开普勒第一和第二定律的发现

曾宪明

（山东枣庄师范专科学校，枣庄 277160）

开普勒(Johannes Kepler，1571—1630)是德国的天文学家. 在《新天文学》(1609)中，开普勒详细地叙述了第一和第二定律的发现过程；在《哥白尼天文学概要》(1618—1621)中，开普勒又系统地阐述了包括行星运动三定律在内的日心学说. 这为我们追踪其思想发展提供了线索. 在开普勒所处的年代，解析几何、微积分以及万有引力理论都尚未建立，所以开普勒的科学发现有别于我们现在熟知的用牛顿力学的处理方法. 本文拟根据原始史料对开普勒第一和第二定律的具体发现过程作一概述.

一、距离定律和面积定律

1600年2月，开普勒前往布拉格造访了丹麦著名的天文学家第谷·布拉赫(Tycho Brahe，1546—1601)，并成为其助手之一[1]. 借助于第谷的天文观测资料，开普勒开始了对火星理论的不懈研究. 开普勒首先确立了两个基本观点：(1) 要描述火星的运动必须相对于真太阳，而不是地球轨道的中心；(2) 类似于其他行星，地球相对于太阳的运动也必须引入一个均衡点(equant)来描述.

引入均衡点来描述行星运动的观点渊源已久. 古希腊晚期的天文学家、地心说的集大成者托勒密(Ptolemaeus，约90—168)为了说明天体的一些非均匀运动，在本轮-均轮结构学说的基础上曾创造性地提出均衡点假设：本轮中心在均轮上的运动是不等速的，但相对于一均衡点却匀角速运动；该均衡点和地球分居均轮圆心的两侧，并且与圆心等距. 在开普勒看来，托勒密的均衡点假设虽具有几何对称性，但同时也具有人为的规定性. 所以，开普勒决定从经验验证的角度出发，先把均衡点设置在太阳和圆轨道中心连线上的任意一点，然后再由大量的火星观测资料最后确定其位置. 为此，开普勒提出了所谓的替代假设(vicarious hypothesis). 该理论给出的火星在日落后的日心经度误差只有约2′ 2″，但日心纬度误差却不能令人满意. 到1601年春，开普勒就放弃了替代假设[2].

替代假设的失败，使开普勒又转向了继承托勒密的关于均衡点假设的理论，并把它转换成相应的日心说理论. 如图1所示，C为圆心，S为太阳位置，Q为均衡点($SC=QC$)，A为远日点，P为近日点. 对于拱线AP附近的B,R点，由于行星绕Q作匀角速转动，所以有

$$\frac{\overset{\frown}{BA}}{\overset{\frown}{RP}}=\frac{AQ}{QP}.$$

又因为Q和S关于轨道中心C对称，所以

$$\frac{\overset{\frown}{BA}}{\overset{\frown}{RP}}=\frac{SP}{SA},$$

即行星在近日点和远日点附近在相等的时间内穿过的弧长与它们到太阳的距离成反比.

在拱线以外的其他位置，这一关系式并不精确成立. 开普勒当初并未意识到这一问题的

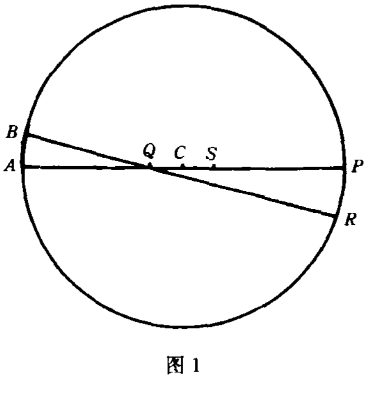

图1

重要性，他很自然地就把上述关系推广到全轨道，得到行星运动的速度与行星到太阳的距离成反比的结论，这就是所谓的“距离定律”(distance law).

