

- [4] C. Cercek et al., *J. Cancer*, 13 (1977), 903.
 [5] 周美惠等,应用激光, 8(1988), 136.
 [6] 唐建民、傅昌余,中国激光, 14(1987), 440.
 [7] 唐建民等,中国激光, 16(1989), 238.
 [8] 丁爱华等,医用激光研究与临床, No. 1 (1989), 17.
 [9] 关静峰,激光杂志, 11(1990), 294.
 [10] 马宝章等,应用激光, 4(1984), 235.
 [11] 丁爱华等,中国激光, 14(1987), 199.
 [12] 敖华飞,激光杂志, 11(1990), 294.
 [13] 叶青等,应用激光联刊, 7(1988), 311.
 [14] R. Nossal, *Biophys. J.*, 11 (1971), 341.
 [15] 王振亚等,医用激光杂志, 4(2), (1990), 6.
 [16] 林星等,激光生物学与激光医学学术讨论会论文集, 国家自然科学基金委员会生物科学部、信息科学部合编, (1988年), 70.

正电子湮没与高温超导体¹⁾

王少阶

(武汉大学物理系, 武汉 430072)

正电子是探测固体中电子密度、动量分布、缺陷和相变的灵敏探针。正电子湮没是研究高温超导体的电子结构和缺陷特性的有用工具。本文简要介绍了近年来用正电子湮没研究高温超导体的费米面、测量其电荷密度分布、缺陷特性及结构转变等方面的最新进展。

Abstract

Recent advances in positron annihilation studies on high temperature superconductors are presented, covering: (1) direct observation of Fermi surfaces; (2) the temperature dependence of positron annihilation parameters and local electron transfer; (3) defect properties and (4) structural transformation. It is shown that positron annihilation spectroscopy is a very useful tool for studying the electron properties of high temperature superconductors.

1987年春发现的液氮温区高温超导体无疑是近几十年来物理学发展史上的重大事件之一。人们对这一发现在科学和技术上的重要性都感到十分兴奋和震惊。继 T_c 为90K的YBCO之后,1988年又相继发现 T_c 为115K的BiSrCaCuO和 T_c 为125K的TlBaCaCuO。这些新型高温超导体的发现为超导技术的应用开辟了更为广阔的前景,并将在许多高技术领域带来革命性的变化。这一切都激励着人们去研究这种新型氧化物高温超导体的超导机制,并寻求具有更高使用性能的高温超导材料^[1,2]。有人曾用各种现代实验技术对其进行研究,正电子湮没谱学就是卓有成效的研究手段之一。

众所周知,正电子是电子的反粒子。它是由狄拉克预言并于1932年由安德森在宇宙线实验中发现的。近20年来,正电子湮没谱学已

发展成研究凝聚物质微观结构的实用技术。在固体研究中,正电子来自具有 β^+ 衰变的核素,如 ^{22}Na 。当能量为几百KeV的正电子射入样品后,通过与物质原子或分子的各种非弹性碰撞过程损失能量,并很快达到热能。处于热能的正电子在固体中扩散,在此过程中,正电子会和电子发生湮没,并发射两个特征湮没光子。图1示出了正电子在固体中的湮没图象。用近代实验核物理方法可以精确测定这些湮没光子的时间谱、能谱及角关联。研究表明,正电子对凝聚物质中的电荷密度及动量分布十分敏感,在测量固体材料中的费米面和研究固体缺陷和相变方面有其独到之处^[3]。因此,近年来正电子湮没也被广泛用于探测高温超导体的电子结

1) 国家自然科学基金资助项目。

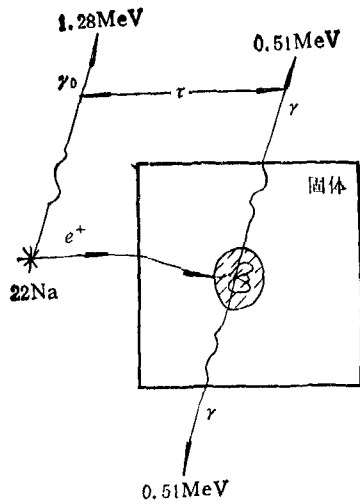


图1 正电子在固体中的湮没图象

正电子从 ^{22}Na 放射源发出,射入固体, r_0 和 r 分别为起始和湮没 γ 射线, τ 为正电子寿命, 阴影区为正电子扩散范围示意图

构和缺陷特性,以研究高温超导机制并寻求新型高温超导材料,现已取得一系列有意义的研究成果。

在高温超导研究中,常用的正电子湮没实验方法有三种:

