# 重力加速度的新探索

钟 鸣 乾

（西北大学物理系，西安 710069）

简要介绍了重力加速度在理论和实验上的新探索，即“引力常数 $G$”的可变性对重力加速度的影响，阐述了在广义相对论等引力理论基础上重力加速度的后牛顿效应.

1992 年是伽利略逝世、牛顿诞生 350 周年，这意味着由伽利略和牛顿开创建立的经典力学已有 300 余年了. 从那时以来，经典力学已形成系统完整的体系，有比较成熟的丰富内容，应用到日益广阔的科学技术和工程的领域. 重力加速度的有关内容是力学的基本课题之一，在伽利略时代的自由落体实验就开始了这方面的科学研究. 它也是牛顿万有引力定律直接得到的结果，其基础内容为我们所熟悉. 但是，今天深入研究重力加速度 $g$ 并没有失去它的科学意义和应用价值，尤其是在地球科学方面，它是有关分支学科的基础和讨论问题的出发点，如地球形状和重力学，地球物理学的重力学和重力勘探等，这已是有关教科书或专著的内容. 现代人造地球卫星、各种飞行器精确激光测量技术应用及高速电子计算机又为重力加速度的精确测量提供了有利条件，因此重力加速度 $g$ 的测量精确度在不断提高，研究也越来越深入，并继续进行着新的探索.

重力加速度（对单位质量，重力加速度亦可用重力表示），是指质点在地球的万有引力及其自转离心力合力作用下的加速度，主要是指前者. 它有两方面的含义：1. 表示质点在引力场中运动具有的加速度；2. 表示地球引力场的强度，等于质点单位质量所受的引力，反映引力场本身的性质. 重力加速度的最基本计算公式是牛顿万有引力定律——与距离平方成反比定律的直接结果. 假设地球是一个密度均匀的球体，重力加速度 $g$ 的计算公式（不计离心力）为

$$g = Gm/r^2, \tag{1}$$

式中 $G$ 是万有引力常数. 在地球内部，$r$ 是球内所求 $g$ 值的点至球心距离，$m$ 是以 $r$ 为半径的球内的质量. 在地球表面 $m = M$（$M$ 为地球质量），$r = R$（$R$ 为地球半径），可求得地球表面的重力加速度近似为 $9.8\mathrm{m\cdot s^{-2}}$ [即 980Gal，1Gal（伽）$= 1\mathrm{cm\cdot s^{-2}}$]. 在地球外部 $m = M$，$r$ 为球外所求 $g$ 值的点至球心距离.（1）式是计算重力加速度最基本最简单的公式，也是得到各种较复杂的、实用的、近似的和精确的计算公式的出发点之一.

## 一、$G$ 的可变性对重力的影响[1-9]

万有引力定律发现至今已有 300 多年了，但相对比较而言，引力常数 $G$ 仍是测量精确度最差的一个基本物理常数. 于是在肯定这定律的重大意义和应用的同时，仍对它有一些怀疑，结合物理学基础理论的其他领域的深入研究，思考它存在的问题. 如果该定律的数学表示式中的 $G$ 不是常数而是距离 $r$ 的函数，即引力与平方成反比定律发生偏离，这就意味着作为万有引力定律直接得到的重力加速度的概念和数学表达式就有新的含义，并导致新的计算公式，这是重力在理论上和实验上的新探索的一个重要方面.

万有引力定律主要是根据行星运动的观测资料总结出来，也就是说，在太阳系天体的大尺度范围（$10^3$—$10^8$km 以上）内观测得到的. 在历史上，实验室中对该定律的检验，以及关于 $G$ 的测定，是在 5—100cm 的引力范围内进行

的．严格地说，天体尺度和实验室尺度测得的$G$并不相等．这也是有关学者怀疑$G$是否是常数的一个原因，并促使实验工作者在中间尺度（$1$—$10^3$m）范围测量$G$和检验牛顿万有引力定律．

关于引力与平方成反比定律的偏离，在理论上首先是从粒子物理和场论的研究中提出的．在粒子物理中万有引力是可以忽略的，主要是强、弱和电磁力．在引力场论中，引力场方程是二阶非线性偏微分方程，在弱引力场和低速运动的特殊情况下，简化为牛顿引力场方程（泊松方程），得到万有引力定律，这称牛顿近似或牛顿极限情况．如果引力场方程是高于二阶的高阶偏微分方程，那么在弱场情况下不能简化为牛顿极限情况，或者说，与平方成反比定律发生偏离，数学式中出现了非牛顿引力的附加项．这也是理论上思考非牛顿引力可能存在的原因之一．第一个从粒子物理角度提出引力与平方成反比定律偏离的理论工作是 Fujii 1971 年发表的[2]．

