

# 分形——它的应用与进展讲座

## 第五讲 如何测量分形维数

王 坚

(北京科技大学材料物理系,北京 100083)

在传统的欧几里德几何中研究的结构,比如正方形、圆、直线、柱体等,都可以用一定的特征长度来完全描述。比如知道圆的半径,就可以画出来。对于自然界的几何结构,象树、云、山脉、波浪、海岸线等,都是不规则的,没有特征长度,如何来定量特征这些结构呢?

Mandelbrot 发现在这些不规则结构中有一类非常普遍的结构,从不同的尺度范围来看,它们与整体是自相似的<sup>[1,2]</sup>。比如树,它的一支树枝与整体是自相似的。用放大镜来观察水中的旋涡与不用放大镜时看到的相似。望远镜中看到的云的那部分与不用望远镜时看到的整块也是相似的。对于这种实际的客体,用自相似性概念来描述它们时存在一点统计误差是正常的。数学上可以构造严格自相似的结构。比如按图 1 所示的方法无穷进行构造的柯西曲线,每一部分与整体是严格自相似的。对于实际的客体,也不能进行无穷的放大或缩小。它有一定的大小。组成它的最小单元,比如原子,限制

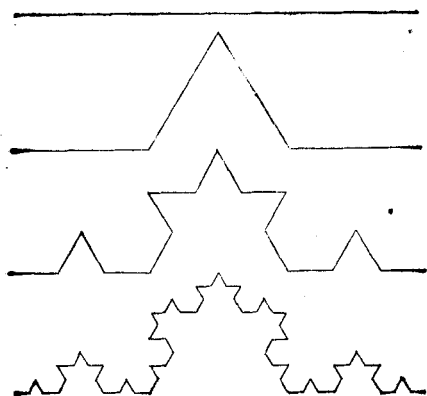


图 1 柯西曲线的构造

了自相似性有意义的下界。

数学上自相似性可以表示成

$$f(\lambda r) = \lambda^\alpha f(r), \quad (1)$$

其中  $\lambda$  称标度因子,  $\alpha$  称为标度指数。具有这种性质的  $f(r)$ , 差一个常数因子, 可以表示成

$$f(r) \sim r^\alpha. \quad (2)$$

对于我们研究特定的具有自相似性的几何结构,  $\alpha$  就称为分形维数, 并用  $D$  来表示。这可以类比二维规则几何图形面积与尺度的平方关系, 或三维规则几何结构体积与尺度的立方关系。因此指数  $\alpha$  描述了结构的性质。而函数  $f(r)$  应该是一种面积、体积、质量, 占有数等性质的测度。下面将详细介绍实用的分形定量方法。

### 一、盒子计数方法与海岸线测量方法

许多实际图象可以通过摄像机传到计算机系统中转变成离散的数值图象。然后就可以方便地用盒子计数方法进行分形分析<sup>[3]</sup>。其原理如图 2 所示。通过循环语句步长的设定, 在图象上覆盖一网格, 然后计数被图象象点占据的格子数目, 如图中阴影的格子数目。如果格子数目  $N$  与步长  $\varepsilon$  有如下关系:

$$N \sim \varepsilon^{-D} \quad (3)$$

这关系用对数坐标图表示出来, 即是一条斜率为  $-D$  的直线, 则说明结构具有分形性。分形维数即为  $D$ 。对于三维数值图象, 则用边长为  $r$  的立方体代替图 2 中的格子就可同样方便地进行。

这一方法与 Mandelbrot 在他的经典著作

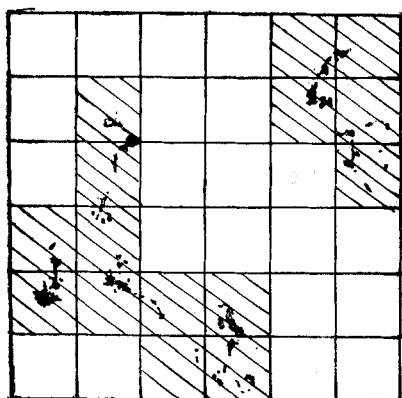


图2 盒子计数方法原理示意图

“自然的分形”<sup>[4]</sup>一书中描述的海岸线的测量方法是一致的。比如图3所示是一段海岸线，用以公里为单位的尺子来测量海岸线时，忽略了诸如石块、砂子等细节，这些细节将随着使用米尺或毫米尺而被测量出来，测量的次数呈指数增加。经验规律如(3)式。不同地区的海岸线由于曲折程度不一样，反映在维数 $D$ 值上不一样。较平直、光滑的海岸线，则 $D$ 值接近于1。

