

最小作用量原理与物理学的发展^① (I)

——最小作用量原理的产生与发展

许良

(兰州大学, 兰州 730000)

最小作用量原理在物理学史上的重要地位是众所周知的, 结合不同时期的科学、社会和哲学等方面, 对这一原理两千多年的思想渊源进行了认真考察, 揭示了它由模糊的观念到具有神学色彩的科学原理, 再到物理学的普遍原理的发展过程所具有的丰富历史和这一过程所体现出的人类由美求真、追求科学统一的思想主线, 并就其发展过程中的某些启发性思想进行了方法论的、美学的和哲学的阐述。

在谈到我们对于自然界的不同表述方式时, 当代著名物理学家费曼曾深刻地指出: “目前我们所了解的最好的定律, 实际上是二者的结合。换言之, 我们用最小作用量原理加上局域性。今天, 我们相信物理定律必须是局域的, 也必须服从最小作用量原理, 但我们并不确实知道。”^[1]这里的“并不确实知道”大概是因为对此无法从逻辑上给以证明。而这一点也正是任何一门科学的最普遍原理所具有的特征。

物理学的基本定律和原理有许多, 然而就其最具普遍性和简单性而言, 可能要数最小作用量原理了。对此, 就连以专心致志于物理学的最普遍问题而著称于世的普朗克也曾感慨地说: “在几个世纪以来标志物理学成就的一般法则中, 就形式和内容而言, 最小作用量原理可能是最接近于理论研究的最终目的。”^[2]像这样一个少有的、极具普遍意义的原理不能不唤起我们对科学的激情, 去对其历史和现状作一番认真的考察, 从而去领略人类由美求真的最精彩的历史画卷, 吸收其中的思想之精华, 以利于我们的科研和教学。

一、最小作用量原理的产生

与其他任何一个伟大的、富有成果的思想一样, 最小作用量原理的产生也不是偶然的, 它有着自己产生和发展的丰富历史。随着人类对于自然界认识的不断深入和发展, 这一原理经物理

过了从朦胧、模糊的观念到量化的、具有优美表达形式的物理学基本原理的漫长历史。

在实践中, 人们不断发现许多自然现象都遵从特定的规律, 而发现和认识这些规律就是人类认识自然的主要任务之一。在对自然的思索中, “最小”的观念在亚里士多德那时就已经有了, 这就是他的名言: “在用很少就可以完成的地方却用了很多是无谓的。”许多世纪以来, 这一观念一直以不同的形式萦绕着历代科学家和哲学家, 呼唤着他们竭尽全力去探索自然界的奥秘。

环顾万物, 再没有比光与人类的关系更密切的了。可以说, 人类对光现象的认识史是与人类共长久的。光的直进性早就为人们所认识。约在公元前 300 年, 欧几里德就在他的《反射光学》一书中阐明了光的反射定律。此后, 亚里山大历亚的希罗 (Hero) 在研究光的反射现象时就曾提出了是什么东西决定了光的路线的问题, 在对光的直进性和反射定律的解释中表达了他关于自然界的经济本性的信念, 提出了光的最短路径原理: 光在空间中两点间的传播总是沿着长度最短的路径进行。这即是“最小作用量原理”最早期的表达。

根据光的直进性、反射现象以及神学和审美的原则, 希腊以后的哲学家和科学家们提出了大自然以最短捷的可能途径行动的学说, 或

^① 兰州大学青年教师基金资助项目。

者如 Olympiodorus (公元六世纪) 在他的《反射光学》中所说:“自然界不做任何多余的事或者任何不必要的工作。” Leonardo da Vinci 认为, 自然是经济的, 并且自然界的经济是定量的. 在 Robert Grosseteste 看来, 自然总是以数学上最短和最好可能的方式行动. 英国唯名论者奥卡姆则在反对经院哲学关于“形式”“隐藏的质”的臆说中, 从方法论上提出了“经济原则”, 即所谓的“奥卡姆剃刀”:“用较少的就可以做到的事, 多做反而无益.” 总之, 在中世纪时代, 自然以最经济的方式行动的观念是普遍地为人们所接受的.

最小作用量原理发展历程中的下一个质的飞跃是与近代自然科学相伴而生的. 在以实证精神和数学方法的运用为其根本特征的近代自然科学时代, 科学家们已不再满足于关于自然的定性的、猜测性的观念, 而是要把这些观念量化, 并从而去预言新的事实.