(1) 正电子湮没寿命测量,采用核物理实验中的时间谱技术测量正电子从起始到湮没的寿命 τ ,由正电子湮没理论^[5]知道 τ 为正电子密度和电子密度迭积分的倒数:

$$\tau = \left[C_0 \int \rho_+(\mathbf{r})\rho_-(\mathbf{r})d\mathbf{r} \right]^{-1}, \quad (1)$$

式中 C_0 为常数, ρ_+ 和 ρ_- 分别为湮没处的正电子密度和电子密度。故由正电子寿命测量可得到样品中电子密度的信息。

(2) 正电子湮没辐射角关联测量,由于具有一定动量的电子与正电子(处于热能)湮没过程中的动量守恒,使得两个湮没光子的相对发射角偏离 180° ,在某一方向(如 z 方向)的角度偏离 θ_z 与电子动量在该方向的分量 p_z 间有如下关系:

$$\theta_z = p_z/mc, \quad (2)$$

式中 m 为电子质量, c 为光速(可由此式计算与 θ 角对应的动量)。采用角分辨本领极高的二维角关联谱仪可以精确测定固体中电子动量分

物理

布和费米面拓扑。

(3) 湮没辐射能谱的多普勒展宽测量:湮没对具有动量会导致湮没光子能谱产生多普勒展宽。这可用具有极高能量分辨本领的固体探测器(如高纯锗 γ 探测器)进行探测。从展宽的湮没光子能谱形状可以得到固体中电子动量分布信息。与角关联测量相比,此技术的分辨率稍差,但具有效率高、测量快的特点,广泛用于缺陷和结构相变研究。

在高温超导研究中,常将上述正电子湮没实验方法与改变样品温度、成分、压力、制备工艺等实验相结合。主要研究内容为:直接测定费米面,以选择合适的超导机制;测量电荷密度分布及其温度关系,为发展和验证电荷密度转移理论提供实验证据;研究结构缺陷对高温超导性能的影响,特别是辐照产生的缺陷与 J_c 增强的关系;研究结构转变和结构不稳定性。以下就这四方面的进展作一简要介绍。

一、直接测定费米面

与传统的 BCS 超导体相比,新型氧化物高温超导体的临界转变温度 T_c 要高得多,而且有其更为复杂的结构和独特的性质。虽然至今还未就高温超导电性的物理机制取得共识,但随着实验和理论研究的逐步深入,问题正一个一个地得到解决。例如,近年来大量的理论研究工作都试图描述高温超导体的电子基态及元激发特性,其中一个有争议的重要问题就是这种高温超导体是否具有费米面?如果有,那么这种费米面的特征是什么?比如在费米能 E_F 处的突变幅度有多大等等。这些问题都涉及到选择合理的超导机制。如前所述,正电子湮没辐射的角关联测量技术可用于费米面测量。与角分辨光电子能谱相比,它对样品表面效应不太灵敏,即受表面特性影响较少。与传统金属中的费米面测量相比,由于样品的复杂性,使得高温超导体的费米面测量更为困难。几个小组为此进行了巨大的努力,实验普遍采用二维角关联谱仪,其角分辨本领为 0.7mrad 左右。早期

的研究工作中,由于样品是多晶,或虽是单晶但尺寸较小以及孪晶,加之计数的统计精度不高,使得测量结果不十分理想。虽然大部分测量都找到了费米面存在的证据,但不能给出费米面的详细特征,也难以与能带结构计算的结果进行比较。

