观性质，而巨正则系综更可以用到化学反应中去.

吉布斯通过对这三种系综的研究，并利用统计平均、统计涨落和统计相似的方法，终于建立起逻辑上一致的而且与热力学经验规律一致的理论体系.

吉布斯的统计力学出版后，至少在10年内没有得到人们的重视，这是由于人们还没有充分了解统计力学理论自身的价值. 直到1911年，荷兰物理学家埃伦费斯特夫妇撰文描述了统计力学的基本概念，并指明统计力学在逻辑自洽方面取得的显著成就以后[8]，人们才逐渐认识到统计力学的伟大价值.

美籍奥地利物理学家哈斯(A. E. Haas，1884—1941)曾经高度评价吉布斯的这部巨著. 他说，这部巨著"是一座屹立在19世纪与20世纪物理学分界线上的纪念碑".[9]哈斯的评价应该说是合适的，因为吉布斯的系综理论不仅避开了困难，不仅简洁明快，而且当物质结构具有量子本性时，虽然麦克斯韦-玻耳兹曼统计不再适用，但吉布斯的系综理论框架仍然有效，只不过将哈密顿量改成算符就行了. 还有，系综理论基本方程给出的概率分布的因果律，不是牛顿力学中严格的因果律，因而它对于牛顿力学中的机械论哲学，也是一个严重的挑战.

[1] J. W. Gibbs, Elementary Principles in Statistical Mechanics, Developed With Special Reference to the Rational Foundation of Thermodynamics, Yale U. Press, New Haven, (1902).

[2] M. Klein, *Physics Today*, No. 9(1990), 42.

[3] B. Jaffe, Men of Science in America, Simon and Schuster, New York, (1944), 312.

[4] J. W. Gibbs, The Collected Works of J. Willard Gibbs, Vol. I. Yale U. Press, (1948), 167.

[5] Ibid, Vol. I. Part 1, pp. Vii—Viii.

[6] J. C. Maxwell, *Trans. Cambri. Phil. Soc.*, **12**(1879), 547.

[7] Ref[2], 48.

[8] M. Klein, Paul Ehrenfest, Vol. 1, North-Holland, New York, (1970), 120--141.

[9] Ref[3], 327.

均匀磁场中电荷的量子运动和规范不变原理

刘全慧　　张庆营

(湖南大学应用物理系，长沙　410082)

关　洪

(中山大学物理系，广州　510275)

一、问题的提出

自从1960年 Bohm-Aharonov 效应的实验证实[1]及1975年吴大峻和杨振宁关于规范相因子的出色工作后，[2]人们已普遍地接受了这样的观点，即量子力学中的矢势比它在经典力学中的作用要重要得多.[3]由于矢势的选择方法只有一种，即它的旋度必须给出磁场强度，因此，经典力学中的规范不变性只是经典电磁相互作用自动满足的一种对称性，并没有给经典力学带来任何新东西. 但是，在现代物理学中，规范场理论的研究表明是不变性支配了相互作用，电磁场只是自然界存在$U(1)$局域规范不变相互作用的必然体现[4]. 在非相对论量子力学中，电磁相互作用的规范不变原理认为，对于某一具有确定能量的电磁相互作用，选择不同的规范所得的态函数之间只能相差一些规范相因子[5—10]. 有了这一规范不变原理，就容易推导出体系中粒子的几率密度及几率流密度的规范无关性[5—10].

可是，我们所读到的非相对论量子力学文献都认为电磁相互作用的规范不变性是自动满足的.[5-10]即选择何种形式的矢势完全无关紧要，最多也只是方法上的问题. 但我们认为，事实可能不尽如此，即不是所有的矢势都可以恰当地描述电磁相互作用而不违反量子力学的基本原理及量子力学中的规范不变原理. 在本文中，我们将用这种思想分析均匀磁场中电荷的量子力学运动. 该体系常被称之为 Landau 体系，因为是 Landau 于1930年首先求得了其量子力学解[11]，并由该解预言了稳恒磁场中自由电子的轨道抗磁性，即 Landau 抗磁性[11]. Landau 抗磁性是用量子力学最早预言的可用实验检验的结果，因此影响深远[5-10]. 可是，我们的研究表明，该体系可能不能完全符合量子力学的规范不变性. 本文将分别从位形空间中 Landau 规范及 Landau 态函数的具体形式，和所求得的不同矢势下态函数间的明显关系式，从这两方面来看，该体系是如何违反量子力学的规范不变原理的.

