

多孔介质中的分形与输运

郁伯铭 姚凯伦

(华中理工大学物理系, 武汉 430074)

介绍了多孔介质里孔隙空间和孔隙界面的分形结构, 描述了多孔介质中的输运特性及其实验与计算机模拟方法, 最后介绍了自相似多孔介质中输运特性的一种递推计算方法.

关键词 多孔介质, 分形, 输运

Abstract

Fractal structures of pore spaces and pore interfaces in porous media are introduced in this paper. The transport characteristics, experiments, and computer simulation methods are described. The recursion method for computing the transport characteristics in self-similar porous media is also presented.

Key words porous media, fractals, transport

所谓多孔介质, 就是由许多孔隙和实心体组成的介质. 自然界中多孔介质的例子是很多的. 例如, 米缸里的大米自由堆积就形成了一种多孔介质, 其中大米粒就是一个一个的实心体, 大米粒之间形成了一个一个的孔隙. 又例如泡沫塑料、土壤等都属于多孔介质. 石油就贮存于地下的岩石和沙组成的无序多孔介质中. 把分形的理论与方法应用于研究多孔介质的结构分析和输运问题是最近几年的事. 许多研究者往往把这类课题的研究与石油开采结合起来, 因而越发引起了物理学家们的兴趣. 令人感兴趣的问题归结为两大类: 其一是研究多孔介质的分形结构, 其二是研究多孔介质中流体的输运问题. 下面就这两大问题作一简要介绍.

一、多孔介质的分形结构

Katz 和 Thompson^[1] 最早把分形理论和方法用来分析多孔介质的结构. 其后不久, Krohn 和 Thompson^[2] 对多孔介质的结构也作了类似分析. 他们的研究得出结论: 多孔介质的孔隙空间 (pore spaces) 和孔隙界面 (pore interfaces) 都具有分形结构, 并且具有相同的分形维数. 他们采用扫描电镜的实验证明了沙

石孔隙空间具有分形分布, 并利用分形统计学预测了精确的空隙度 (porosity). 他们还指出: 在岩石形成期间, 稳态结晶生长是形成自相似几何的可能原因; 孔隙空间的密度-密度相关函数当孔隙尺寸 l 大于沙粒大小 (典型的为 $100\mu\text{m}$) 的特征长度 l_2 时为常数; 在孔隙尺寸为 $l_1 < l < l_2$ 时, 显示出孔隙空间、岩石界面是自相似族 (manifold) 的, 其分形维数为 D , 这里 l_1 为自相似性的下限. 他们还认为孔隙的体积也是分形分布的, 其分形维数与孔隙、岩石界面的维数相同. 这一结论为实验和从分形参数预测空隙度得以证实. 沙石孔隙空间具有与界面相同的分形性质, 意味着在分形维数和空隙度 ϕ 之间存在一个简单关系式:

$$\phi = A(l_1/l_2)^{3-D}, \quad (1)$$

式中 l_1 和 l_2 分别为自相似性的下限和上限, A 为常数, 可取 1, 并假定 $l_1 = 20\text{\AA}$, 这是孔隙空间晶核的最小尺寸. 利用(1)式, 令 $l_2 = 98\mu\text{m}$, 得到 ϕ 的计算值与实测值偏差在 10% 左右. 表 1 列出了空隙度 ϕ 的扫描电镜测量值与用(1)式计算的结果. 由分形维数 D 来预测空隙度 ϕ , 这证明了空隙表面和空隙体积是分形结构的, 并且两者具有相同的分形维数.

表1 各种沙石的空隙度中的扫描电镜的测量结果

样品	D	$l_2(\mu\text{m})$	空隙度 ϕ 的计算值	空隙度 ϕ 的实验值
tight gas sand (气密沙) 965#	2.57	2.5	4.7	5.3—5.6
tight gas sand (气密沙) 466#	2.68	6	7.6	6.9—7.6
Co conino (可可泥诺沙)	2.78	98	10	11—12.5
Navajo (纳瓦霍沙)	2.81	50	15	16.4
St. Peter's (皮特街沙)	2.87	50	27	24—28