最近, Haghghi 等^[4]完成了 $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}$ 单晶样品费米面的高精度测量。他们使用的是高质量无孪生单晶样品,样品尺寸为 $1\text{mm} \times 1\text{mm}$ (在 001 面),厚 $50\mu\text{m}$ 。将六块相同样品排成一个 $3\text{mm} \times 3\text{mm}$ 的网络。为使所有样品的 ab 平面完全一致,应用 X 射线劳厄图照片进行校正,使其误差在 0.5° 之内。为了提高统计精度,总计数达到 5×10^8 ,这意味着测量时间为数十天! 这样,他们终于得到了迄今为止最清晰的 YBCO 单晶的费米拓扑图象。该图显示出传统费米液体型的费米面特征,与局域密度能带结构计算的理论预言完全一致。例如,测得的动量分布是各向异性的,这是波函数效应所致;另外动量分布的突变位置与理论计算相符。图 2 示出了在测得的角关联谱上不同 p_x 处,沿 $p_y(010)$ 方向切得的动量分布曲线,箭头表示理论预言的不连续位置。由图 2 可见,动量分布都局限于 $p_y = \pm 4\pi/b$ 内。在低动量区,如 $p_y = 0$ 和 $p_y = \pm 2\pi/b$ 处,动量分布有尖锐地不连续,且 p_y 有小的能量色散。在不同的 p_x 处,曲线的形状不同, $p_x = 0$ 时变化最大,而 $p_x = 2\pi/a$ 的曲线变化较小。从动量分布图象的细节可得到费米面的详细信息。分析表明,动量分布的突变主要与 Cu-O 链状态相关,目前的实验只发现了与 Γ -X 电子相关的清晰图象。

另外, Mijnaerds 等^[5]最近完成了 $\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{CaCu}_2\text{O}_{8+x}$ 单晶 ($T_c = 85\text{K}$) 中的二维角关联测量。测量温度分别为 T_c 以下的 6K 和 T_c 以上的 92K。测得的动量分布沿 c 轴的投影显示出很强的 C_2 对称性,这是由于晶体结构中存在非公度调制所致,这种调制可以影响反映费米面动量分布的形式。此外,动量分布中还有许多精细结构,当测量温度从 6K 上升

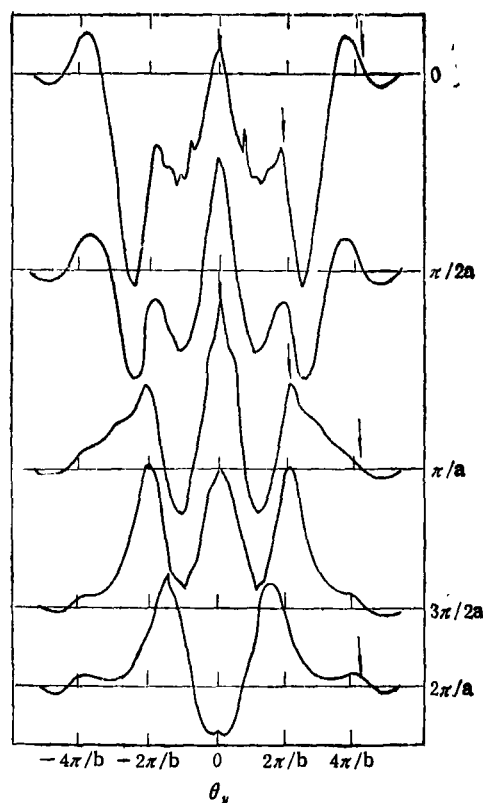


图 2 二维角关联谱不同 p_x 处沿 $p_y(010)$ 方向切得动量分布曲线^[4]

箭头指出理论预言的费米面截断位置 ($2\pi/b = 6.25\text{mrad}$) 到 92K 时,动量分布剖面(与图 2 曲线意义相同)中许多峰的强度和宽度变化很大,但峰的位置不变。与 YBCO 不同的是有关 Bi 系中动量密度分布的理论计算还在进行中,故不能进行比较。

二、测量电荷密度分布及其温度关系

正电子对固体中电荷密度分布极为敏感,由(1)式可知,通过测量正电子寿命可以得到固体中电荷密度分布的信息。当超导体由正常态向超导态转变时,电荷密度分布有无变化呢? 如果有,电荷密度是如何转移的呢? 它与超导电性机制有无联系呢? 这都是人们关心的问题。人们曾系统测量过传统 BCS 超导体如 Pb, NbSn 和 V_3Si 中正电子湮没参数随温度的变化,结果表明正电子湮没参数在 T_c 附近及 T_c

以下均无可观察到的变化。这是由于这类超导体中,费米面附近的电子态密度很小,能隙 ΔE_g 与费米能 E_F 之比也很小,故动量密度的变化也小。这样的变化只能引起正电子信号很小的变化,不能为目前的正电子实验所观察到。

