nu_0 = m_0c^2$ ,即可把这一内能视作频率为  $\nu_0$  的简单的周期性现象。

接着,德布罗意考察了两个频率:一方面,从静止的观察者看来,对应于动点的能量有一频率  $\nu$ 。他认为  $h\nu = mc^2$ ,即

$$\nu = \frac{m_0c^2}{h\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\nu_0}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

另一方面,按照相对论给出的运动时钟变慢效应,当那位静止的观察者观察动点的内在周期性现象时,他就会认为这一现象变缓慢了,或将它看成频率  $\nu_1 = \nu_0\sqrt{1-\beta^2}$  的周期性现象,也就是说,这一内在周期性现象按  $\sin 2\pi\nu_1 t$  的形式变化。

这两个频率  $\nu$  和  $\nu_1$  的差别引起了德布罗意很大的注意,正如他自己所说:“仔细地考虑这个差别决定了我研究工作的整个方向。”为了解决这一矛盾,德布罗意引入了一个“与质点运动相缔合的波”。这波以频率  $\nu$ 、速度  $c/\beta$  沿着与质点相同的运动方向传播。因为速度超过真空中的光速  $c$ ,这个波不可能传递任何能量。德布罗意把它视为一种与质点运动相缔合的假设的波。然后,他证明了如果在开始的时候,动点的内在周期性现象在相位上与波是一致的,那么,在任何时刻,这种位相的一致性将保持下去。

如果在时刻  $t$ ,动点与原点的距离为  $x = vt$ ,其内在周期性运动按  $\sin 2\pi\nu_1 \frac{x}{v}$  变化,而在同一点上与动点相联系的波可以表示为

$$\sin 2\pi\nu \left( t - \frac{x}{c/\beta} \right) = \sin 2\pi\nu x \left( \frac{1}{v} - \frac{\beta}{c} \right).$$

由前面定义的  $\nu_1$  和  $\nu$  可知,

$$\nu_1 = \nu(1 - \beta^2),$$

$$\begin{aligned} \sin 2\pi\nu_1 \frac{x}{v} &= \sin 2\pi\nu \frac{x}{v} (1 - \beta^2) \\ &= \sin 2\pi\nu x \left( \frac{1}{v} - \frac{\beta}{c} \right). \end{aligned}$$

上式说明表示动点内在运动的正弦函数与表示波的正弦函数相等,所以两者在相位上永远保持一致。德布罗意指出:“这一重要结果的论

证完全是以狭义相对论原理和严格的量子关系式为基础的。”

两个星期后,也就是1923年9月24日,德布罗意发表了第二篇关于物质波的论文《光量子,衍射和干涉》。在文章开始德布罗意明确提出了相波概念。他说:“为了描述一个速度为  $\beta c$  的动点的运动,观察者必须将这一动点与一个非物质的,以速度  $c/\beta = c^2/v$  在同一方向上传播的正弦波联系起来。在这个观察者看来,这一波的频率等于上述动点的总能量除以普朗克常数  $h$ 。”由于这动点同位于同一点上的波具有相同的位相,因此德布罗意称此波为“相波”(phase wave)。在博士论文中,德布罗意把这一波称为‘位相波’,认为它是与位相的传播相联系的。

## 2. 波与粒子的对应关系

### (1) 波射线与粒子路径的一致性

1923年10月8日,德布罗意发表了关于物质波的第三篇论文《量子、气体运动理论以及费马原理》。在这篇文章中,德布罗意更加明确地阐述了他的物质波思想。他假定与任何粒子相联系的相波,在空间任何点与粒子同位相。相波的频率与速度由粒子的能量和速度所决定。他强调这些相波特别应当具有这种性质:“相波的射线应当与动力学上粒子的可能轨迹相一致。”他声称相波的射线应当用光学上的费马原理来描述,即

$$\delta \int n dS = 0.$$

因为  $n = \lambda_0/\lambda$  ( $\lambda_0$  为光在真空中的波长,  $\lambda$  为光在媒质中的波长),因此有

$$\begin{aligned} \delta \int \frac{dS}{\lambda} &= \delta \int \frac{v dS}{c^2/v} = \delta \int \frac{m_0 \beta c}{h\sqrt{1-\beta^2}} dS \\ &= 0. \end{aligned}$$