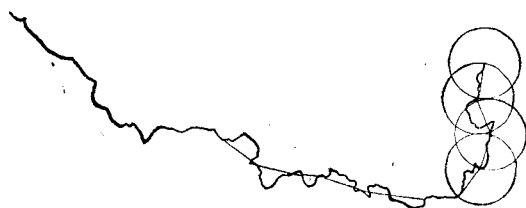


图3 海岸线的测量

## 二、质量与尺度关系

对于结构标度的分形体来说，质量与尺度存在如(2)式的关系：

$$M \sim r^D. \quad (4)$$

对于分布均匀的正方形或圆，则 $D=2$ 。对于球，则 $D=3$ 。但是对于破碎不规则的分形体， $D$ 就可能是分数指数了。

尺度 $r$ 可以用结构的回旋半径来量度，也可以用结构特征的最大直径与最小直径的平均值，或质心到最远点的距离来量度。涨落可以通过大量结构的测量来平均掉。误差是允许

的。只要双对数图上质量与尺度的线性关系存在，则结构具有分形性。

在计算机图象处理时，可以通过计数一定尺度 $r$ 的圆或方格子中象点的数目作相应的质量。然后变化 $r$ 的大小再进行计数。如图4是对上下或左右无限连续的渗流集团的测量示意图，渗流集团的分形维数为1.89<sup>[4]</sup>。

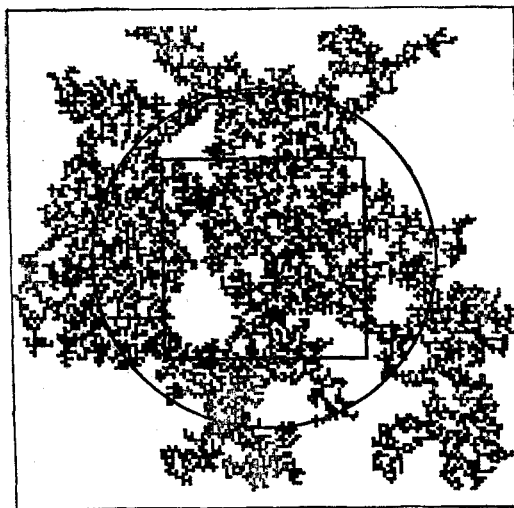


图4 计数不同尺度大小的圆内或正方形内象点数目测量渗流集团分形维数

## 三、相关函数方法

相关函数是按下式定义的一个统计量

$$c(r) = \langle P(x)\rho(x+r) \rangle, \quad (5)$$

$\langle \rangle$ 表示平均。如果 $x$ 是固定点，则平均是对距离 $x$ 为 $r$ 的所有点进行的，否则还要对所有 $x$ 点进行。对图象点可以取 $P(x)=1$ ，否则 $\rho(x)=0$ 。对于分形体有

$$c(r) \sim r^{-\alpha}, \quad (6)$$

指数 $\alpha$ 与分形维数 $D$ 的关系为

$$D = d - \alpha, \quad (7)$$

其中 $d$ 是所在空间的维数。因为(5)式中 $x$ 当作固定点时，它表示距离它 $r$ 处的平均密度，因此

$$M \sim \int c(r) d^d r \sim \int r^{-\alpha} r^{d-1} dr \sim r^{d-\alpha}. \quad (8)$$

由(4)式可得(7)式。

Witten 和 Sander 在他们著名的 DLA 凝聚体的分析时使用了这一方法<sup>[7]</sup>。图 5 是计算机模拟的约有 3000 粒子的 DLA 凝聚体例子。这种凝聚结构非常普遍。比如松花蛋上的松花,雪花,闪电<sup>[6]</sup>,流体渗透<sup>[7]</sup>。图 6 是图 5 的相关函数分析结果。