但是当1987年春 T_c 为92K的YBCO高温超导体出现以后,情况则大不一样。Jean、本文作者与朱经武等合作首先用正电子湮没寿命和多普勒展宽技术来研究这种新型氧化物高温超导体^[6],在10—300K范围内测量了 $YBa_2Cu_3O_{6.8}$ 中正电子寿命和多普勒展宽谱随温度的变化。图3示出了正电子湮没寿命测量的实验结果。由图可见,正电子湮没寿命在临界温度 T_c 附近有一阶跃变化,能灵敏地指示从正常态到超导态的转变;此外,正常态的正电子寿命值高于超导态之值,这表明正电子探测到的超导态电子密度高于正常态。这一结果引起人们极大的兴趣,并很快得到Usmar等^[7]的进一步证实。他们的实验还观察到多普勒展宽 S 参数的减少随 T_c 的降低而移动。总之,这些实验指出正电子湮没参数的温度关系与样品的超导电性密切相关。在这些早期研究之后,又有若干研究 $YBa_2Cu_3O_{7-x}$ (Y123)系统的结果发表,这些测量中的大多数结果指出 T_c 以下正电子湮没参数是减少的,然而在有些实验中也观察到不同的温度关系,如Harshman等^[8]观察到正电子寿命在 T_c 以下是增加的。因此人们不禁要问,为什么正电子湮没参数在 T_c 以下会改变?影响正电子湮没参数温度关系的因素是什么?

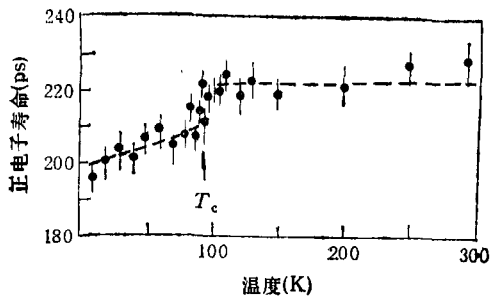


图3 $YBa_2Cu_3O_{6.8}$ 中正电子寿命随温度的变化^[6]

为了回答这些问题,人们进行了更加深入地研究。应该指出,样品的质量直接影响实验结果,如样品是多晶还是单晶、氧含量的多少、密度和晶粒大小以及材料中超导正交相所占的比例等都是导致实验结果差异的原因。因此,使用高质量样品和系统地研究是十分重要的。为此Jean等^[9]精心设计了一组在Y123中掺Zn和Ga的实验。图4示出了具有不同Zn含量的正电子寿命的温度关系。由图可见,随Zn含量增加,正常态寿命明显降低。更为有趣的是,未掺Zn样品中的正电子寿命在 T_c 以下降低;随着掺Zn量的增加转变成相反的趋势,即正电子寿命在 T_c 以下反而增加。此外,在每一种情形下正电子寿命的变化均与 T_c 有关。图中箭头指出了 T_c 的位置,它随Zn含量的增加而降低。

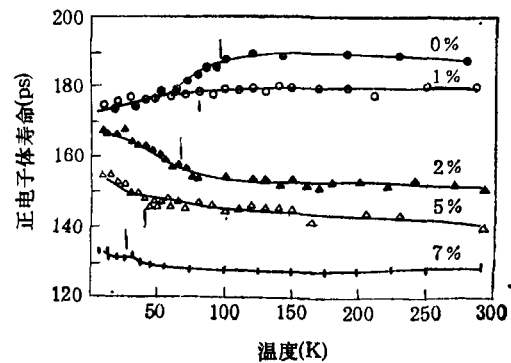


图4 在未掺杂和掺Zn的Y123中正电子寿命随温度的变化^[9]

为了深入理解未掺杂Y123和掺ZnY123中正电子寿命的不同温度关系,必须计算Y123系统中正电子密度分布。人们知道,Y123晶体结构中最重要特征是有超导的 CuO_2 面和Cu-O链。而且Cu-O链在控制 CuO_2 面掺杂方面起重要的作用^[11,12]。Bharathi等^[10]利用已有的Y123结构参数,通过解薛定格方程完成了这一计算。计算中他们采用了局域密度近似方法,并将正电子势取成哈却势和关联势之和。图5示出了在未掺杂和掺Zn(替代Cu(1))Y123系统中(010)平面内正电子密度分布等高图。由图可见,未掺杂Y123中,正电子密度分

