分形——它的应用与进展讲座

第三讲　在分形上的反常输运1)

黄　　畇

（北京大学物理系，北京　100871）

一、"蚂蚁在迷宫中"

输运(包括扩散、电导、摩擦……)理论是物理、化学、生物等学科中非常关注的课题。非平衡态统计力学给出了一些理论方法，一般称为经典输运理论。这里要讨论的是在无序系统或分形上的输运规律，这些规律与经典理论有很大的区别，它们会带来许多反常的行为[1,2]。例如，流体在裂缝或多孔介质中的反常扩散，在玻璃体及大分子中的反常弛豫以及在逾渗集团上的电导等。德然纳曾形象地把这类问题称为"蚂蚁在迷宫中"。为了方便起见，先讨论在分形上的扩散。对于分形我们可以选用有规分形，如谢尔宾斯基镂垫（Sierpinski gasket）、海绵（sponge）等，也可选用随机分形，如逾渗集团、DLA 集团等。由于许多无序材料如多孔介质、高聚物凝胶、无规电阻网络等都可以用逾渗模型来描述，所以我们选择逾渗集团作为蚂蚁行走的迷宫。

在讨论扩散之前先简略地介绍一下逾渗模型[3]。考虑一个二维方形点阵，假定在点阵上的座（site）可以被随机地占有，设每一个座被占据的概率为 p，不被占据的概率为 $1-p$。若相邻的座都被占据时，这些座就可以组合成为一个集团。显然当 p 增加时，集团的大小也会相应地增大，但仍然是有限的。当 p 达到某一临界数值 p_c 时，点阵上就会出现一个无限大集团，这时我们就认为发生了逾渗相变，同时称 p_c 是逾渗阈值。对于二维方形点阵，已计算出 $p_c=0.59$。图 1 是在 $p<p_c$，$p=p_c$ 和 $p>p_c$ 三种情况下逾渗相变的示意图。逾渗相变是一个二级相变。在相变时很重要的一个物理量是逾渗概率，它的定义是，当占据概率为 p 时，点阵上任一座属于无限大集团的概率称为逾渗概率，记为 $P_\infty(p)$。由此定义立即可看出，从 $p=0$ 到 p_c，逾渗概率是恒等于零的；当 $p>p_c$ 后，逾渗概率 $P_\infty(p)$ 会随着 p 的增加而很快地上

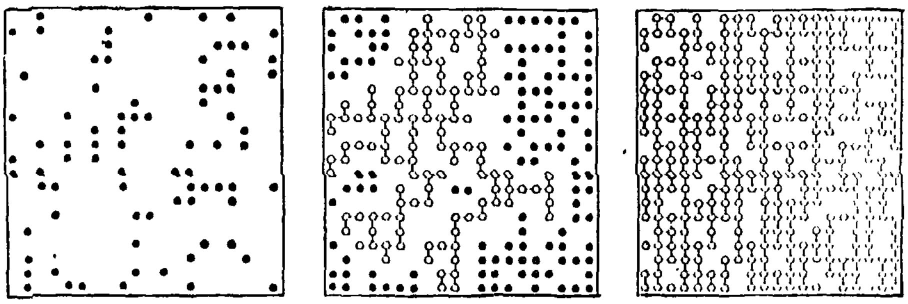

图 1　逾渗相变示意图

1）国家自然科学基金资助项目。

升;最后当 p 趋近于 1 时，$P_\infty(p)$ 也趋近于 1，这表示无限大集团吞并了其他有限大小的集团.整个点阵被一个无限大集团所占领. 所以，逾渗概率起着逾渗相变时序参量的作用. 它标志着在逾渗阈值 p_c 处,点阵上从无到有地出现了长程联结性. 按相变的普适性规律，序参量满足的标度律为

$$P_\infty(p) \sim |p - p_c|^{-\beta}. \qquad (1)$$

我们把在同一集团中两个座之间的平均距离定义为 ξ. 当集团趋于无限大时，ξ 按下列规律发散:

$$\xi = |p_c - p|^{-\nu}. \qquad (2)$$

β 与 ν 是两个普适的临界指数，只与空间维数 d 有关. 当 $d = 2$ 时，$\beta = \frac{5}{36}$, $\nu = \frac{4}{3}$. 在 $p > p_c$ 后出现的无限大集团具有自相似结构，是一个典型的分形,它的分维可由下式确定:

$$D_f = d - \frac{\beta}{\nu}. \qquad (3)$$

由(3)式定出不同欧几里德空间中的分维为

$$\begin{aligned} d &= 2, \quad D_f = 1.896; \\ d &= 3, \quad D_f = 2.5. \end{aligned} \qquad (4)$$

