小 波 理 论 与 分 形

汪 富 泉　　　　李 后 强
(四川师范学院数学系,南充 637002)　(四川大学物理系,成都 610064)

扼要介绍了正在兴起的小波理论产生的背景和基本知识，论述了小波理论与分形理论之间的密切联系.

近年来，由于国际国内一些热衷于分形分维刊物的持续推动，加之人们对非线性科学的广泛兴趣,“分形”这一概念已在我国不胫而走.科学家们运用分形理论，在自然、社会、科学实验和工程技术等领域取得了很多新成果[1,2].它对当今的非线性科学尤其是现代物理学产生了重要影响,而且还必将进一步产生深远影响.

目前，又一种崭新的数学理论——小波(wavelet)理论,正为纯数学家、应用数学家、理论物理学家和工程学家们所密切关注[3-6]. 可以说，分形的出现，是人类认识论上的一次突破，为人们认识系统局部与整体的关系提供了一种辩证的思维方式，为描述自然界和社会的复杂现象提供了一种简洁有力的几何语言[7].小波分析则被看成是近年来在工具和方法上的重大突破[8]. 它已经成功地应用于分形系统和混沌动力系统的研究[2]，也已经和将要广泛应用于信号处理[9]、图像处理、量子场论、地震勘探、语言识别与合成、音乐、雷达、CT成像、彩色复印、流体湍流、天体识别、机器视觉、机械故障诊断与监控、数字电视等科技领域[8]. 在国际上，已经形成“小波热潮”[6]. 1990年6月，由美国NSF/CBMS主办的小波专题研讨会盛况空前. 这次会议在美国波士顿近郊的劳威尔(Lowell)大学召开. 由美国著名数学家、小波研究带头人之一的道贝切斯(I. Daubechies)作十次演讲,全面介绍小波方向的研究成果.会议原计划40人左右,但参加者之众,达175人;面之广,涉及数学家、物理学家和工程学家,甚至还有许多公司的代表. 会期正值初夏，真可谓一次“小波热潮”. 在我国，小波热潮也在逐渐形成. 在中国地理物理学会第八届年会上(昆明，1992年11月10—14日),小波、分形及其应用,是与会者讨论最热烈的话题之一,会议因此而新设了小波专题. 小波理论及其在物理学中的应用，大有山雨欲来风满楼之势. 本文拟对小波理论作一通俗扼要的介绍，并论述它与分形论之间的广泛联系.

一、小波概览[2-6,8]

数学家们认为，小波是现代调和分析发展史上的一座里程碑[8]. 什么是小波呢? 直观地说，小波就是人们可以观察到的最短最简单的振动. 从数学上讲,小波是一个满足条件

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(x)dx = 0$$

的函数(母小波)通过平移和伸缩得到的函数族

$$h_{a,b}(x) = |a|^{-1/2}h\left(\frac{x-b}{a}\right)$$

$$(a,b\in R, a\neq 0). \qquad (1)$$

人们对小波如此强烈的兴趣，主要源于信号分析. 信号分析的一个重要课题是刻画信号的频谱特性. 假设信号 $f(t)$ 的能量有限，即 $f(t)\in L^2(\mathrm{R})$(表示 $f(t)$ 是实数域 R 上的平方可积函数),则其富氏变换

$$F(\omega) = \hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt \qquad (2)$$

易见，$F(\omega)$ 仅仅确定了信号 $f(t)$ 在整个时间域 R 上的频谱特性. 但是,在信号分析中，常常需要了解信号在某一瞬时的频率特性.例如,

在地震勘探中，为了分辨薄层矿床，为了分辨复杂地层中的信号异常，就需要在时域和频域上对信号进行局部分析。由于(2)式中的基波 e^{it} 对变量 t 不是局部化的，所以运用富氏变换达不到局部分析的目的。因此，需要寻求一种能对信号进行局部化分析的新方法。

所谓信号在时域和频域上都是局部化的，直观上，即 f 与 $\hat{f}$ 都有紧支集。但由解析函数论知，这样的非零函数是不存在的。因此，只能从概率分布的角度刻画信号的时频局部性。设 $g\in L^2(\mathrm{R})$，

$$t_g=\int_{-\infty}^{\infty}t|g(t)|^2dt\Big/\int_{-\infty}^{\infty}|g(t)|^2dt \quad (3)$$

称为 $g(t)$ 的中心。类似地可定义 $\hat{g}(\omega)$ 的中心 ω_g。

$$\Delta_g=\left[\int_{-\infty}^{\infty}(t-t_g)^2|g(t)|^2dt\Big/\int_{-\infty}^{\infty}|g(t)|^2dt\right]^{1/2}, \quad (4)$$

