

# 分形——它的应用与进展

## 第一讲 分形测度与多重分形

黄 哟

(北京大学物理系,北京 100871)

**编者按:** 自从70年代曼德勃罗特提出分形理论以来,它成了一个热门的课题,不论是理论方面还是应用方面都得到了迅速的发展。本刊从1986年开始介绍这方面的文章<sup>[1-3]</sup>以来,现在仍不断地收到许多读者的来信来稿,有的是报道他们的工作成果,有的是希望本刊能介绍一些分形的新进展。为此编辑部委托几位同志来组织这个专题系列,其目的是帮助读者了解这个领域中的新进展和它的广泛应用。科学在迅速发展,我们国内在分形方面的科研也正在蓬勃兴起。因而这个专题系列就会有两个不足之处,一个是介绍的内容有限,它只可能是沧海一粟,不能完全满足读者的要求;另一个是不能立即列出具体的专题目录。我们衷心希望广大读者能提出建议和要求,协助我们一起来办好这个专题。

对于一个大学一年级的学生,在他们学习处理物理问题时常常遇到的一些很简单很理想的系统。例如一块立方形木料的密度,一个带电圆球体的电势等。但实际的情况却常常不尽如人意,譬如说木料被白蚁蛀了,变成了一块千疮百孔的立方体。这时如何求它的密度呢?又譬如带电圆球体的表面特别粗糙,到处是凹凸不平的尖点,这时又怎能求出它的电势呢?按经典数学的语言来说就是这些系统具有许多奇点,对于奇点系统经典数学家是束手无策的,他们经常采取的办法是挖掉奇点或者在奇点处补上一个数值让它与周围的点连接起来变成一条光滑曲线。但是当有一个系统具有无穷多的奇点时,那就不能采取上述方法而必须另辟蹊径了。近年来提出的分形几何,以及随后发现的大量分形体如:海岸线、雪花、气体放电、石油开采中的粘性爪进(viscous fingering)、在多孔介质中流体的流动、湍流过程和计算机上模拟的有限扩散凝聚过程(简称 DLA 模型)等。它们在几何结构上都具有分形的特征,从数学上看它们是无穷多奇点的集合。这些奇点将根据它

们周围环境的不同而具有不同的奇异程度。为了描述这类奇点集合和它们的奇异程度,近几年来由 T. C. Halsey<sup>[4,5]</sup> 等人发展了有关分形测度与多重分形的理论。下面我们将介绍这方面的内容。

### 一、分形测度

在讨论多重分形之前,让我们先简略地回顾一下分形维数的定义。设先考虑一个正在生长的物体,构成此物体的最小微粒的尺度为  $a$  (例如胶体凝聚中的分子等)。现在在这物体中取一长度为  $L$  的体积  $V(L)$ 。当我们用以  $l$  为直径的小球去覆盖此物体时,就需要用  $N$  个小球才能完全覆盖它。而  $N$  显然是  $L$  和  $l$  的函数。按数学语言来描述时,就可写成为当  $L \rightarrow \infty$ , 或  $l \rightarrow 0$  时,必然有  $N \rightarrow \infty$ 。根据这个关系,如果将  $l$  固定,则有

$$N(L) \sim L^D$$
$$D = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\ln N(L)}{\ln L}, \quad (1)$$

其中  $D$  称为该物体的豪斯道夫维数。反之，如果固定  $L$ ，则有

$$N(l) \sim l^{-D},$$

$$D = \lim_{l \rightarrow 0} \frac{\ln N(l)}{\ln \frac{1}{l}}. \quad (2)$$

对于一个真实的物理实体而言， $L$  不可能是无限大的，因此可以引进一个无量纲量  $\varepsilon$ ，其定义为  $\varepsilon = \frac{l}{L}$ ，这样(1)式与(2)式可改写为

$$N(\varepsilon) \sim \varepsilon^{-D}. \quad (3)$$

对于一般正规几何体，它的豪斯道夫维数  $D$  就是它的欧几里德维数  $d$ 。但对于不正规的分形体， $D$  与  $d$  的值是不相同的。现在我们常称  $D$  为分形维数。这个概念最早是 1919 年由豪斯道夫引入，随后经比斯可维奇 (1935 年) 和曼德勃罗特 (1975 年) 加以改进和发展。到了 80 年代分形理论逐步由数学领域向自然科学与应用学科渗透，针对实际问题的需要发展了许多种求维数的方法。它们是：利用相关函数求维数、利用分布函数求维数、利用谱函数求维数等。但其基本出发点仍然是前面所定义的。这里就不再作讨论了，有兴趣的读者可参考有关文献<sup>[4]</sup>。