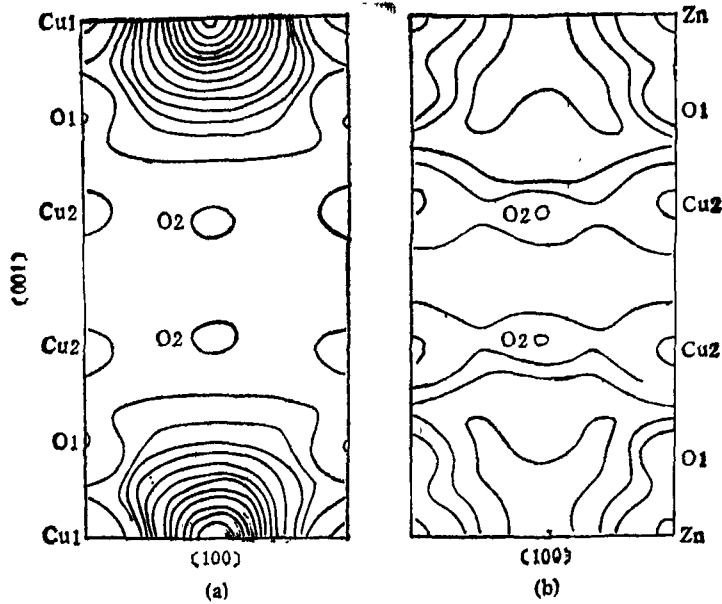


图5 未掺杂(a)和掺 Zn 的 Y123 (b) 中(010) 平面内的正电子密度分布等高图^[9]

布的极大值在 Cu-O 链的 Cu(1) 原子之间, 而在 Cu(2)-O 面区的正电子密度极少, 因此正电子主要探测 Cu-O 链。在掺 ZnY123 中, 正电子密度分布变得较为均匀, 而且正电子主要对 Cu(2)-O 平面取样。

根据上述理论计算结果, 对未掺杂 Y123, 正电子密度分布集中在 Cu-O 链之间的区域, 而实验观察到 T_c 以下正电子寿命降低, 这表明超导过程中 Cu-O 链区电荷密度增加。这一过程可用一简单的物理图象来说明, 即在超导态, 发生了电荷密度从 CuO_2 面区间 Cu-O 链区的转移。图 6 示出了 Y123 中局域电荷转移图象, 左边的带表示正电子密度分布的范围。

利用这一图象也可解释 Zn 掺杂 Y123 中所观察到的 T_c 以下正电子寿命增加。前已述及, 在 Zn 掺杂 Y123 中, 正电子取样 CuO_2 面区, 正电子波函数与电子波函数的交迭在 CuO_2 面区有较大的值, 对正电子湮没的贡献主要来自 CuO_2 面内的氧原子 [O(2) 和 O(3)]^[10]。因此在超导态时若发生电荷密度从 CuO_2 面向 Cu-O 链转移, 将会使湮没位的电荷密度降低, 从而导致 T_c 以下正电子寿命增加。

除了 Y123 之外, 还报道了 $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_7$ ^[11], $\text{La}_{1.85}\text{Sr}_{0.15}\text{CuO}_4$ ^[12], TlBaCaCuO ^[13], 等高温超导

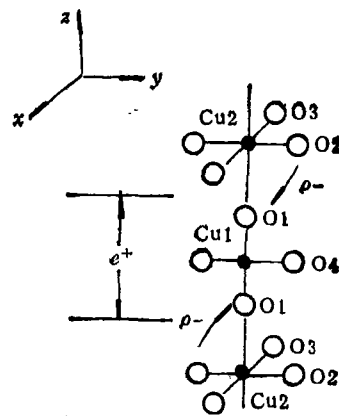


图6 Y123 中局域电荷密度转移示意图箭头表示电荷转移方向

体中正电子湮没参数的温度关系及相应的正电子密度分布计算。对所有这些研究结果进行分析, 人们不难得出如下结论: T_c 以下正电子湮没参数的温度关系与正电子密度相对 CuO_2 层的分布相关。如果正电子探测的是 CuO_2 层, 则 T_c 以下正电子寿命增加, 如 Zn 掺杂的 Y123、 LaSrCuO 和 TlBaCaCuO (2223 相) 中所观察到的那样。如果正电子密度主要分布在围绕 CuO_2 层的周围区域, 如 Y123 中的 Cu-O 链区, 则 T_c 以下正电子寿命降低, 如 Y123 和 Y1248 中所观察到的那样。因此, 不同的温度关系都

