

分. 对于光学模式识别处理器说来, 需要一个适当形式的知识库. 当然, 有时是用规则库或事实库来代替. 它们的内容总是涉及到被识别目标的图像, 例如识别汽车时, “桑塔纳像这类汽车”, “奔驰380和奔驰680都是轿车”. 如果是在特征空间里表示图像, 或者是用符号表示, 那么也应安排同样知识库. 这种库称为结构属性知识库. 此外, 还有功能属性库和目标类别库. 例如, “它们是战斗机”, “这个飞机是轰炸机”等. 实际上, 并非在任何情况下都需要这种库. 通过适当地组织和安排, 在决策网络的某个节点处, 例如在“作出目标类别的结论”的地方安放这种库. 这类系统是根据给定的数据来推断目标的类别, 因此也称为推断机. 不过, 这种推断是利用符号或计算特征数值实现的. 当然, 这种处理器也可以是符号处理器.

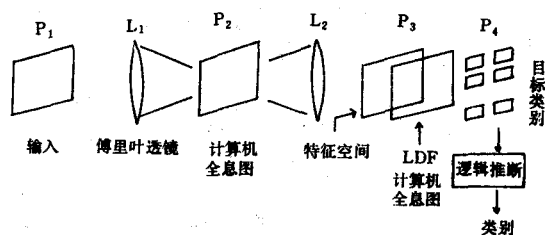


图7 光学线区分函数(LDF)的决策网络

图7示出一种利用光学线区分函数的关系图决策网络处理器. 它使用计算机全息图作模板, 对输入图像形成偏移不变图样的计算机形

貌图(CT). 它所包含的处理功能有: 在 P_3 处计算出特征向量 X 同各线区分函数 W . 两者的向量内积, 其结果在 P_4 处产生. 如果我们利用高维度的特征空间, 并允许在关系图的不同节点处使用不同的特征, 那么它的机动性更大, 性能更好, 还可以在每个节点处分离出多种类别.

据预计, 决定网络处理器的技术进展, 会使光学人工智能处理器的性能大幅度地提高. 似乎, 这种处理器非常充分地利用了光学系统的平行处理能力.

本文所介绍的内容实际上是人工视觉知识的进展状况. 不难看出, 调动所有的光学知识, 用于实现这种功能. 人类正在探索如何真正地为人装上“眼睛”. 一方面, 光的平行机制为摆脱计算机大容量和高速度的负担, 确实提供了很有希望的路径. 另一方面, 光学人工视觉不论在装置的复杂性, 一机多功能, 还是实用化上都还有很长的路. 仅就某一种功能或特定目标的识别应用, 光学识别能力已经达到相当好的水平. 特定装置的实用化前景也是十分诱人的.

- [1] E. Wolf, *Progress in Optics*, XIV(1987), 391.
- [2] G. G. Lendaris, *Proc. IEEE*, 58-2(1970), 198.
- [3] H. Kasden, *Proc. EDSD*, 6(1975), 248.
- [4] G. Eichmann, *Applied Optics*, 22(1987), 2087.
- [5] D. Casasent, *Proc. SPIE*, 882(1987), 47.
- [6] D. Casasent, *Proc. SPIE*, 634(1986), 439.

爱因斯坦与黎曼几何

阳兆祥

(广西大学物理系, 南宁 530004)

1907年爱因斯坦发现等效原理后, 由于一时还找不到建立理论的途径, 广义相对论在几年中没有多大进展. 从1908年至1911年, 他在这方面的的工作主要是为新的引力观点寻找可由实验检验的证据, 这就是引力红移和引力场中光

线的弯曲两个效应. 1911年他导出了这两个效应的定量公式^[1], 但由于方法是半经典的, 后一效应的公式并不正确. 这两个效应当时都未能进行检验. 前者对于像地球这样的弱引力场来说, 它过于微弱, 大家知道, 迟至1924年才由亚

当斯通过对天狼星的伴星的观测得到证实；而后一效应的观测也因为第一次世界大战的爆发而夭折。大约在1912年初，事情有了转机，突破口是他发现了引力场与空间几何的联系。