重力加速度$g$是引力势$U$的梯度．从粒子物理和场论，提出引力势的如下表示式：

$$U(r) = -\frac{G_\infty m}{r}(1+\alpha e^{-r/\lambda}), \qquad (2)$$

式中第一项是通常的牛顿引力势，$G_\infty$是$r\to\infty$时的引力常数；第二项是短程作用的汤川（Yukawa）型势，即类似于汤川提出的核子间相互作用的核力对应的势；$\alpha$为一系数，表示短程力的变化幅度，最初 Fujii 从理论确定$\alpha=1/3$，进一步实验估计$|\alpha|<10^{-2}$；$\lambda$为力程，可取$\lambda=10$—$1000$m．有些学者把汤川型势所对应的力解释为自然界存在四种基本力（引力、电磁、弱、强）之外的“第五种力”．然而关于第五种力目前在理论上和实验上仍争论很大，国际上许多精密物理实验室都在致力于第五种力试验，但至今难于有明确结论．

因重力加速度是引力势的梯度，于是可得

$$g = -\frac{dU}{dr} = \frac{G_\infty m}{r^2}\left[1+\alpha\left(1+\frac{r}{\lambda}\right)e^{-r/\lambda}\right]. \qquad (3)$$

令

$$G(r) = G_\infty\left[1+\alpha\left(1+\frac{r}{\lambda}\right)e^{-r/\lambda}\right], \qquad (4)$$

得

$$g = G(r)m/r^2. \qquad (5)$$

由（4）和（5）式可知，$G$已不是常数了，而是距离$r$的函数．这就表示引力与平方成反比定律发生偏离，重力加速度$g$随距离$r$而变化有新的含义和计算公式．

在天体的大尺度范围内，$r$很大，在极限情况下取$r\to\infty$，即$r/\lambda\gg 1$，得

$$G(r) = G_\infty = \text{常数}. \qquad (6)$$

在实验室小尺度范围内，$r$较小，在极限情况下取$r\to 0$，即$r/\lambda\ll 1$，得

$$G(r) = G_0 = G_\infty(1+\alpha). \qquad (7)$$

（6）和（7）式表明，大尺度的$G$值与小尺度$G$值不同．

随着理论工作的进行，实验工作进一步开展起来．在分析实验结果时，常用如下表示式：

$$G(r) = G_0(1+\varepsilon\ln r), \qquad (8)$$

其中$r$以 cm 为单位；$\varepsilon$是一小参数，可称偏离参数．当$r$在一定范围内时，用它来描述引力与平方成反比律的偏离，$\varepsilon$越大，偏离越大．

D. R. Long 首先分析了历史上对引力常数的实验测量结果，发现$G$值有随距离增大的倾向．他进一步做测量$G$的实验．他的实验是以两个圆环作质量源，用扭秤法在不同作用距离下对$G$作绝对测量，并比较它们的大小．1976年，Long 发表了他的实验结果[3]，表明 30cm 作用距离的$G$值比 4.5cm 作用距离的$G$值大（$0.37\pm0.07$）%，由此给出

$$\varepsilon = (20\pm4)\times10^{-4}.$$

但是，以后他人的实验并没有像 Long 给出的那样大的偏离参数．虽然大多数实验也并不否定 Long 的结果，然而这些实验的精确度较差．可是，Spero，Newman 和我国的陈应天等的较精确实验却都完全否定了 Long 的实验结果．

在历史上首先是用地球物理方法测量重力和确定$G$，因精度差而被实验室方法所代替．

随着现代科学技术的发展，仪器的改进，测量技术和精确度的提高，地球物理方法又被引起重视. F D Stacey 及其合作者用地球物理方法，按重力加速度与地球密度及几何参数和地理纬度等的关系，在 950m 深的矿井里，测量不同深度的重力加速度，从而确定了$G$值，1981年发表的结果是[4]

$$G=(6.71\pm0.13)\times10^{-11}\mathrm{m^3kg^{-1}s^{-2}}.$$

此值约比实验室值要大 0.6%. 以后他们又分析了海面、海底和其他矿区的引力资料，得到的$G$值也比实验室值大. 从 Stacey 等人的实验结果，求得在 $10-10^3$m 尺度范围内的$\varepsilon$值为

$$\varepsilon\approx(13\pm1.3)\times10^{-4}.$$

于是 Stacey 等的测量工作是继 Long 等之后第二个表明万有引力可能偏离平方成反比定律.