虽然到此为止的推导完全是运动学的，但开普勒并没有把它看作是纯数学的虚构，而是把它作为一种实在的东西而采用. 在上面的推导中，把行星相对于均衡点的距离变换成相对于太阳的距离，这为开普勒立足于“实体”，进而探索行星运动的原因铺平了道路. 开普勒认为行星绕太阳转动，是因为有某种真实的运动力（motive force）施加于行星而使它运动；开普勒假设这运动力发源于物质实体——太阳，沿轨道平面向外传播，所以运动力的强度与传播的距离成反比. 根据当时流行的亚里士多德物理学，力的强度与运动速度成正比，所以开普勒很容易地就得到了行星运动的速度与行星离太阳的距离成反比，这就从“物理”上解释了距离定律.

在数学上推导距离定律，对于具有较高数学造诣的开普勒并不困难；而试图从物理上对之加以解释，则是开普勒开创性的工作. 由于其他一些工作的干扰，使开普勒在1602年底至1603年一度中断了对火星理论的研究，但最迟到1604年，开普勒在写作《新天文学》一书的书稿时，已对距离定律有了明确的描述[3]. 该书是一部类似于日记体裁的著作，全书于1607年完稿，1609年正式出版. 它详细地记述了开普勒在火星理论研究中的进展以及思想转变情况，是我们今天来研究开普勒建立第一和第二定律的历史的主要依据.

在得到距离定律后，开普勒就把它应用到火星轨道，这将牵涉到与每一度偏近点角（eccentric anomaly）有关的距离求和，其计算十分复杂，为了简化，开普勒引进了作为近似方法的面积定律（area law）. 所谓偏近点角〔如图2所示〕，系指行星从远日点 A 运行到某一点 B 时，AB 弧对轨道中心 C 所张的角；AB 弧对太阳位置 S 所张的角称为真近点角（true anomaly）.

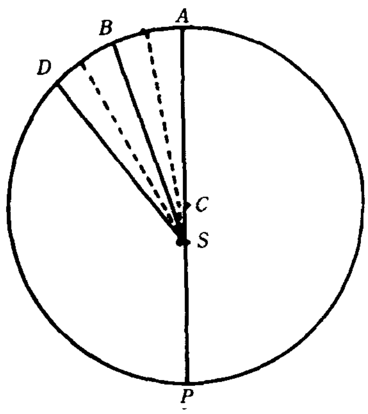

图2

开普勒把火星的偏心圆轨道等分为众多的小弧段. 由距离定律，火星沿轨道从 A 点运行到 B 点所需的时间大致与 AB 弧到太阳位置 S 的距离成正比，也即与扇形 SAB 的面积成正比；同理，该关系对其他等分的小弧段也成立. 所以开普勒最后得到：火星在轨道上运动时、向径扫过的面积必与对应所用的时间成正比. 这称为面积定律（现在称为开普勒第二定律）.

1604年，开普勒在写作《新天文学》第40章时给出了上述从距离定律向面积定律的过渡[4]. 这时开普勒认为这一过渡为一数学近似，真实的物理定律是距离定律，而面积定律仅是权宜之计. 我们可以看出上述过渡是粗糙的，开普勒后来也认识到这其中的确存在着两个错误[5]：第一个错误是关于行星运动的轨道为圆轨道的假设；第二个错误是使用了并不精确量度向径和的、以太阳为顶点的扇形面积. 令人惊奇的是，在《新天文学》第59章中开普勒却证明这两个错误非常精确地抵消了.

值得庆幸的是，开普勒由并不精确成立的距离定律竟得到了正确的、普遍成立的面积定律.

二、偏心圆——卵形线——椭圆

在《新天文学》第43章中，开普勒首先将面积定律应用到偏心圆轨道. 假设火星从远日

点开始沿偏心圆轨道运动，某一时刻运行到某一位置，根据面积定律计算出此时已运行的弧段对太阳所张的角（即真近点角），并把它与观测到的火星的日心经度（也是从拱线量起）相比较，可以得到：在 0°，90°和 180°偏近点角处两结果相符；在 45°偏近点角处，计算出的真近点角比观测的日心经度大 8′；在 135°偏近点角处，计算出的真近点角比观测的日心经度小 8′.