为什么引力场会与空间的几何性质有联系呢？爱因斯坦后来解释说，把等效原理和狭义相对论的结果结合起来就会得出这样的结论。他在《相对论的意义》、《狭义与广义相对论浅说》等名著中都是以对转动系统的分析为例来说明，因而我们猜测，这可能就是爱因斯坦当年思考这个问题的实际途径。有一些重要的旁证。1909年他在致索末菲的信中提到：“分析均匀转动的刚体对我来说似乎是十分重要的，因为把相对性原理扩展到均匀转动系统，是我1907年论文的……继续。”而在1912年2月发表的一篇札记性的论文中有了更具体的阐述：“在均匀转动系统中，由于洛伦兹收缩，[欧几里德几何定律]很有可能不再成立。”^[2]注意这里使用了“很有可能”这样的字眼，说明当时还未考虑成熟。

关于转动系统分析的准确内容，以《相对论的意义》中叙述得最为简明扼要：

“设 K' 是这样的一个坐标系，它的 Z' 轴同 K 的 Z 轴重合在一起，并且它以恒定的角速度绕 Z 轴转动。相对于 K' 是静止的那些刚体的排列是否遵循欧几里德几何的定律呢？因为 K' 不是惯性系，我们既未能直接知道相对于 K' 的刚体的排列定律，也不知道相对于它的一般自然定律。可是相对于惯性系 K 的这些定律我们是知道的，由此我们能推断出它们相对于 K' 的形式。设想在 K' 的 $X'Y'$ 平面上绕着原点画一个圆，并且画出这个圆的一条直径。又设想我们有许多根一样长短的刚性杆。假定这些杆是接连地沿着圆周和直径放着，并且相对于 K' 是静止的。如果 U 是沿着圆周的杆的数目， D 是沿着直径的数目。如果 K' 相对于 K 不作转动，那么我们会得 $U/D = \pi$ 。但是如果 K' 在转动，我们就会得到不同的结果。假设在 K 的一定时刻

物理

t ，我们测定所有各根杆的两端。相对 K 来说，沿着圆周的一切杆都要经受洛伦兹收缩，但是沿着直径的杆却不受这种收缩。由此可见 $U/D > \pi$ 。

由此可见，相对 K' 来说，刚体排列的定律并不符合那些遵照欧几里德几何的刚体排列定律。”^[3]

上述论证的最后一段写得很简略，这里需作一点解释。沿着圆周方向运动尺缩造成 $U/D > \pi$ ，这是惯性系 K 的观测者得出的结论；对于 K' 系的观测者来说，根据等效原理，他可以认为自己所在的参考系是静止的，而存在着离心的引力场。对于上述现象 ($U/D > \pi$) 他自然解释为，由于引力场的存在，使欧几里德几何不再成立。把这个结论扩展到一切真实的引力场，就势必认为，存在引力场的空间，不再是欧几里德空间。这一发现，使爱因斯坦把广义相对论与非欧几何联系在一起。

二

当时爱因斯坦对非欧几何所知甚少，他在这方面的仅有知识，是大学读书时从盖塞 (Geiser) 教授那里听来的一点微分几何，盖塞讲的是高斯的曲面理论，而对爱因斯坦有帮助的正好也是这个理论。他后来回忆说：“直到1912年，当我偶然想到高斯的曲面理论可能是解开这个奥秘的关键时，这个问题才获得解决。我发现，高斯的曲面坐标对于理解这个问题是非常有意义的。”^[4]

从今天的观点来看，引力场的描述涉及四维弯曲空间，爱因斯坦应该直接去找黎曼几何才对；但是当时爱因斯坦并不知道黎曼几何的存在，走这样一段弯路是不可避免的。从另一个角度说，与黎曼几何的高度抽象相比，高斯的曲面理论比较直观，也许正是这种直观性，才使爱因斯坦容易产生与引力场进行类比的联想。

德国数学家高斯 (C. F. Gauss, 1777—1855) 在19世纪20年代从大地测量和地图绘制等实践中得到启发，创立了关于二维曲面的微

分几何理论. 以往数学家对于二维曲面, 都是把它“嵌入”到三维空间中用欧几里德几何的方法进行研究, 但这种方法在上述实践中显得十分不便. 这是因为地球表面的图形是曲面图形, 曲面上两点之间没有直线, 只有“测地线”(它是过两点的大圆弧的一段); 而由测地线所构成的曲面三角形, 其内角之和也不等于 180° . 在这种情况下, 用传统的方法进行计算就变得十分复杂. 可能是受到地理学上用经度和纬度来确定位置的启发, 高斯提出, 可以用一种“内禀”的方法来描述曲面, 即在曲面上引入一种“曲线坐标” u 和 v (经度和纬度是其中一例), 他并且证明, 曲面上任意长度元具有如下普遍表示式

$$ds^2 = g_{11}du^2 + g_{12}dudv + g_{21}dvdu + g_{22}dv^2, \quad (1)$$

式中 $g_{11} \cdots g_{22}$ 是 u, v 的函数, 称为“度规”, 它们由曲面的性质决定. 高斯利用曲线坐标和度规函数解决了求曲面上的测地线、曲面的曲率等一系列实际问题.