到本世纪 80 年代，有人在高电视塔上进行重力测量. D. H. Eckhardt 等人在 600m 高的电视塔上，测出塔上不同高度的重力值. 1988年发表他们的测量结果，在塔底的值 $g_0$ 与塔顶部（562m）的值 $g_m$ 之差为[8]

$$g_0-g_m=(-500\pm35)\times10^{-8}\mathrm{m\cdot s^{-2}},$$

表明重力与平方成反比定律有微小偏离.

综上所述，近 20 多年来，重力的新探索之一是重力对于平方成反比定律的偏离，即$G$不是常数，在三个距离尺度范围（三个领域）内进行观测和检验，有一些初步结果，但无定论.

1. 在天体物理的大尺度范围内（约 $10^3-10^8$km），用天体力学方法进行重力测量，得到结果是：在大于 $10^3$km 范围内，可认为$G$是不随距离$r$变化的常数$G_\infty$.

2. 在实验室的小尺度范围内（约 5—100cm），主要用扭秤方法进行重力测量，有实验结果认为 $G(r)$ 有随距离$r$增大的倾向，但也有实验否定这结论.

3. 在地球物理的中间尺度范围内（约 $10-10^3$m），用地球物理仪器和方法，在地球表面的数百米深的矿井里和数百米高的电视塔上测量重力，表明$G$有随距离$r$增大的趋势，但测量精确度还不高，仍未公认.

关于上述的重力的新探索，涉及到经典物理学基础理论的基本常数和基本定律，因而对物理学理论体系的基础有很大影响，在理论上和实践上都有重要意义.

另外，还有学者提出$G$在宇宙的大尺度的时空范围内随时间而变化，是宇宙学问题，这里不作阐述.

## 二、重力加速度的后牛顿效应[1,10-12]

牛顿引力论在19世纪取得辉煌成就，但它解释自然现象时仍有疑难问题. 例如，19 世纪后半叶天文学上观测到的水星近日点进动，它不能定量解释；以牛顿引力论研究时空的大尺度结构（无限的宇宙空间），出现引力场强度无限大的困难. 牛顿万有引力定律不能纳入狭义相对论的理论体系. 于是，在 70 多年前，爱因斯坦就已提出了数学上逻辑上完美的、能解释牛顿引力论所不能解释的现象的新引力理论——广义相对论，即爱因斯坦引力论. 广义相对论在数学上较为复杂和困难，引力场方程是非线性偏微分方程组，一般的精确解（如一般球面波解）至今尚未得到，只求得特殊情况下的一些精确解，如史瓦西解等. 这一引力论主要应用于强引力场. 对于弱引力场，广义相对论得到的结果只是对牛顿引力论的结果的微小改正，在极限情况下两者相同，或者说牛顿引力论是广义相对论的极限情况，即最低级（零级）近似. 所以，用广义相对论讨论弱引力场情况下的具体问题，可不严格地求精确解，而求近似解. 实际上已建立两种系统的基本的近似方法——弱场近似法和后牛顿近似法，这两种方法是相互联系的.

判断引力场的强弱，根据产生引力场的物体的质量、线度大小及与场中的点的距离. 对于一个天体（假设是球对称的），可引入量 $2GM/c^2r$（$c$为真空中光速，$M$为天体质量，$r$为空间尺度或天体半径，$2GM/c^2$ 称为史瓦西半径）. 如果 $2GM/c^2r\ll1$，那么$r$处的场是弱引力