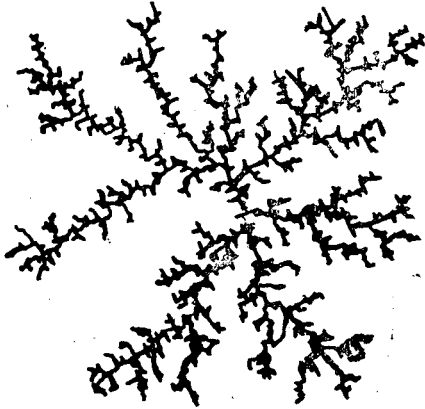


图 5 DLA 凝聚体例子

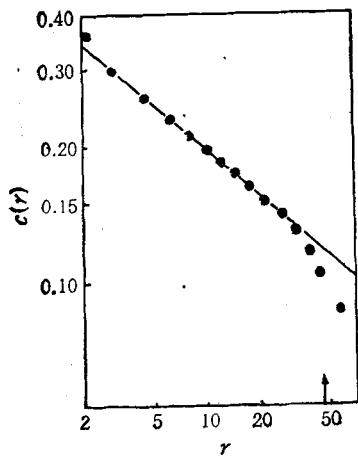


图 6 图 5 的相关函数分析结果

#### 四、功率谱方法

相关函数的傅里叶变换称为功率谱。(6)式的傅里叶变换为

$$F(k) = 4 \int_0^{\infty} c(r) \cos(2\pi kr) dr \sim k^{d-D-1}. \quad (9)$$

$F(k)$  可以直接用波散射方法获得, 比如光散

射、X 射线散射、中子散射。在胶体<sup>[8]</sup>、蛋白质凝聚体<sup>[9]</sup>实验中用过这种方法。用实验的方法直接获得分形维数, 而不是间接地用图象处理方法, 可以减少失真, 使数据更可靠。这样的实验方法目前仍不多见。

#### 五、子波变换

子波变换可以看作是一种数学显微镜<sup>[10,11]</sup>。它对变换函数(结构)具有定位和放大作用。设结构用函数  $f(\mathbf{x})$  表示。对结构上某一点  $\mathbf{b}$  的领域进行放大, 其子波变换定义为

$$T(a, \mathbf{b}) = a^{-n} \int g^*(a^{-1}r^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{b}))f(\mathbf{x})d^n x, \quad (10)$$

$a$  是放大因子,  $r$  是  $n$  维空间的转动算子 [ $Rr g(\mathbf{x}) = g(r^{-1}\mathbf{x})$ ],  $g$  是子波函数。二维空间中常用的  $g$  是一个叫做“墨西哥人帽子”的函数:

$$g(\mathbf{x}) = (2 - x^2)e^{-x^2/2}. \quad (11)$$

对于分形体, 它的标度性质或自相似性意味着在选定点  $\mathbf{b}$  的领域放大  $\lambda$  倍后, 按(2)式

$$(f(\mathbf{x})d^n x)_{\lambda, \mathbf{b}} \sim \lambda^{\alpha(\mathbf{b})}(f(\mathbf{x})d^n x)_{\mathbf{b}}, \quad (12)$$

其中  $\alpha(\mathbf{b})$  是  $\mathbf{b}$  领域的标度指数, 具有局部性质。对子波变换(10)式即相当于

$$T(\lambda a, \mathbf{b}) \sim \lambda^{\alpha(\mathbf{b})-n}T(a, \mathbf{b}) \quad (13)$$

因此我们可以从子波变换的标度行为获得分形维数。由于子波变换的定位性质, 我们可以对分形体的标度行为进行逐点分析, 不同位置领域的标度行为可能不一致, 这也是上面用  $\alpha(\mathbf{b})$  表示(而不用  $D$  来表示)标度性质的原因。如果是逐点一致的, 比如严格的分形体, 则  $\alpha(\mathbf{b}) = D$ 。这种逐点分析提供了检验是否是严格分形体, 而不只是统计意义的分形体的一种方法。

(10)式还可以通过傅里叶变换在波矢空间表示为

$$T(a, \mathbf{b}) = \int e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{b}} \hat{g}^*(a\mathbf{r}^{-1}\mathbf{q})\hat{f}(\mathbf{q})d^n q \quad (14)$$

$\hat{\sim}$  表示傅里叶变换。这相当于对  $f(\mathbf{x})$  的傅里叶变换进行  $\hat{g}(a\mathbf{q})$  滤波。滤波片通过子波函数的傅里叶变换(即衍射)来制得。整个(14)

式就可以采用激光相干光源和费朗和夫光路布置来完成<sup>[12]</sup>。

## 六、多标度分形

尽管 Mandelbrot 发现了结构的自相似本性,并用分形维数来表征,但这种描述并没证明是充分和唯一的。不同分布方式的两个结构可能具有相同的分形维数。这种结果可以从前面讲的比如盒子计数方法的计算中看出来。这说明要确定结构的特征还需要其他参数<sup>[13]</sup>。多标度描述就是与此有关的一种更全面的结构描述方法。

Hentschel, Procaccia 和 Grassberger 把分形维数推广<sup>[14,15]</sup>,定义下面的由  $q$  区别的一系列推广维数为

$$D_q = \lim_{l \rightarrow 0} \frac{1}{q-1} \frac{\log \sum_i P_i^q(l)}{\log l}, \quad (15)$$