对于尺寸 $l_1 < l < l_2$ 的自相似岩石样品和 $l > l_2$ 的各向同性的岩石样品, 爱因斯坦方程给出样品的电导率 σ 为

$$\sigma = \sigma_w \phi (l_1/l_2)^{2(D-D_f)/D_f} = \sigma_w \phi^n, \quad (2)$$

式中 $n = [D_f + D(2 - D_f)] / (3 - D)D_f$, σ_w 为充填空隙空间的液体的离子电导率, D_f 为谱维数度。

二、多孔介质中的分形与流体输运

有关多孔介质中流体输运的研究往往与石油开采联系起来。地下油层往往延伸到几平方公里。通常的采油方法是把一种流体(通常为水)注入地下, 把石油置换出来。这就涉及到两流体在无序多孔介质中的输运问题。在多孔介质中, 当一种流体被另一种流体置换时, 形成的前缘 (fronts) 是复杂的分形结构。这种结构也称为粘性爪进 (viscous fingering), 它产生于当一种低粘性的流体(如水)置换另一种高粘性流体(如石油)时。实验研究如 Van Damme^[3] 等利用径向 Hele-Shaw 盒研究了水注入粘土泥浆时含水量指数规律。他们画出了在半径为 r 的圆内水的面积同 r 的关系, 得出当粘土与水的比例为 0.06 时, 分维数 $D = 1.68$ 。Malay^[4] 等发现在多孔介质中, 空气注入液态环氧树脂内时, 得到 $D = 1.62$ 。Nittmann^[5] 等也研究了将水注入高粘度的聚合物水溶液内时粘性指数的扩展规律。

多孔介质中分形逾渗与输运的模拟常常借

助于用低粘度的流体(如水)置换高粘度的流体(如油)来进行的。研究多孔介质中两流体的置换有着实际应用背景。如油田开发, 在这里用水置换沙石中的油, 即用低粘度的水注入到地下沙石中, 高粘度的石油从沙石中被抽出来。Oxaal^[6] 作了数值模拟研究和实验研究。他采用的多孔介质模型是在一个正方形点阵上布置有大小均匀的孔隙, 而相邻的孔隙是由两种渗透率(或者为 1 或者为 4×10^{-3})之一的键(bond)所连结。在这个模型上, 高渗透率键的份额为 $f = 0.497$, 接近于正方形点阵上键逾渗临界值 $f_c = 0.50$, 低渗透率键的份额为 $1 - f = 0.503$ 。集团 (cluster) 的定义和形成与键逾渗 (bond percolation) 理论中的处理是一样的。一个集团的特征大小可用下面的回转半径表示:

$$R_g = \left[\frac{1}{S} \sum_{i=1}^S |r_i - r_0|^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (3)$$

式中 r_i 是第 i 个孔在该集团里的位置; S 是该集团的大小; r_0 是质量中心的位置, 由下式表

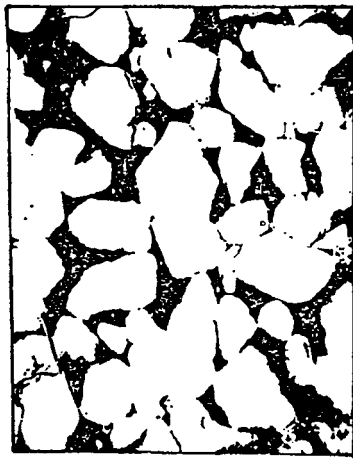
$$\text{示:} \quad r_0 = \frac{1}{S} \sum_{i=1}^S r_i. \quad (4)$$

为了表征一个给定的模型, 我们定义一个局部相关长度 ξ , 作为通过高渗透性键连接的两个孔之间的平均距离:

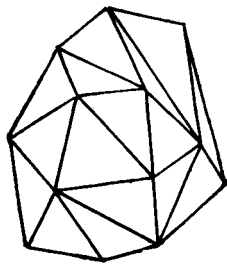
$$\xi^2 = \frac{\sum_j R_g^2(j) S_j^2 \eta_j}{\sum_i S_i^2 \eta_i}, \quad (5)$$

式中 S_j 和 $R_g(j)$ 分别为孔的数目和集团 j 的回转半径; η_j 为每个孔属于该集团的概率。目前研究的注意力集中在由孔的集团形成的结构上, 预料这些孔会支配从中心到边界的流体输运。