场．设 $r$ 为天体半径，对于太阳 $2GM/c^2r$ 为 $10^{-5.4}$，地球为 $10^{-9}$，月球为 $10^{-10}$，由此可知，太阳系天体产生的引力场都是弱场，离天体越远，引力场越弱．宇宙中，有的天体能产生很强引力场，如中子星，$2GM/c^2r$ 为 $10^{-1}$．所谓后牛顿近似（post-Newtonian approximation）就是在较弱引力场的情况下比牛顿近似的精确性高一级的近似，即与引力场有关的物理量的改正值准确到（$2GM/c^2r$）的一次方的数量级．或者说，如果反映引力场性质的有关量以小量 $2GM/c^2r$ 展开为幂级数，取准确到一定量级的项，代入引力场方程和运动方程求解，准确到 $2GM/c^2r$ 量级，就是后牛顿近似．假使一质点在引力场作用下运动得到速度 $v$，$2GM/c^2r \approx v^2/c^2$，那么后牛顿近似也就是改正值准确到 $v^2/c^2$ 量级的近似．广义相对论的著名的三大验证虽是从引力场方程的精确解（史瓦西解）出发的，但最后计算结果实际上都是后牛顿近似．

自从发表广义相对论以来的 70 多年里，已提出数十种其他引力理论，其中有一类称为"度规理论"．广义相对论也是一种度规理论，而且是最基本最典型的一种．所谓"度规"（metric），其本来含义是指量度空间几何性质（长度）的标尺（米尺），在度规引力理论中，因引力与空间几何性质相联系，所以度规就是表示空间几何性质和引力性质的基本物理量．对于各种不同的度规引力理论，可表达为包含若干参量的统一形式的后牛顿近似表示式，在不同引力理论中这些参量不同．通过实验观测后牛顿效应，确定各个参量值，可检验各种引力理论．对于地球及太阳系内其他天体，已有计算重力加速度的后牛顿近似的方法并试图进行测量，这也是重力加速度在理论和实验上的新探索之一．

根据爱因斯坦引力论和布兰斯-迪克（Brans-Dicke）引力论，我们已得到质点在太阳系天体引力场内运动的重力加速度后牛顿的统一表示式[12]：

$$g_P = g_N\Big[1 - (2\gamma + 1)(GM/c^2r) + \frac{1}{2}(\gamma + 1)v^2/c^2 - \frac{1}{2}(3\gamma + 5) \times (v_1\cos\varphi + v_2\sin\varphi)^2/c^2\Big], \tag{9}$$

$$\Delta g_P = g_P - g_N, \quad g_N = GM/r^2, \tag{10}$$

式中 $g_P$ 为重力加速度的后牛顿值，$g_N$ 为牛顿值，$\Delta g_P$ 为后牛顿改正值．$\gamma$ 是一参数，在爱因斯坦理论中 $\gamma = 1$，在布兰斯-迪克理论中 $\gamma = (\omega + 1)/(\omega + 2)$．$\omega$ 是无量纲的参数，对于地球 $\omega \approx 6$．须注意，在后牛顿近似中 $G$ 是常数．$c$ 为真空中光速．$M$ 为地球和天体质量．$r$ 为引力场中的点与球心的距离．$\varphi$ 为质点轨道平面内的位置角（坐标）．$v$ 为质点速度，$v_1$ 和 $v_2$ 是速度的直角坐标分量．对于爱因斯坦引力论，$\gamma = 1$，如果再取 $\varphi = 0$，$v_1 = 0$，$v_2 = v$（绕地球的人造卫星在椭圆轨道上运动过近地点时就是这种情况），那么由（9）和（10）式得

$$g_P = g_N\left(1 - \frac{3GM}{c^2r} + \frac{v^2}{c^2}\right) \approx g_N\left(1 - \frac{2GM}{c^2r}\right), \tag{11}$$

$$\Delta g_P = g_P - g_N = -g_N\frac{2GM}{c^2r} = -\frac{2G^2M^2}{c^2r^3}. \tag{12}$$

由（12）可知，重力加速度的后牛顿改正值 $\Delta g_P$ 主要决定于天体的质量及试验质点与天体中心的距离，并且后牛顿值比牛顿值小．在地球表面附近，根据（12）式估算出后牛顿改正值为 $-1.4\times10^{-8}\mathrm{m\cdot s^{-2}}$，这数值比其他各种干扰因素引起的 $g$ 值变化小，难于测量．对于太阳系最大行星——木星，它的质量是地球的 318 倍，半径是地球的 11 倍，估算在木星表面附近的重力加速度的后牛顿改正值为 $-110\times10^{-8}\mathrm{m\cdot s^{-2}}$，这数值的绝对值约是地球表面附近的 80 倍．因此，如果改进测量方法，提高测量技术和精确度，那么可能测出重力加速度的后牛顿改正值．根据（9）式，能进一步算出 $\gamma$ 值，可成为检验和鉴别爱因斯坦理论和布兰斯-迪克理论的方法

之一。

探索重力加速度的后牛顿效应，在理论上和实践上都是很有意义的。


[1] 秦荣先、阎永廉，广义相对论与引力理论实验检验，上海科学技术文献出版社，(1987)，第六章和第三章.