## 二、多重分形

科学家们在对许多实际问题（例如晶体生长，石油开采，胶体凝聚……）的研究中发现自然界中的分形体是非常复杂多样的，只用一个分形维数  $D$  是不足以描述物质的精细结构。为了能反映出物质的各自特性，必需考虑它的多层次结构，而多层次结构需要用多重分形来描述。下面我们结合一个实例来定义多重分形并阐述它的物理意义。设将一个单位长度的区间等分为三部分，长度各为  $\frac{1}{3}$ ，但其质量分布是不均匀的。两边的两段，其质量分布概率均为  $P_1$ ，而中间的是  $P_2$ ，且  $P_2 > P_1$ ，如图 1(a) 所示。接着在  $\frac{1}{3}$  的区间内又作一次类似的等分，这样 9 个小区间的质量分布就如图 1(b) 所示。

从图上可看到现在有三种不同的高度用来代表质量分布概率的大小。最低的一种对应于  $P_1$ ，因为在两次等分中，它都取  $P_1$ 。所以质量分布概率必然是  $P_1^2$ 。第二种高度是由一次取  $P_1$ ，一次取  $P_2$  所得到的结果，因而其质量分布概率为  $P_1 P_2$ 。显然  $P_2^2$  是两次均取  $P_2$  后得到的质量分布概率，它的数值最大，反映在图上是中间的最高高度。具有  $P_1^2$  和  $P_1 P_2$  数值的区间各有 4 个，而具有  $P_2^2$  数值的只有中间的一个。图 1(c) 是经过多次迭代后的质量分布示意图。这时可以明显地看出质量分布是极不均匀的，质量主

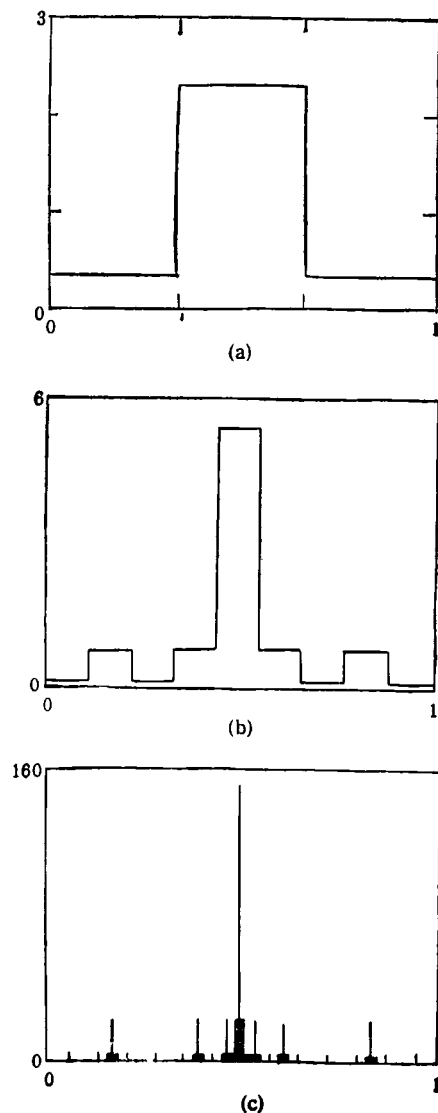


图 1 质量分布示意图

要分布在中间.为了定量地描述这种不均匀性,我们定义第  $i$  区间的质量分布函数  $P_i$  为

$$P_i(\varepsilon) \sim \varepsilon^\alpha. \quad (4)$$

非整数指数  $\alpha$  一般称为聚集指数 (crowding index), 它是反映分形体内各个小区间的奇异程度的一个量, 所以  $\alpha$  的数值必然是与所在的位置有关. 如果在分形体中具有相同  $\alpha$  值的小区间数为  $N_\alpha$  个, 那么我们把  $N_\alpha$  写成为