这就表明，若假设偏心圆轨道和面积定律成立，就会得到火星在远日点和近日点附近的运动比实际观测的要快；而在 90°偏近点角附近的运动比实际观测的要慢. 这说明要么偏心圆轨道的假设是错的，要么面积定律是错的，或者两者都是错的. 开普勒在《新天文学》第 43 章中证明，在把面积定律应用于偏心圆轨道的计算中，其数学误差不会导致在 45°和 135°偏近点角处的 8′ 误差. 在该书第 44 章中，开普勒把这一误差归结于火星轨道为圆轨道的错误假设，认识到火星轨道很可能是一个卵形线（oval）轨道.

为了寻找能描述火星运动径迹的卵形线，开普勒在数学上进行了不懈的努力. 他把面积定律再应用到卵形线轨道，在尝试了各种卵形线，甚至用辅助椭圆近似取代卵形线后，终于得到了真近点角的近似误差：在 45°偏近点角处，根据面积定律计算出的卵形线的真近点角比观测的日心经度小 8′；在 135°偏近点角处，计算出的卵形线的真近点角比观测的日心经度大 8′.

将上面把面积定律分别应用于偏心圆和卵形线计算出的真近点角相比较，可以明显地看出：在 0°，90°和 180°偏近点角处，两种情形下计算出的真近点角都与观测相一致；而在 45°和 135°偏近点角处，两种情形下计算出的真近点角的误差（相对于观测的日心经度）是大小相等、符号相反！由此，根据对称性，判定火星的轨道应介于偏心圆和卵形线之间也就合乎情理了.

1604 年 12 月 18 日，开普勒给 Fabricus 写了一封信，从信中可以看出开普勒这时已认识到真实的火星运动轨道应介于偏心圆和卵形线的中间，似乎火星的轨道应是一个精确的椭圆[6].

至此，可以说开普勒在探索火星运动轨道上已取得了决定性的胜利，也许他该庆贺已取得的胜利了. 然而开普勒却感到了失望，感到他在火星之役的胜利是空虚的，因为他还不能物理地解释为什么火星会沿椭圆轨道运动，并且还不能严格地、数学地描述出椭圆轨道. 这些都有待于进一步的探索.

三、椭圆轨道的磁力诠释和数学证明

1605 年初，开普勒为了从物理的角度来解释行星为什么会沿椭圆轨道运动，从而提出了“摆动理论”(libration theory). 开普勒假设，行星在随太阳到（想象中的）本轮中心的向径转动的同时，自身还在本轮上沿其直径摆动. 如图 3 所示，本轮的圆心为 O，其半径等于轨道偏心距 SC（即离心率为 e）. 行星在过本轮中心 O 的向径 SO 上的距离变化由摆动 $e(1-\cos\beta)$ 来表示（以 F 点作量度起点）. 例如，行星在远日点 A 时的摆动大小为 0，行星运动到近日点 P 时的摆动大小为 $2e$.

开普勒试图用磁力假说来解释其摆动理论. 开普勒受吉尔伯特（Gilbert，1540—1603）磁力思想的启发，假设太阳是一个单极磁体，每个行星都是一个准磁体（quasi-magnetic），它有两极，一极排斥太阳，另一极被太阳吸引，其轴在自身机体力（animal force）的作用下近似地恒指向空间同一方向. 因此，在太阳不断交替的磁性排斥和吸引的作用下，行星在随本轮中心绕太阳转动的同时，它在本轮直径上的摆动也就会发生变化. 这样由磁力作用就定性地解释了摆动理论.