二、从位形空间坐标看 Landau 规范及 Landau 态函数

考虑一带电荷 q，质量 μ 的粒子在稳恒磁场 $\boldsymbol{B}=(0,0,B)$ 中的运动. Landau 选择的规范(Landau 规范)为[5,11]

$$\boldsymbol{A}=(-By,0,0). \tag{1}$$

体系相应于量子化能级(Landau 能级)[5]

$$E_n\,p_z=(n+\frac{1}{2})\hbar\omega+\frac{1}{2p}p_z^2, \tag{2}$$

的 Landau 态函数为[5]

$$\psi(n,P_x,P_z)=\frac{1}{2\pi\hbar}\exp[(ixp_x+izp_z)/\hbar]\chi_n(y+\frac{p_x}{qB}), \tag{3}$$

其中，

$$\chi_n(z)=(\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}\,2^n n!})^{1/2}\exp[-\frac{1}{2}\alpha^2z^2]H_n(\alpha z), \tag{4}$$

$$\alpha=\frac{|q|B}{\hbar},\ \omega=\frac{|q|B}{\mu}, \tag{5}$$

求得态函数(3)的过程并不复杂，但其含义却不易领会. Ballentine 教授认为对态函数(3)式的诠释“远非明显”[6]；Sakurai 教授在比较了它与经典螺旋运动图象之后评述道，“结果大不一样”[7]. 问题的症结集中在为什么 x 轴上的几率密度可以是均匀的. 我们认为，这一几率分布可能并无观察上的意义. 下面从位形空间的坐标来看这一问题.

1. 关于 Landau 态函数

在 Landau 态函数(3)式中，x 轴上的状态完全是由共轭动量 $\hat{p}_x$ 唯一确定的. 众所周知，在我们的问题中，共轭动量是不具观察意义的物理量(这将使我们不可能在动量表象中求得具有观察意义的态密度，因为我们最多只能得到以共轭动量为自变量的态函数). 因此，不能认为 $\hat{p}_x$ 的本征函数 $\exp(ixp_x/\hbar)$ 表达了真实的态.

2. 关于 Landau 规范

在量子力学中，矢势是比磁场强度更为基本的物理量. 这样，必须先要求有一个明确的位形空间坐标系才能在其中写下矢势的明显形式. 有了这个坐标我们才能说空间 r 处发生了什么. 可是，选用 Landau 规范[(1)式]，只对该坐标系的 y 轴的原点、方向和标度及 x 轴的方向有明确要求. x 轴上原点的任意选择当然不会有什么问题. 但对 x 轴上的标度没有限制将会导致困难. 具体来说，如果区间 Δx 内有一可观察的几率，则区间 $k\Delta x\,(k>0)$ 内亦将有相同的几率. 这在物理上是明显不合理的. 因此，用 Landau 规范也不可能得到 x 方向上真实的几率密度.

三、从规范不变性看 Landau 规范及 Landau 态函数

事实上，我们的体系在如下三种规范下可以严格求解.

$\boldsymbol{A}_1=(-B_y,0,0)$ Landau 规范. (6)

$\boldsymbol{A}_2=(0,B_x,0)$ $\boldsymbol{A}_2=\boldsymbol{A}_1+\nabla(Bxy)$. (7)

$\boldsymbol{A}_3=(-\frac{1}{2}B_y,\frac{1}{2}B_x,0)$

$$A_2 = A_3 + \nabla(\frac{1}{2}Bxy). \tag{8}$$

略去 z 方向的自由运动部分后，其态函数分别为[5]

$$\psi_1(n, p_x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \exp(ixp_x/\hbar)\chi_n(y + \frac{p_x}{qB}). \tag{9}$$

$$\psi_2(n, p_y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \exp(iyp_y/\hbar)\chi_n(x + \frac{p_y}{qB}). \tag{10}$$

$$\psi_3(n, l) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\alpha^{L-|l|}}{|l|!} [\frac{(|l| + n)!}{n! 2^{|l|}}]^{1/2}$$

$$\exp(il\theta)\exp(-\frac{\alpha^2 r^2}{4}) r^{|l|} F(-n, l+1, \frac{1}{2}\alpha^2 r^2). \tag{11}$$