可用电荷转移图象来说明,即在超导态发生了从 CuO_2 向顶角氧原子的电荷转移。应该指出,在高温超导研究中,电荷转移不仅成功地用于解释已有的正电子湮没温度实验数据,也还用于阐述其他一些实验结果^[10]。例如, Y123 中点阵参数和 Cu-O 键长随氧缺位的变化就是用 CuO_2 层和 Cu-O 链间的电荷转移来说明的;由 EXAFS 测量观察到的超导转变时 Cu-O 键长的变化也据此思路来解释。总之,正电子湮没研究表明,超导态的空穴配对与电子从平面内氧原子向平面外的顶角氧原子的转移有关。

三、研究缺陷特性

高温超导体的重要特点之一是存在结构缺陷,它们对超导特性有强烈影响、正电子对空位型缺陷极为敏感,可以得到固体中缺陷尺寸、组态、浓度等独一无二的信息,而且可作无损和原位测量。正电子探测的缺陷尺寸范围是几至几十 Å,这正是普通电镜不灵敏的区域。正电子湮没已广泛应用于固体缺陷的研究,并已取得成功。曾用正电子湮没研究 YBCO 超导体中的氧空位^[14],发现正电子湮没寿命和多普勒展宽线形参数与氧含量有关并能指示从正交相到四方相的转变。正交相 ($\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_7$) 和四方相 ($\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_6$) 之间湮没参数的差别还可用于研究 YBCO 在低温时的相分离。

最近还用正电子湮没研究了用快中子辐照 YBCO 中的缺陷特性¹⁾。研究发现,使用快中子(能量为 0.1—10 MeV)辐照 YBCO 能使其临界电流 J_c 提高几个量级。如用 $6 \times 10^{17} \text{ n} \cdot \text{cm}^{-2}$ 剂量的快中子辐照熔融织构生长的 YBCO 后,在 77K 和 1T 磁场下, J_c 从 $1 \times 10^3 \text{ A} \cdot \text{cm}^{-2}$ 增加到 $1.6 \times 10^3 \text{ A} \cdot \text{cm}^{-2}$ 。一般认为辐照产生的缺陷是强钉扎中心,它导致 J_c 增强。研究这些辐照产生缺陷的尺寸及浓度,以及它们对 J_c 的影响是极为重要的。测量了不同剂量 ($6, 20, 60, 90 \times 10^{16} \text{ n} \cdot \text{cm}^{-2}$) 快中子辐照后样品中的正电子寿命,并对辐照过 ($6 \times 10^{17} \text{ n} \cdot \text{cm}^{-2}$) 的样

品进行了退火实验,退火温度从室温到 600°C。结果表明,快中子辐照后的样品中主要有两类缺陷,一类是阳离子单空位,它们对 J_c 的影响不大;另一类是尺寸约 25 Å 的孔洞,它们的数量随快中子辐照剂量的增加而增多。当剂量小于 $2 \times 10^{17} \text{ n} \cdot \text{cm}^{-2}$ 时,孔洞浓度少于 10^{15} cm^{-3} ,当剂量为 $6 \times 10^{17} \text{ n} \cdot \text{cm}^{-2}$ 时,孔洞浓度达 $1 \times 10^{16} \text{ cm}^{-3}$ 。这类缺陷的浓度直接与 J_c 相关, J_c 随孔洞浓度的增加而增加。在退火实验中还观察到当退火温度达 500°C 时,这种孔洞会崩塌,其强度大为减少,相应地 J_c 也大大降低。

我们相信,正电子湮没将会在研究氧缺位、氧空位的运动、微观缺陷的特性及其对 J_c 的影响、磁通钉扎机制等方面作出更多的贡献。

四、研究结构转变和结构不稳定性

在用正电子湮没研究高温超导体的温度实验中,有些研究发现在 T_c 附近以及 T_c 以上若干温区正电子湮没参数有反常变化。这和某些比热、超声、内耗以及穆斯堡尔实验得到的结果类似。例如曾观察到多晶 YBCO^[15,16]、多相 BiSrCaCuO^[17] 中 T_c 附近正电子湮没寿命或多普勒展宽 S 参数有反常变化。这是否指示超导转变之前有一预转变呢?此外,还观察到未掺杂^[18]和掺 Sn 的^[19]多晶 YBCO 样品中在 T_c 以上若干温区 ($\sim 130\text{K}$ 和 $\sim 260\text{K}$) 正电子寿命有反常的谷值,这可能与氧空位的运动和有序有关。尽管导致正电子湮没参数反常变化的机制还不十分清楚,需要作更加深入地研究,但正电子对高温超导体的结构转变十分灵敏则是确定无疑的。

综上所述,正电子湮没是研究新型氧化物高温超导体电子特性的极为有用的工具。已在直接测量费米面;研究电荷密度分布及其温度关系乃至局域电荷转移;研究缺陷特性,特别是氧空位和辐照产生的缺陷;研究结构转变和结构不稳定等方面均取得重要进展。可以预期,

1) X. Lu et al., Phys. Rev. B, (in Press).