数学上椭圆曲线的建立可以追溯到古希腊的阿波罗尼阿斯（Apollonius，约前 247—前 205). 阿波罗尼阿斯依据同一个圆锥的截面来研究圆锥曲线理论，著有《圆锥曲线》，对圆锥

曲线的性质进行了很详尽的研究，以致后代学者从几何学上很难有所突破. 直到17世纪中叶笛卡儿（Descartes，1596—1650）等人把代数引入到几何学，建立了解析几何，才使得对圆锥曲线的研究大为简单和方便. 在《哥白尼天

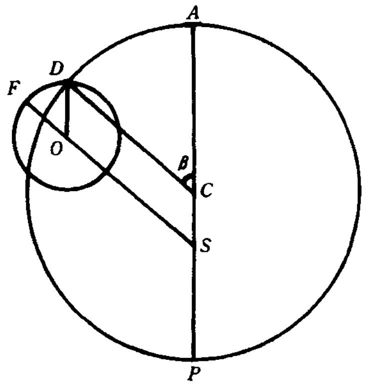

图3

文学概要》（1618—1621）中，开普勒只能根据阿波罗尼阿斯的理论，利用几何学来推导行星运动轨道的特性，这就大大增加了求解的难度. 在该书中开普勒在证明有关磬折形的一个数学关系式时，很隐蔽地给出了椭圆轨道距离的正确表达式. 据本人所知，开普勒的这一方法还未引起人们的注意，现作一介绍.

开普勒在推导中应用了椭圆的以下三个方面的性质.

1. 椭圆和其外切圆的关系

如图4所示，假设由 P,L,H,E 等点描成的曲线为椭圆，则有

$$DB : BE = GF : FH = KX : XL.$$

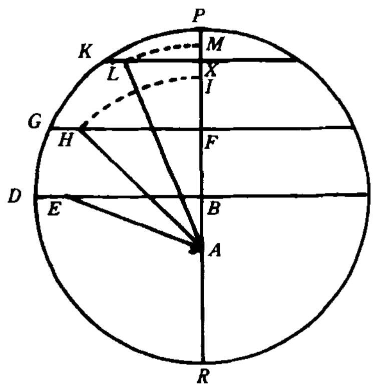

图4

2. 焦点的性质

阿波罗尼阿斯本人并未提出过焦点一词. 它是由开普勒在《光学天文》（1604）一书中首次把它引入到欧洲数学文献中的，但在《新天文学》（1609）中，开普勒并未使用这一术语[7]. 可以肯定，在《哥白尼天文学概要》（1618—1621）一书中，开普勒已开始使用焦点及其性质.

如图4所示，A,F 为两焦点，太阳处在焦点 A 的位置上. 从两焦点向椭圆上任一点连线，两线段长度之和等于长直径（longer diameter）PR；从两焦点向短直径（shorter diameter）上的 E 点的联线 AE 和 FE，都等于外切圆半径.

BA 称为偏心距. 前面曾提到，行星在远日点的摆动为0，在近日点的摆动为 $2BA$，所以对应于 E 点的摆动等于 BA.

3. 摆动和正矢的关系

要描述开普勒用摆动理论来解释行星的运动轨道，就要涉及到摆动的大小问题，那么如何几何学地量度摆动的数值关系呢？开普勒用行星到某一时刻已运行的路径所对应的正矢（Versed Sine）来量度此时的摆动大小[8]. 如图4所示，由 P,L,H,E 描成的曲线表示行星运行的椭圆轨道；L,H,E 处的摆动大小分别为 PM,PI（即 $AP-AH$），$AP-AE$（即 BA）；PK,PG,PD 弧段所对应的正矢分别为 PX,PF,PB. 正矢和摆动的关系为：正矢与摆动的比值是不变量. 例如

$$PB : BA = PF : (AP - AH). \qquad (1)$$

我们如今可以从笛卡儿坐标系中的椭圆方程很容易地导出此式.