在这一时期产生的费马原理是最小作用量原理迈向科学化、量化的重要一步. 它使得最小作用量原理由最短距离的说法转变成了最短时间的说法, 并且具有了更大的普遍性. 在对光的折射现象的研究中, 费马发现最短路径原理并不成立. 然而, 由于受自然界总是以最短捷的方式行动的观点的指引, 他设想光的折射也许是在同一基础上进行的. 1657 年, 通过修改最短路径原理, 他提出了自己的“最短时间原理”, 并于 1662 年把这一原理应用于证明光的折射定律. 这一原理是说: 光经过两种介质的界面时, 无论是发生反射还是折射, 在二点之间所走的路径总是以最短的时间通过的那条, 即积分

$$\int_{P_1}^{P_2} dt = \int_{P_1}^{P_2} \frac{dl}{u}$$

为最小值. 利用光在介质中的速度与折射率 n 之间的关系并写成变分形式:

$$\delta \int_{P_1}^{P_2} n \cdot dl = 0.$$

作为几何光学的高度概括性理论, 费马原理使得此前彼此独立的光的直进性定理、反射定律、

折射定律和光路可逆性定理得到了简洁、优美的统一表达. 它曾被诺贝尔奖金物理学奖获得者薛定谔誉为波动理论的“精华”, 在波动力学的创立过程中发挥了极为重要的作用.

作为最小作用量原理早期应用中最成功的例子, 费马原理的简洁、优美的形式以及它对许多自然现象的高度概括性解释, 似乎暗示了某种更普遍的原理存在的可能性. 尽管它的产生有着浓厚的目的论色彩并受到笛卡尔派和莱布尼兹派的激烈反对, 它还是被 17 世纪以后的许多学者所公认, 并激励着他们去把这一原理向更大的领域推广, 去探求更大的普遍性.

17 世纪末—18 世纪初, 随着资本主义的不断发展, 经济因素在人们的思想上和行动上受到越来越多的注意. 关于自然界的节约本性的比喻出现在当时的许多哲学家和经济学者的著作中^[3]. 以著名的法国重农论者奎斯纳 (Quesnay) 为例, 他认为社会经济系统受制于极值原理, 因为它的根本任务在于使花费最小而受益最大. 这些观念对于促进自然经济化思想的接受和最小作用量原理的产生是十分重要的. 对此, 科学史家谢瑞克 (P. Schrecker) 曾指出: “最小作用量原理从它的前史 (即它的推测性的形式) 进入它的历史 (指它达到数学化的阶段) 是与经济世界向工业主义过渡以及资本主义所导致的经济因素比以往任何时候都更受到人们注意的时代相吻合的.”^[4]

在最小作用量原理这一时期的发展史上, 值得一提的一个重要人物是莱布尼兹. 这不仅是因为他与此后发生的关于最小作用量原理的优先权的著名争论有关, 更重要的是他的一些思想对最小作用量原理的产生以及当代物理学都有着突出的影响. 1682 年之后, 莱布尼兹认真考虑了自然现象中的“作用量”的概念, 并假定它代表一个精确的科学概念, 支配着所有的力学和光学过程, 自然界所发生的真实过程是与作用量的极值相联系的. 上帝在选择这个真实的世界时所利用的形而上学原理——极值原理是“最好的”或“最完美的”. 然而, 由于莱布尼兹过分迷恋于自然守恒的思想, 他除了

试图发展一个类似于能量守恒的作用量守恒原理之外，并没有充分利用作用量的思想。按照作用等于效果的原则，莱布尼兹宁可选择守恒原理，而通过同样的努力获得较大的效果或通过较小的努力获得同样的效果在他看来是不可能的。虽然他没有明确表达出最小作用量原理，但他关于最小作用的许多思想对后来的莫培丢却产生了深刻影响。

在这种思想基础和社会历史条件下，对于信奉自然界的经济本性的莫培丢来说，有待发现的是物体运动过程中自然界的真正花费，也就是说，有待发现的不是运动物体所遵从的最简单的或最容易的路线，而是最便宜的路线。通过对希罗、费马和莱布尼兹等人关于最小作用量的研究，莫培丢认为时间的花费、克服的阻力都不能似乎有理地被当作自然界的花费，它们只是路径的特性，即最短的或最容易的，其单独都不适宜于把真实路径描述为最便宜的一个。他既要坚持笛卡尔的光粒子说，同时又要保留费马的优美方法，从而去找出一个符合牛顿力学的最小作用量原理^[5]。

1744年4月15日，莫培丢在提交法国科学院的题为《论各种自然定律的一致》的论文中，从光的粒子说出发对光现象进行了认真研究，通过修改费马原理，提出了一个符合光粒子说的最小作用量原理：光在空间两点间的运行总是选择作用量为最小的路径。他把作用量定义为^[5]

$$\int v \cdot ds,$$

其中 v 为光速， ds 为路径元。由此原理出发，他进一步导出了光的反射定律和折射定律。1746年，莫培丢在论文《从形而上学原理推导运动和静止定律》中，进一步推广了最小作用量原理。对于物体的运动，他定义作用量为 $mv l$ （其中 m, v, l 分别为物体的质量、速度和通过的路径长度），并由此导出了弹性体和非弹性体的碰撞定律和杠杆定律。在莫培丢看来，这是一个最具普遍性的原理，它适用于宇宙间一切物体的运动，它的简洁、优美乃是最高明的造物主物理