$$N_\alpha(\varepsilon) \sim \varepsilon^{-f(\alpha)}. \quad (5)$$

将(5)式与(3)式作一对比, 显然  $f(\alpha)$  的数值是表示具有相同  $\alpha$  值的子集的分形维数. 一个复杂的分形体, 它的内部可分为一系列用不同  $\alpha$  值表示的子集. 而相同的  $\alpha$  值表示具有相同的奇异程度. 这样  $f(\alpha)$  函数就给出了这一系列子集的分形特性. 除了简单的数学模型以外, 一般的实际问题中常常并不知道  $P_i$  的分布, 这时就要通过矩表示方法来了解分布的性质. 为此定义

$$\chi_q(\varepsilon) \equiv \sum_{i=1}^N P_i^q = \varepsilon^{-\tau(q)} \quad (6)$$

和

$$D_q = \frac{1}{q-1} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln \sum P_i^q}{\ln \varepsilon} = \frac{1}{q-1} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln \chi_q(\varepsilon)}{\ln \varepsilon}. \quad (7)$$

定义  $\chi_q(\varepsilon)$  的目的是看一看概率  $P_i$  在加权后的作用.  $D_q$  一般称为广义分形维数, 或多重分形维数. 为什么要对概率加权? 这些量与前面所定义的量之间有什么联系就成了我们要考虑的问题. 首先让我们讨论加权的作用. 当权重因子  $q=0$  时, 有  $\chi_0(\varepsilon) \sim \varepsilon^{-D}$ . 它反映的是研究对象的空间几何性质, 与待测物理量的不均匀分布无关. 当  $q=1$  时,  $\chi_1(\varepsilon) = \sum P_i \equiv 1$ , 这个结果来自于概率分布的归一化条件. 若小区域  $m$  和  $j$  的概率分别为  $P_m$  和  $P_j$ , 且  $P_m \gg P_j$ . 如果  $q \gg 1$  时, 在  $\sum P_i^q$  的求和中显然是  $P_m^q$  起主要作用. 由此可见  $\chi_q(\varepsilon)$  反映的是质

物理

量分布中概率大的(或稠密的)区域的性质. 若在  $q \rightarrow \infty$  的极限条件下, 在计算  $\chi_q(\varepsilon)$  时只要考虑最大的那个概率  $P_{\max}$ , 而把其他的忽略, 从而大大地简化了计算. 反之在  $q \ll 1$  时,  $\chi_q(\varepsilon)$  反映的就是分布中概率比较小的(或稀薄的)区域的性质. 所以通过加权的处理, 就把一个复杂的分形体分成为不同奇异程度的区域来研究. 因此利用多重分形这个概念就打开了我们了解分形体精细结构的大门.

下一步的问题是如何定量地描述多重分形, 也就是要建立起这些量之间的关系. 由式(6)可推出

$$\chi_q(\varepsilon) = \sum_i P_i^q \sim \varepsilon^{-f(\alpha)+\alpha q},$$

$$\text{所以 } \tau(q) = f(\alpha) - \alpha q. \quad (8)$$

将(8)式代入(7)式有

$$(q-1)D_q = -\tau(q) = \alpha q - f(\alpha),$$

及

$$\alpha = -\frac{d\tau(q)}{dq} = \frac{d}{dq} \{(q-1)D_q\}. \quad (9)$$

从这些关系式可以看出, 只要知道  $f(\alpha)$  就能得到各种加权情况下的多重分形  $D_q$ . 如果将其应用到我们所举的质量不均匀分布上, 立即得到

$$D_q = \frac{\ln(2P_1^q + P_2^q)}{(q-1)\ln \frac{1}{3}}$$

若质量分布曾进行了  $K$  次迭代, 则  $P_{\max} = P_1^K \sim \varepsilon_{\min}^{\alpha_{\min}}$ . 由于概率为最大的区间只有一个, 所以