其中  $P_i$  是定义在结构上的具有几率性质的某种测度,它可以是归一化的质量、电荷等。如果(15)式在取不同  $q$  值的极限都存在,则说明这结构具有一系列不同层次的标度性质。其中  $q = 0$ ,比较(3)式,就是 Mandelbrot 定义的分形维数。

寻找结构多标度性质的另一种出发点是把整个结构分成多个子集,每个子集可以足够小,并使它具有标度,然后对具有相同标度指数  $\alpha$  的子集数目进行统计,这样就可获得一个关于不同的  $\alpha$  的统计分布<sup>[16]</sup>。这种思想类似于统计热力学。对于足够小的子集存在不为 0 的标度指数的性质,数学上称为奇异性。 $\alpha$  的大小表示这种奇异性的强弱。按照(2)式,可将这种奇异性表示成

$$P_i(l) \sim l^\alpha, \quad (16)$$

$P_i$  仍然是定义在结构上的某种几率性质的测度,而具有相同奇异性的子集数目与子集大小显然有关,在子集大小足够小时取其项,则可表示成如下的形式:

$$\rho(\alpha) l^{-f(\alpha)} d\alpha, \quad (17)$$

其中  $\rho(\alpha)$  是与  $l$  无关的其余部分。这样的

$f(\alpha)$  与(15)式定义的  $D_q$  有如下关系。

因为

$$\sum_i P_i^q(l) = \int l^{\alpha(q-1)} \rho(\alpha) d\alpha, \quad (18)$$

在  $l \rightarrow 0$  时,积分项中的主要项是指数项取极小值,设在极小值位置  $\alpha' = \alpha$ ,则由(15)式得到

$$D_q = \frac{1}{q-1} [aq - f(\alpha)]. \quad (19)$$

因此求得  $D_q$  后,就可按下式求  $\alpha$ :

$$\alpha = \frac{d}{dq} [(q-1)D_q].$$

然后代入(19)式求  $f(\alpha)$ 。按(17)式定义,  $f(\alpha)$  说明了奇异强度为  $\alpha$  的子集的空间标度性质,故是  $\alpha$  子集的分形维数。

把整个结构看作是不同标度指数的子集交织在一起的思想,开辟了分形几何应用于动力学物理系统的新领域。例如,分析受电磁扰动的平板间的水银的热对流实验,结果与一个独立的理论模型的  $f(\alpha)$  函数一致。DLA 凝聚体<sup>[17,18]</sup>、流体粘性指延<sup>[19]</sup>的生长动力学也都表现出多标度分形特征。图 7 和图 8 就是 DLA 凝聚体的  $D_q$  曲线和  $f(\alpha)$  曲线。曲线的形状是

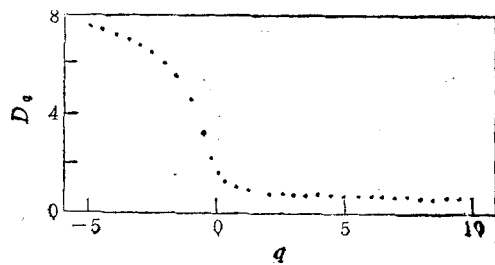


图 7 DLA 凝聚体的  $D_q$  曲线

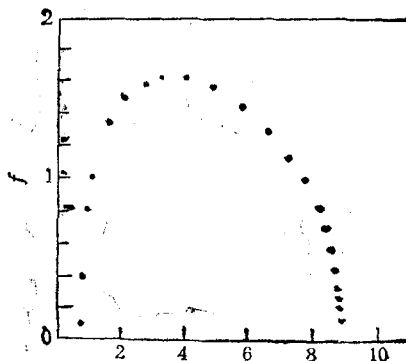


图 8 DLA 凝聚体的  $f(\alpha)$  曲线

典型的。

分形的发展非常快。尽管“分形”概念的提出到现在也只不过十来年，但它几乎已经渗透到社会和自然科学的各个领域。在物理学领域中，据说象 *Phys. Rev. Lett.* 这一权威杂志的投稿中平均每三篇文章就有一篇与分形有关<sup>[20]</sup>。但是目前对分形的理解主要停留在结构和现象上，其物理本质仍然不是清楚的。就拿研究较多的 DLA 凝聚体来说，也仍然无法从第一性的原理证明它的分形维数的存在。因此深入扎实的研究仍在继续进行中。

- [1] B. B. Mandelbrot, *The Fractal Geometry of Nature*, W. H. Freeman, New York, (1982).
- [2] B. B. Mandelbrot, *Fractals: Form, Chance and Dimension*, W. H. Freeman, San Francisco, (1977).
- [3] Wang Jian, et al., *Chinese Phys. Lett.*, 8(1991), 408.
- [4] A. Aharony, 1986, in *Directions in Condensed Matter*

*Physics*, (G. Grinstein & G. Mazenkoeds, World Scientific, Singapore), (1986), 1.