的威力的显现，它揭示了上帝创世的秘密。

最小作用量原理的提出立刻引起了一场历史上有名的关于优先权的争论，这是一场充满种种疑团的争论。争论的一方是莫培丢，另一方是莱布尼兹主义的信奉者柯尼格 (Konig) 和法国启蒙思想泰斗伏尔泰 (Voltaire)^[6]。然而综观历史事实，我们会看到必竟是莫培丢打破了莱布尼兹的物理学和形而上学体系，代之以可变和最小化的思想，第一个明确地提出了这一原理，荣誉属于他是当之无愧的。莫培丢本人也认为，明确提出最小作用量原理是自己一生最大的成就。尽管这一原理的产生有着浓厚的神学色彩以及在处理具体问题时还存在一定的概念上的模糊性^[7]，它对此后的物理学家还是有着经久不衰的魅力。

值得指出的是，对于莱布尼兹和莫培丢来说，守恒原理和最小作用量原理是被断然接受的，同时接受二者似乎是矛盾的。而这二者的一致性只是到了本世纪初才由诺特 (E. Noether) 从理论上证明了。即对于作用量的每一种对称性 (变换不变性)，都有一个守恒定律与之对应。另外，光学的费马原理和粒子的莫培丢最小作用量原理似乎是矛盾的。因为前者的积分项是与速度成反比的，而后者则是与速度成正比的。而这二者间的深奥关系以及这种关系的物理意义只有在德布罗意的物质波理论提出之后才得以明确地阐发出来^[8]。

二、最小作用量原理的进一步完善

最小作用这个被雅可比称作“分析力学之母”的原理在其发展过程中所表现出的泛神论色彩和美学价值对以后的分析力学的创立者欧拉、拉格朗日、哈密顿、高斯以及本世纪的吉布斯、普朗克等人产生了重大影响，是他们进一步完善和推广了这一原理。

几乎与莫培丢同时，欧拉也独立地达到了最小作用量原理，并就基本的结论有着与莫培丢一致的看法。在1740—1744年的通信中，他表示同意莫培丢的观点：上帝一定已经按照某

种这样的基本原理构造了宇宙，而这种原理的存在就证明了上帝的安排。就保守力场中单个质点的运动，他证明了这一原理，并用变分法把它表示为

$$\delta \int v \cdot dl = 0.$$

它表示与邻近的假想路径相比，实际路径的作用量为稳定值。这样一来，这一原理就与数学的重要分支——变分法密切联系起来了，并由此为变分法的发展提供了新的动力。

莫培丢和欧拉的神学与形而上学倾向首先受到了达朗伯的严厉批判。1769年他致信拉格朗日，批评欧拉是“伟大的解析家，拙劣的哲学家”，“上帝不赐两物于一人”。正是拉格朗日把最小作用量原理看作纯粹的物理学原理，而且更为普遍地确立了它。

拉格朗日应用自己熟知的变分法，从动力学的普遍原理：达朗伯-拉格朗日原理出发，于1760年严格证明了最小作用量原理，并把它推广到多粒子系统，得到了这一原理的一般表达式。对于多粒子系统来说，这一原理表述为：当完整保守系统从一个位形转移到另一个位形时，对于一切具有相同总能的可能运动来说，只有真实运动使作用量为最小，即

$$\Delta S = \Delta \int_0^t = \sum_{i=1}^{3n} m_i v_i^2 dt = \Delta \int_0^t 2T dt = 0,$$

其中 S 为系统的作用量， n 为系统的粒子数， t 为运动在始末位置间经历的时间， T 为系统的总动能。对于单个粒子而言，上式就是莫培丢原理。

最小作用量原理的进一步发展在哈密顿那里达到了顶峰。1833年发表在《都柏林大学评论》(Dublin University Review) 上的一篇文章中，他对最小作用量原理作了认真考察，并作出了对现代物理学极富启发意义的论述。他首先分析了人类对光现象的认识史，指出光学也与其他科学一样有分析法和综合法这两种研究方法。而当把光学定律也像其他物理定律一样用纯数学的形式表达出来时，它们的数学结果远没有像其他定律的数学形式那样得到充分地