对逾渗模型有了初步了解后，我们再回转来讨论蚂蚁在逾渗集团上的行走. 显而易见这是一个无规行走问题. 无规行走的特征参量是它的方均位移. 在欧几里德空间中方均位移 R^2 可表示为

$$R^2(t) \sim t, \qquad (5)$$

这里的 t 是它的步数,也可以标度为时间.设在 $t = 0$ 时蚂蚁开始从逾渗集团上任一座向其任意一个近邻行走一步，这时其近邻有两种可能的状态,或是被占据的,或是空的. 假定所有被占据的近邻，对于蚂蚁的行走都具有相等的概率. 这样蚂蚁就可以在被占据的座上随机地行走. 在足够长的时间 t 之后，Gefen，Aharony 和 Alexander[4] 等人得到蚂蚁在逾渗集团上的方均位移所遵守的规律为

$$R^2(t) \sim \begin{cases} t & (p \sim 1), \\ t^{2/D_w} & (p \geq p_c), \\ \text{常数} & (p < p_c), \end{cases} \qquad (6)$$

(6)式中的指数 D_w 称为行走分维，它与分形的分维 D_f 有关. 对于欧几里德空间 $D_w = 2$. 对于二维的逾渗集团，在 $p = p_c$ 时，目前最好的数值解[5]为 $D_w = 2.187 \pm 0.01$. (6) 式的物理意义是非常清楚的. 当 $p \sim 1$ 时，整个点阵上的座均被占据. 这时的逾渗集团是一个各向同性的实体，与普通的晶格点阵没有什么区别，它的方均位移与时间的关系和欧几里德空间的结果相一致是毫不奇怪的. 当 $p < p_c$ 时，点阵上的集团都是有限大小的. 因此蚂蚁在任一个集团上行走时，不管它行走的时间有多么长，它都不能跑到另一个集团上去. 所以，它的方均位移只可能是一个与时间无关的常数. 只有在 $p \geq p_c$ 时，才会有反常的扩散行为出现.这个反常行为来源于逾渗集团上座分布的不规则性. 逾渗集团与一般分形一样，它的结构存在许多空洞和分支岔道. 所以，每个座的近邻数 Z 就不再是一个由点阵决定的常数，而是与座在集团上所处的位置有关的一个变数，记为 Z_i. 这样蚂蚁向近邻行走的概率就由原来的 $\frac{1}{Z}$ 变成 $\frac{1}{Z_i}$. 在许多情况下蚂蚁有可能盲目地在某些走不通的分支岔道上来回行走，从而减慢了它的扩散速度.由此可见，分形结构上的不规则性是造成反常扩散的根源. 除了逾渗集团以外，Gefen 等人还计算了在谢尔宾斯基镂垫上的反常扩散，他们的结果是

$$\begin{aligned} D_f &= \frac{\ln(d+1)}{\ln 2}, \\ D_w &= \frac{\ln(d+3)}{\ln 2}. \end{aligned} \qquad (7)$$

当 $d = 2$ 时，谢尔宾斯基镂垫的 $D_f = 1.58$, $D_w = 2.322$. 一般来说对于任何分形都具有 $D_w > D_f$ 这个结论.