开普勒根据椭圆的上述基本性质，又作了进一步的演算. 参见图5，将上述（1）式作一数学变形得

$$PB : BF = BA : (AH - BP). \qquad (2)$$

$\because\ \triangle GBF \backsim \triangle BCA$，

$\therefore\ GB : BF = BA : BC. \qquad (3)$

由（2）式和（3）式联立得

$AH = BC + BP$，

也就是

$$AH = BP + BA\cos\beta. \qquad (4)$$

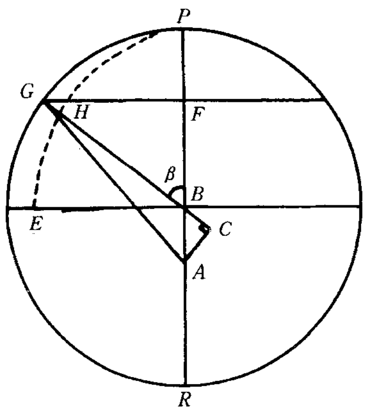

图 5

(4) 式给出了正确的太阳到椭圆轨道的距离表达式．(4) 式所表示的意义也可以从另外一个角度来理解：对任一偏近点角 β，它在椭圆轨道的外切圆上对应一点 G，将 G 到太阳的距离向过 G 点的圆直径上投影，其长度称为“直径距离”(diametral distance)，即图 5 中的 GC，它正好等于 (4) 式给出的 AH．也就是说，太阳到椭圆轨道的距离可由对应的直径距离给出．

开普勒非常欣赏直径距离的 $e\cos\beta$ 形式，认为它是“自然”所采取的形式；而在摆动理论中，行星在本轮直径上的摆动也有 $e\cos\beta$ 的形式；并且如果选取相同的量度起点，直径距离与摆动理论给出的太阳到行星的距离大小相等！这样随着灵感的一度闪现，开普勒认识到由摆动理论就能解释行星的椭圆轨道运动．由此可以看出，开普勒为了达到其理论体系的内部自洽，真可谓是苦心孤诣，煞费心血．

从开普勒第一和第二定律的发现过程我们可以看到，在其理论体系中掺杂着许多的猜想和假设，甚至是错误的内容，例如在面积定律的推导中使用了距离定律，在椭圆轨道定律的建立中使用了摆动理论．开普勒通过不断地澄清这些错误，最后终于得到了正确的行星运动定律．可见科学的发展绝非一日之功，一蹴而就的，我们必须满足于不断逼近的近似．正如开普勒所言：人的思想迈向真理的进步，只有通过消除错误来达到．如果说开普勒要对他的想象加以限制的话，那就是要谨慎地把猜测性的结果和观测事实相比较，如果与观测事实不符，就要毫不犹豫地放弃他所钟爱的幻想，这正是 17 世纪以来所倡导的重视实验的精神．

另一方面令人感兴趣的是，虽然阿波罗尼阿斯创立了椭圆理论，却丝毫未曾想到椭圆在天文学中的可能应用．在此后的 1800 年里，在柏拉图思想的影响下，人们普遍偏爱匀速和正圆，甚至想用若干个特殊的匀速圆周运动的组合来解释天体的非均匀运动．直到 17 世纪初，开普勒发现了行星运动轨道为椭圆轨道，才出现了圆锥曲线的实际应用，这是在天文学中的一次思想解放．对此，美国科学史家赫伯特・巴特菲尔德 (Herbert Butterfield) 给出了一段耐人寻味的评论：“开普勒发现行星运动的定律之所以是可能的，仅仅是因为这样的事实：他继承并发展了关于二次曲线的研究，这个研究使他在生前声名大震．当然，第谷・布拉赫在天文学上的观察只有当开普勒用他的数学头脑在那些收集到的材料的基础上进行工作时才成为历史上的革命因素[9]．”17 世纪科学的发展迫使数学站到整个时代的前沿，数学方程已成为描述物理定律的基本方式，开普勒对此也作出了自己的贡献．

[1] C. C. Gillispie ed. Dictionary of Scientific Biography, Charles Scribner's Sons, Vol. 7 (1973), 293.

[2] 同 [1], 294.

[3] A. Koyré, The Astronomical Revolution, Methuen, (1980), 186—188.

[4] 同 [3], 236.

[5] E. J. Aiton, *ISIS*, **60** (1969), 80.

[6] E. J. Aiton, *Annals of Science*, **35** (1978), 190.

[7] Curtis Wilson, *Scientific American*, **226** (1972), 102.

[8] Johannes Kepler et al., Great Books of the Western World, Encyclopedia Britannica, Vol. 16 (1952), 973.

[9] 〔美〕赫伯特・巴特菲尔德著，张丽萍等译，近代科学的起源，华夏出版社，(1988), 83.