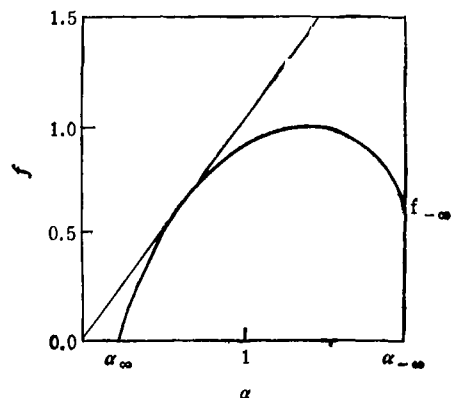


图2  $D_q(\alpha)$  随  $\alpha$  变化图

$f(\alpha_{\min}) = 0$ 。相应地  $P_{\min} = P_1^K \sim \epsilon_{\max}^K$ 。但概率为最小的区间却有  $2^K$  个,所以

$$f(\alpha_{\max}) \sim -\frac{\ln 2^K}{\ln\left(\frac{1}{3}\right)^K} = 0.63$$

图 2 为  $f(\alpha)$  随  $\alpha$  变化的示意图。

自从引进多重分形概念以来,人们对分形和分形生长的研究大大地前进了一步。有的是从理论的角度去探讨  $f(\alpha)$ ,  $D_q$  的定义域,希望能更深一层地去发掘它们的物理意义;例如研究  $f(\alpha) < 0$  以及负分形维数等。更多的工作是将多重分形应用到一些实际问题中去,其中有的考虑 DLA 模型的表面生长概率,以便

从机理上了解物质的生长规律;有的考虑无规电阻网络的电压分布等。现在这些量不仅可以在理论上进行计算,而且可以用实验方法确定  $f(\alpha)$  曲线。国内清华大学等若干单位已开展了对多重分形实验测定方面的工作。今后我们希望这枝分形之花将会在我国大地上结出更多的硕果。

- [1] 黄驹,物理,15(1986),269.
- [2] 姚凯伦,物理,15(1986),663.
- [3] 柳百新,物理,19(1990),81.
- [4] B. B. Mandelbrot, J. Fluid Mech., 62(1974), 331.
- [5] T. C. Halsey et al., Phy. Rev. A, 33(1986),1141.
- [6] J. Freed, Fractal, (1988), Plenum Press.

## 新当选的中国科学院学部委员介绍 (I)

**编者按:** 我们向新当选的学部委员表示热烈的祝贺。中国科学院数学物理学部新当选的学部委员共 38 名,其中物理学方面的共 22 名。中国科学院技术科学部新当选的学部委员共 68 名。本期介绍数学物理学部新当选的物理学方面的学部委员 12 名(新当选的核物理方面的 10 名学部委员将由《现代物理知识》杂志介绍)。本刊还将陆续介绍技术科学部新当选的与物理学有关的部分学部委员。

### 新学部委员 王业宁



王业宁(女),南京大学教授。她 1926 年 10 月出生于安徽省六安市,1949 年毕业于中央大学物理系并获学士学位。1950 年至 1981 年她在南京大学物理系任教,1981 年后,先后被聘为南京大学物理系教授兼中国科学院内耗与固

体缺陷开放研究实验室学术委员会副主任,1991 年 11 月当选为中国科学院数学物理学部委员。她主要从事固体物理、特别是固体中相变与缺陷的内耗与超声方面的科学研究和教学工作并取得多项重要成果。在相变与缺陷的内耗研究以及激光的实验研究方面,60 年代初期她总结出马氏体相变过程的瞬态内耗的规律,并发展了 Delorme 模型和 Belko 理论,同时首次提出相变稳态内耗峰的界面机制;60 年代初期在国内首先引入高频内耗测量装置 Marx 三节组合振子,并用这一装置研究了难熔金属的位错内耗,同时发现了难熔金属中溶质晶界峰及其与脆性的关系;70 年代开展了激光研究工作,在国内首先建立了测量声光介质优估 M2 的装置,并在国内最早研制出声光调 Q-YAG 激光器,同时用这一仪器开展了非线性光学对固体中缺陷与相变的研究工作,同时开展了