然而, 高斯的曲面理论还具有高斯当时没有完全想到的深远意义. 根据这个理论, 只要给定曲面上的曲线坐标 u, v 以及 u, v 的函数度规所表示的 ds^2 的表达式, 曲面的几何性质就能完全确定. 这样一来, “曲面本身可以看成是一个空间, 因为人们可以忘掉曲面是位于三维空间中这个事实”; 而且“假如把曲面本身看成是一个空间, 那么它具有哪一种几何呢? 如果把测地线当成曲面上的‘直线’, 则几何是非欧几里德的.”^[5]这就是说, 按照高斯的理论, 曲面本身可以看成“弯曲”的二维空间. 但有一个条件: 如果我们在曲面上任意取一个微小的区域, 它应近似是平面, 其中欧几里德几何仍然成立.

关于怎样将高斯的曲面理论与引力问题进行类比, 爱因斯坦在上面提到过的两本著作中作了说明^[6]. 下面我们循着他的思路, 详细地探讨一下这个类比的思想过程.

设有某个任意的高斯曲面, 我们在曲面上取一微小区域, 由于它可以看成是平面, 我们可以在这个小区域建立一个“局域笛卡尔坐标系” x_1, x_2 , 则长度元按照欧几里德几何可表示为

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2. \quad (2)$$

然而对于曲面上的有限区域, 我们不可能作大范围的笛卡尔系来覆盖整个区域. 为此需要引入曲线坐标 u, v , 为了能够用曲线坐标来表示长度元, 可以作从局域笛卡尔系到曲线坐标系的坐标变换. 设

$$x_1 = x_1(u, v), \quad x_2 = x_2(u, v),$$

则通过简单的微分运算并代入上式后不难证明, 用曲线坐标表示的长度元正好就是前面列出过的(1)式, 其中度规函数分别为

$$\begin{aligned} g_{11} &= \left(\frac{\partial x_1}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial u} \right)^2, \\ g_{12} = g_{21} &= \left(\frac{\partial x_1}{\partial u} \right) \left(\frac{\partial x_1}{\partial v} \right) + \left(\frac{\partial x_2}{\partial u} \right) \left(\frac{\partial x_2}{\partial v} \right), \\ g_{22} &= \left(\frac{\partial x_1}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial v} \right)^2. \end{aligned} \quad (3)$$

度规函数 $g_{11} \cdots g_{22}$ 描述了曲面的弯曲.

而在引力场中, 有着完全类似的关系. 为了说明这一点, 先要从数学家闵可夫斯基(H. Minkowski, 1864—1909)对狭义相对论在形式上的发展说起. 闵可夫斯基把狭义相对论中的光速不变原理在数学上表述为物理事件的“间隔”不变性, 即

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2$$

是一个不变量. 闵可夫斯基提出, 可以把 ict 形式上看成四维空间-时间的一维, 如果我们把 dx, dy, dz 和 ict 分别表示为 dx_1, dx_2, dx_3 和 dx_4 , 则间隔不变性就可以表示为

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2. \quad (4)$$

这与欧氏空间中长度元的表达式[(2)式]在形式上完全一致. 在欧氏空间中, 长度元对坐标的转动保持为不变量; 闵可夫斯基证明, 狭义相对论中的洛伦兹变换就相当于四维空间-时间坐标的转动, 因而间隔不变性具有与欧氏空间长度元不变性相似的几何意义. 闵可夫斯基的发现可以用几何语言概括成一句话, 就是狭义相对论的空间是四维赝欧几里德空间. 所以要加一个“赝”字, 是因为其中一维含有虚数, 但在变换性质上与其他维并无区别.