更加深入地研究正电子湮没将为理解高温超导机制和寻求性能更好的高温超导材料两方面都作出更大的贡献。

- [1] J. Muller and J. L. Cisen (eds.), *High Temperature Superconductors: Materials and Mechanisms of Superconductivity*, North-Holland, Amsterdam, (1988).
- [2] R. N. Shelton and W. A. Harrison (eds.) *High Temperature Superconductor: Materials and Mechanisms of Superconductivity II*, North-Holland, Amsterdam, (1989).
- [3] W. Brandt and A. Dupasquier (eds.), *Positron Solid State Physics*, North-Holland, Amsterdam, (1983).
- [4] H. Haghighi et al., *Phys. Rev. Lett.*, **67**(1991), 382.
- [5] P. E. Mijnaerends et al., *Physica, C*, **178**(1991), 113.
- [6] Y. C. Jean et al., *Phys. Rev., B*, **36**(1987), 3994.
- [7] S. G. Usmar et al., *Phys. Rev. B*, **36**(1987), 8854.
- [8] D. R. Harshman et al., *Phys Rev B*, **38**(1988), 848.
- [9] Y. C. Jean et al., *Phys. Rev. Lett.*, **64**(1990), 1593.
- [10] A. Bharathi et al., *Phys. Rev. B*, **42**(1990), 10199.
- [11] C. S. Sundar et al., *Phys. Rev., B*, **41**(1990), 11685.
- [12] Y. C. Jean et al., *Phys. Rev. Lett.*, **60**(1988), 1069.
- [13] C. S. Sundar et al., *Phys. Rev. B*, **42**(1990), 2193.
- [14] L. C. Smedsjkaer et al., *Physica, B+C*, **150**(1988), 56.
- [15] S. J. Wang et al., *Phys. Rev., B*, **37**(1988), 603.
- [16] J. S. Zhu et al., *J. Phys. C*, **21**(1988), L281.
- [17] 王少阶等科学通报, **35**(1990), 1298.
- [18] S. J. Wang et al., *Phys. Stat. Sol. (a)*, **114**(1989), 273.
- [19] S. J. Wang et al, in "Positron and Positronium Chemistry", ed. by Y. C. Jean World Sci., Singapore, (1990), 500.

分数微积分进入半导体物理

——新型的分數微分谱

莫 党

(中山大学物理系, 广州 510275)

分数微积分是一种正在发展的数学工具, 在物理研究中还没有广泛应用, 我们在本文中首先给一通俗介绍, 然后介绍我们把分数微积分引入半导体物理, 对带间跃迁光谱进行分析的工作。着重描述所导出的带间跃迁介电函数的分数微积分表达式, 以及一种叫做分数微分谱的新型谱。这种谱可用于测定能带临界点参数和维度分析, 也可用于分数维度的场合。

Abstract

We propose the application of fractional calculus to semiconductor physics, in particular to the analysis of interband spectra. A new kind of spectroscopy—fractional derivative spectroscopy is also proposed for determining the parameters of critical points and the dimensionality, even in the case of fractional dimensions.

一、什么是 $\frac{d^{1/2}f}{dx^{1/2}}$ ——从普通微积分到分数微积分

每个上过大学的人都会学过微积分吧? 大家对于

$$\frac{df}{dx}, \frac{d^2f}{dx^2}, \frac{d^3f}{dx^3}, \dots$$

这样的一次微商、二次微商和三次微商、……, 以及

$$\int_0^x f dx_1, \int_0^x dx_2 \int_0^{x_2} f dx_1, \dots$$

这样的一次积分、二次积分、……, 恐怕是很习惯的了。但是, 有没有次数不是整数的微商或积分呢? 它们遵从什么的运算规则? 又有哪些应用呢?