二、标度律、谱维数

讨论了反常扩散和行走分维 D_w 以后，下一步应该把 D_w 与常用的扩散系数 D 和电导率 σ 等联系起来. 由爱因斯坦扩散公式知道

$$\sigma = \frac{e^2 n}{kT} D \sim n \cdot D,$$

$$R^2(t) = D \cdot t, \qquad (8)$$

这里的 n 是载体(电子、离子……)的密度．处于分维为 D_f 的分形上的载体的密度可表示为

$$n \sim R^{D_f - d}$$

通常将逾渗集团上的电导率 σ 的标度律写成

$$\sigma(R) \sim |p - p_c|^{\mu} \sim R^{-\mu/\nu}, \qquad (9)$$

式中的 μ 称为电导指数．将(8)，(9)两式作一对比，立即可得到

$$t = R^{D_w} \sim R^{2-d+\frac{\mu}{\nu}+D_f},$$

$$D_w = 2 + \frac{\mu}{\nu} - d + D_f. \qquad (10)$$

无规行走理论告诉我们，粒子在均匀各向同性介质上作无规行走时，在 t 时刻后的分布函数 $P(r,t)$ 是一个高斯分布函数，其表达式为

$$P(r,t) = \frac{1}{(2\pi Dt)^{d/2}} \exp\left(\frac{-r^2}{2Dt}\right).$$

若粒子从原点出发，经过 t 时刻后又回到原点的概率显然是

$$P(0,t) = \frac{1}{(2\pi Dt)^{d/2}} \sim (Dt)^{-d/2} \sim R^{-d}. \qquad (11)$$

Alexander 和 Orbach[6] 将此结果推广到分形上，他们用分形的分维 D_f 来代替欧几里德空间维数 d，从而得到

$$P(0,t) \sim R^{-D_f} \sim t^{-D_f/D_w}. \qquad (12)$$

介质上的总粒子数为 N，所以有

$$N(t) \sim t^{D_f/D_w} \sim t^{D_s/2},$$

其中

$$D_s = \frac{2D_f}{D_w}. \qquad (13)$$

Alexander 和 Orbach 把这个新指数 D_s 称为谱维数．它与在分形上元激发的频谱有关．根据固体物理的理论，在欧几里德空间的点阵上，对低频区的声子态密度可以写出

$$\rho(\omega) \sim \omega^{d-1}.$$

对有自相似结构的分形，利用标度变换不难写出

$$\rho(\omega) \sim \omega^{D_s - 1}. \qquad (14)$$

所以，他们认为在分形上也存在着一定的元激发，并称这种元激发为分形子 (fracton)．将此结果应用到逾渗集团上，可求出谱维数为

$$D_s = \frac{2D_f}{D_w} = \frac{2(d\nu - \beta)}{2\nu - \beta + \mu}. \qquad (15)$$

近年来科学家对研究谱维数非常感兴趣，这有两方面的原因．一方面是由于科学家们在逾渗集团上进行反常扩散及电导的计算后惊奇地发现，对于 $d = 6$ 的逾渗集团，$D_s = \frac{4}{3}$，而对于 $1 < d \leqslant 6$ 的逾渗集团，D_s 非常接近于 $\frac{4}{3}$．因此，Alexander 和 Orbach 提出了一个猜想，他们认为 $D_s = \frac{4}{3}$ 是一个与空间维数无关的超普适常数，这个猜想称为AO 猜想．人们在逾渗集团和其他无规分形上进行了大量的实验和数值模拟工作，有一部分工作是支持 AO 猜想，但有些结果是否定的． 所以直到现在，AO 猜想还是一个尚未解决的课题．另一方面的原因是由于谱维数联系着静态的分维 D_f 和动态的行走分维 D_w．如果 AO 猜想是正确的，那么就可以找到一条“几何结构”与“动力学行为”相联系的途径．这将对认识无序材料的物理及化学性质带来重大的突破．

[1] S. Havlin and D. Ben-Avraham, *Advances in Physics*, 36(1987), 695

[2] P. G de Gennes, *J. Phys. (Pairs) Lett.*, 37 (1976), L1

[3] R. Zallen 著，黄昀等译，非晶态固体物理学，北京大学出版社，(1988)，153.

[4] Y Gefen et al., *Phys. Rev. Lett.*, 50(1983), 77.

[5] D. C Hong et al., *Phys. Rew B*, 30(1984), 4083.

[6] S. Alexander et al., *J. Physique Lett.*, 43(1982), 2625.