- [5] T. A. Witten & L. M. Sander, *Phys. Rev. Lett.*, 47 (1981), 1400.
- [6] L. Niemeyer et al., *Phys. Rev. Lett.*, 52(1984), 1033.
- [7] G. Daccord et al., *Phys. Rev. Lett.*, 56(1986), 336.
- [8] D. W. Schaefer et al., *Phys. Rev. Lett.*, 52(1984), 2371.
- [9] J. Feder et al., *Phys. Rev. Lett.*, 53(1984), 1403.
- [10] F. Argoul et al., *Phys. Lett. A*, 135(1989), 327.
- [11] A. Arneodo et al., *Phys. Rev. Lett.*, 61(1988), 2281.
- [12] E. Freysz et al., *Phys. Rev. Lett.*, 64(1990), 745.
- [13] L. J. Huang et al., *Phys. Rev. B*, 40(1989), 358.
- [14] H. G. E. Hentschel & I. Procaccia, *Physica, D*, 8 (1983), 435.
- [15] P. Grassberger, *Phys. Lett. A*, 107(1985), 101.
- [16] T. C. Halsey et al., *Phys. Rev. A*, 33(1986), 1141.
- [17] P. Meakin et al., *Phys. Rev. A*, 32(1986), 3325.
- [18] Y. Hayakawa et al., *Phys. Rev. A*, 36(1987), 1963.
- [19] K. J. Maloy et al., in *Time-Dependent Effects in Disordered Materials* (eds. R. Pynn & T. Risteeds, Plenum Press, New York), (1987), 111.
- [20] L. P. Kadanoff, *Phys. Today*, 20(1986), 6.

## 新型锗硅异质结远红外探测器研制成功

工作于  $8\sim 12\mu\text{m}$  波段的远红外探测器在遥感、制导、夜视技术等方面有着重要的应用。特别是在海湾战争以后，更加受到各国军方和高科技界的重视。1990年美国加州理工学院喷气推进实验室发展了一种新型的锗硅异质结远红外探测器。它具有金属硅化物肖脱基(PtSi/Si和IrSi/Si)势垒探测器的优点，即工艺简单，大面积的均匀性好，读出电路简单，能和硅大规模集成技术相容等，而它的工作波长比肖特基势垒更长，量子效率更高。与当前流行的镓砷/铝镓砷量子阱红外探测器相比，它可以在垂直光照下工作，因而容易实现大面积的阵列。1991年美国麻省理工学院用它研制成  $400\times 400$  红外焦平面阵列。在国内，这种新型探测器的研制尚未突破。

最近，复旦大学应用表面物理国家重点实验室在复旦大学电子工程系传感器研究室、中

国科学院上海技术物理研究所六室、上海无线电七厂的协助和航空航天部八〇三所、机械电子部电子科学研究所的支持下，用分子束外延技术结合硅平面工艺，研制成了  $\text{Ge}_x\text{Si}_{1-x}/\text{Si}$  异质结远红外探测器。测试结果表明，界面势垒高度为  $0.09\text{eV}$ ，预计对应的工作波长可从  $2\mu\text{m}$  到  $12\mu\text{m}$  以上。50K 时的探测率(黑体  $D_{50\text{K}}^*$ )优于  $2\times 10^8\text{cm}\cdot\text{Hz}^{1/2}/\text{W}$ ，30K 时为  $6\times 10^8\text{cm}\cdot\text{Hz}^{1/2}/\text{W}$ 。对 500K 黑体，30K 工作温度下  $D_{50\text{K}}^*$  为  $1.6\times 10^8\text{cm}\cdot\text{Hz}^{1/2}/\text{W}$ 。器件的工作温度与国外的报道相当，而  $D^*$  的数据未见到国外文献的报道。这是我国在锗硅异质结红外探测器方面第一次制成的黑体  $D_{50\text{K}}^*$  进入  $10^8\text{cm}\cdot\text{Hz}^{1/2}/\text{W}$  量级的实际器件。

(复旦大学应用表面物理国家重点实验室 龚大卫 张翔九 王迅)