实验模型是这样的: 高粘度的流体 (glycerol) 被注入模型网格中心的低粘度流体(如空气)所置换, 把所得结果与同一几何模型上的 DLA (扩散限制的凝聚) 模型作比较。实验和数值模拟所产生的结果都可用有效分维数 $D \approx 1.5$ 来描述。一个二维多孔介质模型^[4,7-9] 的两流体置换实验所得到的结果类似于由 DLA 算法所得到的结果以及拉普拉斯方程的离散解,



(a)



(b)

图1 典型的随机多孔介质和随机网格

(a) 黑色部分为油,空白部分为沙石;(b) 随机网格

它们都有类似的分维数。

一个更为接近实际的模型随机多孔介质里分形逾渗和输运的工作是由 Martin Blunt 和 Peter King^[10] 完成的。一个典型的随机多孔介质的结构如图 1(a) 所示。他们的随机网格是这样生成的: 网格点是随机产生的, 任意相邻的三个网格点由键连接起来, 如图 1(b) 所示。每个格点代表孔隙, 并假设为球形的, 球内充有某种流体如油, 如图 2 所示。球的大小亦

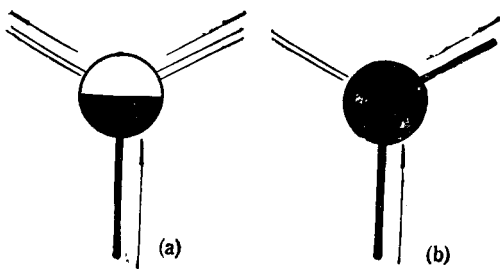


图2 格点和键的模拟

是随机选定的。键是柱形、等长度的。每个键好比是喉咙, 喉咙的粗细也是随机选定的。另外, 假设球内是等压的, 只是沿着喉咙方向上才有压降。

当前面临的挑战是如何在微观流动和宏观达西 (Darcy) 方程之间建立一座“桥”。我们最终是要建立中心处的流量(如石油开采量)与压力分布、多孔介质分形维数、流体组成(如油-水比)和微观流量的关系。

三、自相似多孔介质里的输运

有一类具有自相似分形结构的多孔介质如谢尔宾斯基地毯, 对于这类自相似的多孔介质里的输运, 我们可以利用这类结构的自相似性和输运场(如电场、流场、温度场和扩散场等)的叠加性, 使得在这类复杂几何里的输运场计算成为可能。Yu 和 Yao^[11] 利用了这种自相似多孔介质, 以温度场为例, 提出了一套计算这类多孔介质里温度场的递推公式。这套递推公式包括两部分: 一部分为构造自相似的谢尔宾斯基地毯的递推公式, 另一部分为计算谢尔宾斯基地毯上温度场的递推公式。构造谢尔宾斯基地毯的递推公式称为 TDM (translational-dilation method) 公式的平移膨胀法。其方法是这样的: 令 I_0, J_0 为 0-级地毯, b 为其边长, b 的大小是任意的, 比如说 $b = 12$, 如图 3(a) 所示。坐标 $I_{-1} = 1, 2, \dots, b/3 + 1, J_{-1} = 1, 2, \dots, b/3 + 1, I_{-1}, J_{-1}$ 代表 0-级地毯左下角的坐标, 见图 3(a) 中标注 1 的那一小方块。如果从 0-级地毯开始, 经过 $n + 1$ 次递推, 就可以获得 n -级地毯。

由于本问题几何形状与边界条件的复杂性, 无法用经典的解析法来求解。但是由于该几何形状是自相似的, 并且是用 TDM 法来构造的, 所以热传导问题同样可以用 TDM 法来求解。这可以把 1-级地毯上的热传导问题看作为两个 0-级地毯上热传导的叠加, 即一个较小的 0-级地毯 [如图 4(b) 所示] 和一个较大的 0-级地毯 [如图 4(c) 所示, 经过一次膨胀后], 它们具有相同的外边界条件 ($q_{s_0} = 0$) 和