如果它们严格遵守规范不变原则，则应该有

$$\psi_2(n, p_y) = \exp(i\alpha^2 xy)\psi_1(n, p_x). \tag{12}$$

$$\psi_2(n, p_y) = \exp(\frac{i}{2}\alpha^2 xy)\psi_3(n, l). \tag{13}$$

事实上，它们之间的关系相当复杂. 下面几个可能是最简单的.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(py)\psi_2(n, p_y) dp_y = \exp(i\alpha^2 xy)\psi_1(n, p_x), \tag{14}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(py)\psi_2(n, p_y) dp_y = \exp(\frac{i}{2}\alpha^2 xy)\psi_3(0, -n), \tag{15}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(py)\psi_2(1, p_y) dp_y = \exp(\frac{i}{2}\alpha^2 xy)\psi_3(1, 0), \tag{16}$$

其中：

$$f(p_y) = \frac{i^{n+2}}{\alpha\hbar\sqrt{\pi}} \exp(-\frac{iy o p_y}{\hbar}) \tag{17}$$

$$g(p_y) = \frac{1}{2}(\frac{1}{\alpha\hbar\sqrt{\pi}})^{1/2} \exp[-\frac{1}{2}(\frac{p_y}{\alpha\hbar})^2]. \tag{18}$$

$$h(p_y) = -\frac{1}{\alpha\hbar}(\frac{2}{\alpha\hbar\sqrt{\pi}})^{1/h} p_y \exp[-\frac{1}{2}(\frac{p_y}{\alpha\hbar})^2]. \tag{19}$$

这样，根据规范不变原理，可以认为由三种规范[(6)—(8)式]所分别给出的态函数[(9)—(11)式]不可能都是现实的. 事实上，在1992年，Lo 巧妙地证明了，对于 Landau 体系，无论选择何种规范，波函数一定是简并的[12]. 这样，我们就可以一般性地说，对于该体系，不同规范下求得的不同波函数之间的关系一定将相差一些类似于(14)—(16)式的积分(或求和)变换.

从上面的分析，我们可以有如下结论：(1)三种态函数[(9)—(11)式]相应于同一能量$(n+\frac{1}{2})\hbar\omega$的几率密度和几率流密度不可能严格一致. 这是它们之间的关系违反通常规范不变原理的一个直接结果.

(2)三种规范[(6)—(8)式]中，只有(8)式需要一个明确的坐标系. 这预示着态函数[(11)式]将具有明确的可观察意义及正确的经典对应.

(3)因为现实的几率密度必须是规范无关的，而(14)式又说明规范(6)式或(7)式所给出的几率密度不可能一致，又由于这两种规范具有对称性，所以，可以肯定规范(6)式或(7)式是有问题的. 否则我们就必须说 Schrodinger 方程的解不可能都是现实可能的状态.

[1] R. G. Chamber, Phys. Rev. Lett., **5**(1960), 3.

[2] T. T. Wu and C. N. Yang, *Phys. Rev. D*, **12**(1975), 3845.

[3] D. H. Kobe, *Phys. Rev. A*, **45**(1992), 6192.

[4] J. L. Lopes, Gauge Field Theories, Pergamon, (1981).

[5] L. D. Landau and E. M. Lifschitz, Quantum Mechanics 3rd. ed. Pergamon, (1977), 456.

[6] L. E. Ballentine, Quantum Mechanics, Prentice Hall (1990), 208—219.

[7] J. J. Sakurai Modern Quantum Mechanics Benjamin/Cummings, (1985), 133.

[8] D. B. Cohen－Tannoudji and F. Laloe, Quantum Mechanics, John Wiley, (1977), 315—328, 742—764.

[9] 湯川秀樹，豊田利幸，量子力学(I)，岩波書店，(1978), 301—310.

[10] 曾谨言，量子力学，科学出版社，(1990), 324.

[11] L. D. Landau, *Z. phys.* **64**(1930), 629.

[12] C. K. Lo, *Eur. J. Phys.* **13**(1992), 125.