[2] Y. Fujii *Nature* (London), *Phys. Sci.*, **234** (1971), 5.

[3] Long D.R., *Nature* (London), **260**(1976), 417

[4] F D. Stacey, et al., *Phys. Rev D*, **23** (1981), 1683.

[5] D. R. Mikkelsen, and M.J. Newman, *Phys. Rev. D*, **16**(1977), 919.

[6] S C. Holding et al., *Phys. Rev. D*, **33** (1986), 3487.

[7] F.D Stacey et al., *Rev. Mod. Phys.*, **59** (1987), 157.

[8] D. H. Eckhardt, et al., *Phys. Rev. Lett.*, **60** (1988), 2567.

[9] 邓祖淦编译，物理，**16**(1987)，676.

[10] S. 温伯格(邹振隆等译)，引力论和宇宙论，科学出版社，(1980)，第九章.

[11] 钟鸣乾，自然杂志，**10**(1987)，904.

[12] 钟鸣乾，科学通报，**36**(1991)，875.


# 超声顺磁共振的原理和应用


刘方新　　李宗民

（中国科学技术大学，合肥　230026）



本文讲述了超声顺磁共振的基本原理，介绍了两种观测方法：超声吸收饱和法及超声吸收附加法；比较了超声顺磁共振法和电子顺磁共振法的差异及优缺点；扼要地介绍了超声顺磁共振法在金属、半导体和一些晶体的原子热运动、原子排布和对称性及结构缺陷等方面研究中的应用.


## 一、原　理

在直流磁场中，顺磁晶体会吸收具有一定频率的超声能量，即对声子的吸收具有频率的选择性。这种现象与电子顺磁共振现象颇相类似[1-5]。

电子除了具有质量和带有电荷以外，还具有动量矩，或称为自旋，因此也具有磁矩. 由于电子的自旋 $s=1/2$，所以电子在外磁场 $H$ 中，其自旋 $z$ 分量或是顺着磁场 $H$ 的方向，或是处于与磁场相反的方向，二者必居其一。这两种取向分别对应于两个不同的能级，其关系可用下式表示：

$$\varepsilon=\pm\frac{1}{2}g\cdot\mu_B\cdot H.$$

这两个能级间的能量差为

$$\Delta\varepsilon=g\cdot\mu_B\cdot H,$$

其中 $g$ 为朗德 (Lande) 因数，对于自由电子，其值为 2；$\mu_B$ 为玻尔磁子，其值为 $9.247\times10^{-24}$J/T。对于顺磁性离子，可作类似处理. 在稳定磁场中，离子自旋可处于几种状态。这时它在磁场方向上的投影分量等于 $m_s h/2\pi$，其中 $h$ 为普朗克常数，$m_s$ 为磁量子数，它可以取 $(2s+1)$ 个值，$s$ 是顺磁离子的总自旋量子数. 对于电子取值为 1/2。一般可能取的值为 1/2，1，3/2等，相邻能级间的能量差也可以用前面同一公式来表示. 在频率为 $\nu$ 的交变磁场作用下，电子将由一个能级跃迁到另一个能级，并满足如下的条件：

$$h\nu=g\mu_B\Delta m_s H. \qquad (1)$$

顺磁晶体在交变频率为 $\nu$ 的电磁场中受激发时，要符合(1)式。要满足这一条件，就得有选择地吸收交变电磁场的能量，这样就导致产生电子顺磁共振现象。

晶体中的顺磁离子，当处于很强的内电场中时，会使共振条件发生改变：能量为 $\varepsilon_m$ 的离子所处的能量状态会因晶体内电场参量的不同而产生变化。这一变化也不一定与磁场 $H$ 成正比。在直流磁场中，若以频率为 $f$ 的超声波激发顺磁晶体并且频率 $f$ 满足

$$\varepsilon_{m+\Delta m}-\varepsilon_m=hf \qquad (2)$$