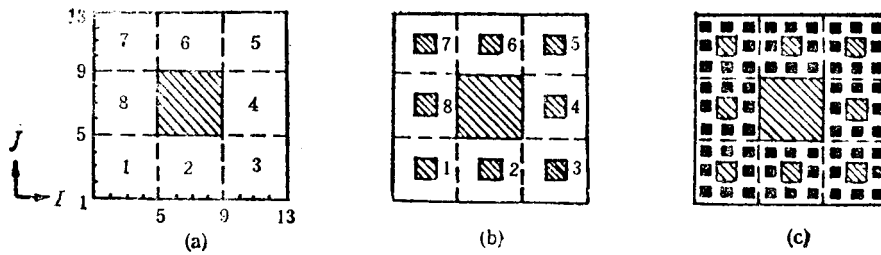


图3 谢尔宾斯基地毯及其区域划分

(a) 0-级地毯, 边长 $b = 12$; (b) 1-级地毯(边长缩小了三倍) (c) 2-级地毯(边长缩小了九倍)

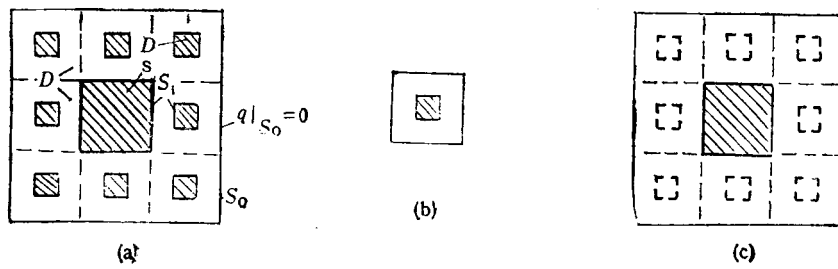


图4 1-级谢尔宾斯基地毯的边界条件和分解

(a) 边界条件描述; (b) 较小的0-级地毯; (c) 经一次膨胀后的较大的0-级地毯

相同的内边界条件 ($T|_{S_1} = 100^\circ\text{C}$). 但是在图4(c)中, 绕着中央较大阴影区的原八个较小阴影区的温度现设为 0°C . 然后分别在这两个0-级地毯上确定温度梯度 ∇T 或热流 q 的分布, 并最终求出温度分布. 有兴趣的读者可参阅他们的文献^[11].

[1] A. J., Katz, and A. H. Thompson, *Phys. Rev. Lett.*, **54**(1985), 1325.
 [2] C. E. Krohn, and A. H. Thompson, *Phys. Rev. B*, **33**(1986), 6366.

[3] Van H. Damme et al., *Nature*, **324**(1986), 731.
 [4] K. J. Malay, J. Feder, and T. Jossang, *Phys. Rev. Lett.*, **55**(1985), 2688.
 [5] J. Nittman, G. Daccord, and H. E. Stanley, *Nature*, **314** (1985), 141.
 [6] U. Oxaal *Phys. Rev. A*, **44**(1991), 5038.
 [7] L. Paterson, *Phys. Rev. Lett.*, **52**(1984), 1621.
 [8] J. D. Sherwood, and J. Nittman, *J. Phys. (Paris)*, **47**(1986), 15.
 [9] J. D. Sherwood, *J. Phys. A*, **19**(1986), L195.
 [10] Martin Blunt and Peter king, *Phys. Rev. A*, **42** (1990), 4780.
 [11] B. Yu and K. L. Yao, *Phys. Rev. A*, **44**(1991), 3664.

(上接封三)

重大疾病的物理诊断分析
 生命物质中的发光研究
 与化学、生物体系的分子结构和动态特性有关的实验和理论
 放射化学、放射药物和放射医学研究的物理问题研究
 极端条件下的物理:
 高温等离子体条件下
 高压金属氢
 强激光条件下
 强磁场条件下

强辐射条件下
 极低温条件下

海洋声学

同步辐射应用

新加速原理研究和小型加速器应用

2. 发展 21 世纪中国物理学应注意的问题

密切结合在国民经济中起骨干作用的领域
 重视工艺科学及制备过程
 重视人的培养, 形成一种深入研究的环境
 重视建立科学家之间联系的手段

(中国科学院基础研究所物理处 黄健康)