探索。而且，当光学的归纳法受到当时的实验的有力推进时，演绎方法却是那样少地受益于现代数学。他被理论力学中的拉格朗日方法的简洁、优美和它的实用性所吸引，并在这一方法的启示下试图去类似地处理光学，以建立一门演绎光学。他认为：“在演绎光学中，如果能够得到一个一般的方法，它必然来自某个具有高度普遍性的定律或原理。那么，这个可以给出全部已知的光学知识的最高的和最有普遍性的原理是什么呢？我认为答案必定是那个通常所称的最小作用量原理”^[9]。与此同时，他也阐明了自己与莫培丢、欧拉、拉格朗日等人对待这一原理的深刻区别：“虽然最小作用量原理已如此立足于物理学的最高原理之林，然而，从宇宙的经济学的观点来看，……不能把这个量的经济性看作是宇宙的神圣的思想而设计的，尽管某种简单性可以被认为包括在这种思想之中”^[10]。

为了发展一种类似于几何光学的处理牛顿力学的数学理论，他首先从费马原理出发，发展了几何光学定律，由此证明了光线的轨迹可以从单一的数学量——特征函数的计算而得到，这一函数的特性与早就用于研究单粒子动力学的作用量函数的特性非常类似，并由此而认识了几何光学与力学间的平行性。几何光学的光线轨迹与牛顿力学的粒子轨迹间的类似性提示哈密顿用与几何光学非常类似的形式去表达力学定律的可能性。这一想法对于单粒子的运动来说是可行的，这进一步鼓舞了他。在他看来，只要从力学的最小作用量原理出发，把它转化成与费马原理尽可能相似的形式，力学与光学间的类比就会变得完整了。因此，他从莫培丢原理出发，并把它普遍化为稳定作用量原理。他没有直接引入一个作用量，而是用一个称作系统的拉格朗日的相关量或动势： $L = T - V$ ，其中 T, V 分别是系统的动能和势能。这一原理可表示为

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0.$$

它表明，在相同的时间、相同的始末位置和相

同的约束条件下,完整有势系统在所有可能的运动中,真实运动的哈密顿作用量具有极值,即对于真实运动来说,哈密顿作用量的变分为零.这就是我们常称的哈密顿原理,即哈密顿形式的最小作用量原理.

考虑到几何光学的费马原理和动力系统的莫培丢最小作用量原理之间的相似性,哈密顿导出一个粒子的行为可以用一种波动力学来描述的想法.他证明了具有同样总能量的粒子与具有适当折射率的介质中的光线是一致的.由于光线只是光的波动描述的一种近似,因而牛顿的粒子轨迹只是粒子的波动描述的一种近似就是完全可能的.这是一种极富有启发意义的思想,但由于时代条件的限制,这一思想并没在当时引起人们的注意.对此,薛定谔曾在其诺贝尔奖演讲中指出:“哈密顿原理和费马原理之间的密切相似性几乎被忘记了,如果还记得的话,也只是记住了数学理论的奇妙性.”^[11]只是到了20世纪,这一思想才被德布罗意和薛定谔在创建量子力学的过程中重新发掘出来并大胆地发展了.

最小作用量原理的完善和发展对此后物理学的发展有着重大的指导性作用.在机械论自然观占统治地位的时代,一切现象都被认为是由微粒子的力学行为所产生的,因而宇宙中发生的一切都可以用力学来论述.最小作用量原

理由于对力学研究的成功和所具有的美学价值也就为相近学科的发展提供了一个榜样,提供了一种研究范式.许多科学家争相在自己的领域中尝试推广这一原理,由此而产生了世纪之交物理学研究的一种新风尚.这种研究风尚有力地促进了热学、流体力学、电动力学等学科的发展.

- [1] R. P. Feynman, *The Character of Physical Law*, The M. I. T. Press, (1965), 54.
- [2] W. Yourgrau and S. Mandelstam, *Variational Principles in Dynamics and Quantum Theory*, Pitman, (1955), 126.
- [3] R. Ferola, *Fundamenta Scientiae*, 3-2 (1982), 168—169.
- [4] P. Schrecker, *Isis*, 33 (1941), 330.
- [5] P. E. B. Jourdain, *The Monist*, 22-2 (1912), 287.
- [6] B. Glass, *Scientific American*, 193-4 (1955), 101.
- [7] E. Mach, *The Science of Mechanics*, Illinois, Open Court Publish Co, 6th Edition (1960), 456—460.
- [8] De Broglie, *The Revolution in Physics*, Routledge & Kegan Paul Ltd, (1954), 38—40.
- [9] A. W. Conway and A. J. McConnell, *The Mathematical Papers of Sir. W. R. Hamilton*, Vol. 2, Cambridge, (1940), 316.
- [10] *Ibid.*, 317—318.
- [11] 宋玉升等译, 诺贝尔奖获得者演讲集: 物理学, 第二卷, 科学出版社, (1984), 266.