对于闵可夫斯基对狭义相对论所作的几何

解释,爱因斯坦最初不以为然,认为是一种多余的技巧,然而与引力问题联系起来以后,他认识到了这一解释的重大意义,后来曾多次公开表示感谢闵可夫斯基使他大大简化了从狭义相对论到广义相对论的过渡.如前所述,当存在引力场时,欧氏几何不再成立,或者说空间是弯曲的,因此引力场中不存在大范围的惯性系.但是,就每一时空点附近的小区域来说,却存在一种“局域惯性系”.事实上,引导爱因斯坦提出等效原理的假想实验——“爱因斯坦升降机”就是局域惯性系.为了说明这一点,让我们设想在引力场中,例如地球上空某点 P 处有一个封闭的箱子以该点处的重力加速度 g_p 自由下落,则箱子中一切物体都处于失重状态.根据等效原理,这个箱子参考系与无引力的惯性系在物理上等效,因此它也是一个惯性系;但另一方面,这个惯性系又是局域的,因为不同地点的重力加速度其大小和方向都不同,因而对于不同的时空点,就需要引入不同的局域惯性系.

如果把引力场与局域惯性系的关系拿来和高斯曲面理论中的曲面与局域笛卡尔系的关系相比较,则其中的相似性几乎是一目了然:引力场中的局域惯性系就相当于高斯曲面上的局域笛卡尔系,它们的共同特点是都是局域的,而且其中欧几里德几何成立,所不同的只在于空间的维数从二增到四;而高斯曲面就相当于存在引力场的弯曲时空,其区别也只在于空间的维数.这样,我们就不难猜出存在引力场的空间是怎么回事了——正像高斯曲面一样,要确定它的几何性质,只需要对间隔不变(4)式作从局域惯性系到引力场参考系的坐标变换.

设在引力场中某时空点附近建立一个局域惯性系,为区别起见我们用 $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ 表示,其中 $\xi_1 = ict$ 是时间坐标,则(4)式变为

$$ds^2 = d\xi_1^2 + d\xi_2^2 + d\xi_3^2 + d\xi_4^2. \quad (5)$$

对于大范围的引力场,我们可以建立任意坐标系 x_1, x_2, x_3, x_4 ,则类似的计算证明,此时间隔不变具有下列普遍表示:

$$ds^2 = g_{11}dx_1^2 + g_{12}dx_1dx_2 + g_{13}dx_1dx_3 + \dots + g_{44}dx_4^2, \quad (6)$$

物理

可简写成

$$ds^2 = \sum_{\mu, \nu=1}^4 g_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu, \quad (7)$$

其中度规函数定义为

$$g_{\mu\nu} = \sum_{\alpha, \beta=1}^4 \frac{\partial \xi_\alpha}{\partial x_\mu} \frac{\partial \xi_\beta}{\partial x_\nu} \eta_{\alpha\beta}, \quad (8)$$

其中 $\eta_{\alpha\beta}$ 是为了方便引进的一个辅助量

$$\eta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1 & (\alpha = \beta), \\ 0 & (\alpha \neq \beta). \end{cases}$$

容易验证,当空间维数为二维,即 $n=2$ 时,(8)式即回到高斯理论的(3)式.

借助于上述类比,爱因斯坦打开了通往新引力理论的大门.既然引力场与空间几何是不可分地联系在一起,只要确定了描述空间几何的度规函数 $g_{\mu\nu}$,则它们同时也描述了引力场.于是,一个崭新的引力理论其轮廓已隐约可见.

三

如前所述,爱因斯坦关于将引力与高斯曲面理论进行类比的思考,发生在1912年初,当时他正在布拉格德国大学任教.然而当他沿着这条思路继续走下去时,他却碰到了数学上的困难.首先,他不知道有没有现成的满足长度元的二次式即(7)式要求的多维空间的非欧几何,其实这就是黎曼几何,不过当时他还不知道它的存在.其次,广义相对性原理要求,广义相对论必须表述为一种对任意坐标变换保持广义协变的理论.闵可夫斯基在狭义相对论中创造了一种方法:只要把物理量表述为对洛伦兹变换保持协变的张量并把物理规律写成张量方程,就自动地保证了理论的协变性.显然,广义相对论也必须采用这样的方法,但是有没有能够对任意的坐标变换都保持协变的张量呢?他的数学知识回答不了这个问题.