另一方面,粒子的运动轨迹可以由莫培督最小作用原理来描述。在空间两点之间粒子的实际路径满足动量的变分为零,即  $\delta \int m v dS = 0$ ,因此有

$$\delta \int \frac{m_0 \beta^2 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} dt = \delta \int \frac{m_0 \beta c}{\sqrt{1-\beta^2}} dS = 0.$$

两者在形式上完全一致。这就表明空间两点之间粒子的实际路径，与其位相波射线的实际路径是完全一致的。至此连接几何光学和动力学两大原理的基本关系完全明朗。

德布罗意在它的博士论文第二章《莫培督原理和费马原理》中，引入了相对论的四维动量和位相波的四维矢量，证明了这两个原理中的任何一个能用来描述量子。他得出结论：“适用于位相波的费马原理与适用于运动物体的莫培督原理是等同的；运动物体的动力学可能轨道与波的可能射线是等同的。”

### (2) 群速度与粒子速度的等同性

在博士论文第一章中，德布罗意把位相波的两个传播速度、相速度和群速度联系起来，并证明了波的群速度等于粒子速度。

他考虑在同一方向传播的、频率相近且速度随频率变化的两个波。其频率分别为  $\nu$  和  $\nu' = \nu + d\nu$ ，速度为  $v$  和  $v' = v + \frac{dv}{d\nu}d\nu$ ，这一速度称为相速度，即相位的传播速度。将两个波叠加，在略去了  $\delta\nu$  的二次项的条件下，可得

$$\begin{aligned} & \sin 2\pi\left(\nu t - \frac{\nu x}{v} + \varphi\right) + \sin 2\pi\left(\nu' t - \frac{\nu' x}{v'} + \varphi'\right) \\ &= 2 \cos 2\pi\left(\frac{\delta\nu}{2}t - x \frac{d\frac{\nu}{v}}{d\nu} \frac{d\nu}{2} + \varphi'\right) \\ & \cdot \sin 2\pi\left(\nu t - \frac{\nu x}{v} + \varphi\right), \end{aligned}$$

式中余弦部分表示一个缓变的“振幅”，它代表合成波的整体轮廓，表示一条调制曲线。上式就是一个振幅受频率  $\delta\nu$  调制的正弦合成波。这种调制波称为波群，包迹的移动速度是波群的整体移动速度，称为群速度，用  $v_g$  表示。由上式的余弦部分可以得

$$\frac{1}{v_g} = \frac{d\left(\frac{\nu}{v}\right)}{d\nu}.$$

现在来证明位相波的群速度等于运动物体

的速度。如果给予运动物体一个速度  $U = \beta c$ ， $\beta$  的值没有完全确定，但仅要求这个速度在  $\beta$  和  $\beta + d\beta$  之间，相应的频率在一个很小的间隔  $\nu$  和  $\nu + d\nu$  之间，与该粒子运动相耦合的位相波的速度  $v$  和  $\nu$  可以看成是  $\beta$  的函数。因为

$$v = \frac{c}{\beta}, \quad \nu = \frac{1}{h} \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

相波波群的群速度可以写成

$$v_g = \frac{\frac{dv}{d\beta}}{d\left(\frac{\nu}{v}\right)/d\beta}.$$

而

$$\begin{aligned} \frac{dv}{d\beta} &= \frac{m_0 c^2}{h} \frac{\beta}{(1 - \beta^2)^{3/2}}, \\ \frac{d\left(\frac{\nu}{v}\right)}{d\beta} &= \frac{m_0 c}{h} \frac{d\left(\frac{\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}}\right)}{d\beta} \\ &= \frac{m_0 c}{h} \frac{1}{(1 - \beta^2)^{3/2}}, \end{aligned}$$

因此

$$v_g = \beta c = U.$$

相位波的群速度正好等于运动物体的速度。这个关系对理论的发展是很重要的。

### (3) 波长与粒子动量的关系

在博士论文第七章《统计力学和量子理论》中，德布罗意明确指出，对于速度较小的非相对论气体分子，相波波长为

$$\lambda = \frac{c^2/\nu}{m_0 c^2/h} = \frac{h}{m_0 \nu}.$$

对运动质点同样有

$$\lambda = \frac{h}{m\nu}.$$

这就是著名的德布罗意波长与动量的关系式。值得注意的是，这一公式以如此明晰的形式在他的论文中出现，仅仅只有这一次。这个式子和  $E = h\nu$  一起，后来被称为爱因斯坦-德布罗意关系。