1912年8月,爱因斯坦回到母校苏黎世联邦工业大学任理论物理学教授,这正好给他一个机会向他学数学的老同学,当时已在联邦工大任数学教授的格罗斯曼(M. Grossmann, 1878

—1936)求教. 爱因斯坦晚年回忆说:“我头脑带着这个问题,于1912年去找我的老同学马塞尔·格罗斯曼,那时他是[苏黎世]工业大学的数学教授. 这立即引起了他的兴趣,……他很乐意共同从事解决这个问题,但附有一个条件:他对于任何物理学的论断和解释都不承担责任. 他查阅了文献并且很快发现,上面所提出的数学问题早已专门由黎曼、里奇和勒维-契维塔解决了. 全部发展是同高斯的曲面理论有关的,在这理论中第一次系统地使用了广义坐标系. 黎曼的贡献最大^[7].”

在这里,有必要简略回顾黎曼几何的历史. 自从高斯提出他的曲面理论以后,一些数学家便认识到有可能把这种“内禀”几何的研究方法推广到三维和三维以上的空间. 但这个工作很不容易,原因是当维数增大时,描述空间弯曲的“曲率”这个函数变得非常复杂. 这里附带说明一下,既然度规 $g_{\mu\nu}$ 已经能够确定曲面的几何性质,为什么高斯还要引入曲率呢?原因是度规函数有一个缺陷,它依赖于所选取的特定坐标系. 同一个曲面,若选取不同的坐标系,则度规的形式完全不同,因而度规并不能直接告诉我们曲面的弯曲情况. 为此需要找到一个由 $g_{\mu\nu}$ 及其导数构成的函数,它只依赖于曲面的几何性质,而与坐标的选取无关. 高斯发现了这个函数,并且证明它是唯一的,这就是所谓“高斯曲率”函数. 高斯曲率是一个庞大的表达式,共包含15项,其复杂程度令人望而生畏. 当空间的维数大于二时,曲率不能由单一函数来描述,而是需要多个函数;维数越大,函数的数目越多. 由此不难想像,要把高斯的工作推广到任意 n 维空间是何等艰难. 这个问题是在1854年由高斯的学生黎曼(B. Riemann, 1826—1866)出色解决的,他在哥廷根大学的教授就职演说“论作为几何基础的假设”中提出了我们今天所说的黎曼几何. 他从长度元表式

$$ds^2 = \sum_{i,j=1}^n g_{ij} dx_i dx_j$$

出发,定义了“ n 维流形”,也就是 n 维弯曲空间的概念,他并且解决了如何确定 n 维流形的曲

率的方法. 在黎曼的影响下,克里斯托菲(E. B. Christoffel, 1829—1900)研究了长度元不变量在坐标变换下的性质,特别是他引入了著名的克里斯托菲符号,使黎曼曲率的表述大为简化. 另一方面,对黎曼几何中出现的像长度元、曲率这些对任意坐标变换保持为不变量的研究,引导里奇(G. Ricci-Curbastro, 1853—1925)提出了广义张量的概念,并于1892年定义了张量的一般运算和协变微分的规则(他称为“绝对微分”,意思是与坐标的选择无关). 1901年,里奇和他的学生勒维-契维塔(T. Levi-Civita, 1873—1941)发表了《绝对微分法及其应用》^[8]一文,阐述了张量分析的系统理论. 至此,黎曼几何的发展告一段落.

这样,我们看到,当格罗斯曼为解决爱因斯坦提出的问题去查阅文献时,正如爱因斯坦后来所说:解决问题的数学方法“已经现成地在我们手边”. 他们合作的结果,导致第一篇比较完整的广义相论的论文《广义相对论和引力理论纲要》在1913年诞生.

这里还要提到一个小插曲,就是格罗斯曼为什么会提出“对任何物理学的论断和解释都不承担责任”这样的保留. 笔者认为,这与当时科学界对黎曼几何普遍存在的偏见有关. 黎曼几何诞生后,在数学界反响很小. 到了19世纪末,数学家一般都承认它在逻辑上的合理性,但仍然对它的真实性表示怀疑. 例如,德国著名的科学家亥姆霍兹(Helmholtz)就曾批评黎曼几何是“假设多于事实”,他要求“让事实代替假设”. 亥姆霍兹的观点在当时很具有代表性,甚至像彭加勒那样的大数学家也常常重复类似的观点^[9]. 总之,在大多数数学家的心目中,仍然把黎曼几何看成是一种并无实际应用价值的抽象数学理论,他们仍然相信欧氏几何是现实中唯一真实的几何. 所以,格罗斯曼的保留,实际上反映了当时数学界对黎曼几何的怀疑心态. 广义相对论的建立使黎曼几何从假设变为现实,这不仅促进了非欧几何的发展,而且使数学家重新思考数学和自然界的关系这类根本性的问题,这是爱因斯坦对数学的贡献.

四

爱因斯坦寻找黎曼几何的过程已如上述,然而广义相对论真正诞生的时间不是在1913年,而是在1915年,这是因为它的问题并不完全就是黎曼几何和张量分析的问题.广义相对论的内容可分为三部分:(1)基本原理,就是广义相对性原理和等效原理,这个问题在1907年爱因斯坦已经解决了.(2)引力的描述和广义协变理论,前者是黎曼几何的问题,就是引入度规函数 $g_{\mu\nu}$ 来描述引力场;后者是张量分析的问题,就是使物理规律广义协变.在爱因斯坦与格罗斯曼于1913年合写的论文中,这个问题基本获得解决.(3)场方程,即 $g_{\mu\nu}$ 所遵从的微分方程,在1913年的论文中,这个问题没有得出正确的答案.关于这一点,需要作一些说明.

引力的描述和广义协变理论只解决了广义相对论的一部分问题.虽然描述引力场的 $g_{\mu\nu}$ 已经出现在物理方程中,但它是作为已知的东西出现的.换句话说,它们只回答了这样的问题:“在有 $g_{\mu\nu}$ 所描述的引力场的情况下,物理定律(例如力学、电磁学定律)将受到什么影响?”但是“ $g_{\mu\nu}$ 本身又决定于什么?它遵从什么样的微分方程?”这样的问题它并不能回答.后一问题是引力理论中更为根本的问题,这正像电磁学中的电场强度 E 和 B 是描述电磁场的量,我们最终必须确立 E 和 B 所遵从的微分方程(麦克斯韦方程)一样.只有这个问题解决了,广义相对论才能得出一些可以用实验检验的结果,用以与牛顿的引力理论相比较,判断孰优孰劣.然而与前一个问题不同,这里所碰到的不是一个纯数学问题,确立 $g_{\mu\nu}$ 所遵从的微分方程,主要是根据物理方面的考虑.由于牛顿的引力理论

在实践中与实际符合得很好,因而很难找出什么实验事实作为建立场方程的依据,这使问题的解决十分艰难.1912年当爱因斯坦开始考虑这一问题的时候,他对于所要寻找的方程只有一些模糊的概念.例如,它必须像其他物理规律一样是广义协变的;它应当包含物质的能量动量张量(因为这是引力场的源);特别是它必须把牛顿的引力定律作为极限情况包含在方程中.显然,上述这些要求不能唯一确定所要寻找的方程.1913年爱因斯坦在与格罗斯曼合写的论文中提出了场方程的第一个形式,但后来证明是错误的.经过两年极其艰苦的摸索,爱因斯坦才终于在1915年找到了一个新的场方程,并通过水星近日点“剩余进动”的计算,得到与天文观测精确一致的结果(这是牛顿的引力理论几百年来未能解开的谜),从而验证了它的正确性.至此,广义相对论才宣告正式诞生.

- [1] 许良英等编译,爱因斯坦文集,第二卷,商务印书馆,(1977),218,222.
- [2] A. Pais, 'Subtle is the Lord...'—The Science and the Life of Albert Einstein, Oxford University Press, (1982), 189, 201.
- [3] 许良英等编译,爱因斯坦文集,第一卷,商务印书馆,(1976),162—163.
- [4] A. Einstein, *Physica Today*, No. 8(1982), 47.
- [5] M. 克莱因著,北京大学数学系数学史翻译组译,古今数学思想第三册,上海科学技术出版社,(1980),308.
- [6] 爱因斯坦著,李灏译,相对论的意义,科学出版社,(1961),40—41;爱因斯坦著,杨润股译,狭义与广义相对论浅说,上海科学技术出版社,(1964),71—78.
- [7] 许良英等编译,爱因斯坦文集,第一卷,商务印书馆,(1976),48—49.
- [8] G. Ricci and T. Levi-Civita, *Math. Ann.*, **54**(1901), 125—201.
- [9] 袁小明,自然辩证法通讯, No. 6(1989), 63.