即 $g(t)$ 对 t_g 的标准差。$2\Delta_g$ 称为 $g(t)$ 的宽度。类似地可定义 $\Delta_{\hat{g}}$。当 Δ_g 和 $\Delta_{\hat{g}}$ 都有限时，称 g 在时域和频域上是同时局部化的。这时 g 称为窗口函数。将一个信号在时域和频域局部化，即把信号函数 f 按一族窗口函数展开。根据展开的系数可以知道信号在某一局部时间内，位于某局部频段的信号成分有多少。

早在 1946 年，加波 (D. Gabor) 就引入高斯窗函数 $g(t)=\pi^{-1/4}e^{-t^2/2}$ 对信号 $f(t)$ 作加窗(或短时)富氏变换 $(F_gf)(b,a)$[2,3,8]，它刻画了信号 $f(t)$ 的局部时频信息，而且由 $(F_gf)(b,a)$ 可以反演出 $f(t)$，即它包含了 $f(t)$ 的全部信息量。但是，用加窗富氏变换处理频域宽、频率变化激烈的信号时，根据信号的测不准原理，为获得正确的高频信息，就得把时间窗变得很窄，样本量迅速增大。另一方面，为了获得低频信息，又需要将时窗变宽，计算相当复杂而且很不经济。因此，加窗富氏变换不能有效地处理含有奇异性的信号。然而，在地层分析、边缘检测、语声合成等领域，这类信号是经常遇到的。小波理论正是为处理这些信号而产生和发展起来的。

1984 年，量子理论学家格罗斯曼 (A. Grossmann) 和油气工程师莫勒特 (J. Morlet) 在处理地震数据时引进小波概念[2,6,8]，称窗口函数 $h(t)$ 为小波母函数(如果 $h(t)$ 和 $\hat{h}(\omega)$ 都是窗口函数)。即 $\Delta_h<+\infty$ 且 $\Delta_{\hat{h}}<+\infty$，$\hat{h}(\omega)$ 的中心不等于零，而且

$$\hat{h}(0)=\int_{-\infty}^{\infty}h(t)dt=0. \quad (5)$$

此外，要求小波母函数满足如下标准化条件：

$$\int_{-\infty}^{\infty}|h(t)|^2dt=1,\ \int_{-\infty}^{\infty}t|h(t)|dt=0. \quad (6)$$

前者说明 $h(t)$ 有单位能量，后者说明 $h(t)$ 的中心为零。信号 $f(t)$ 的小波变换定义为

$$(W_hf)(b,a)=|a|^{-1/2}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\overline{h\left(\frac{t-b}{a}\right)}dt, \quad (7)$$

式中 $\bar{h}$ 表示 h 的复共轭。称 h 满足相容性条件，即

$$C_h=\int_{-\infty}^{\infty}|\omega|^{-1}|\hat{h}(\omega)|d\omega<+\infty. \quad (8)$$

这一条件蕴含了条件(5)式，当 h 满足一定衰减性条件时，(8)式等价于(5)式[6]。满足条件(8)式的小波称为允许小波。对允许小波，有反演公式

$$f(t)=C_h^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{da}{a^2}\int_{-\infty}^{\infty}h_{a,b}(t)(W_hf)(b,a)db. \quad (9)$$

(5)式说明，h 具有一定振荡性，它表征着 h 的某种频率特性。$h_{a,b}(t)$ 的振荡性随 $1/|a|$ 的增大而增大。因此，a 是频率参数而 b 是时间参数。在实际应用中，常把 h 取为有紧支集的或衰减较快的函数。小波变换不仅可以实现信号的时频局部化，而且与加窗富氏变换相比，具有局部化格式随频率高低变化的优点。在频率高的区域上，时间局部化程度也高。形象地说，小波变换有"变焦"(zooming) 性质。对于只在瞬间存在的高频信号，时间窗口自动变窄 (zooming in)；而在高频段，时间窗口自动变宽 (zooming out)。由此，小波变换被誉为"数学显微镜"。正是这种变焦特性，使小波变换成为分形体局域奇异性分析以及语声合成、图像处

理、边缘探测，数据压缩等领域中的有力工具.

在实际应用中，常用的是小波变换(7)式的离散形式. 因而，真正的小波热潮始于1986年. 这年，梅依尔(Y. Meyer)构造出了具有一定衰减性质的光滑小波[8]，其二进制伸缩与平移系

$$\{h_{j,k}(t)=2^{-j/2}h(2^{-j}t-k)\,|\,j,k\in Z\}$$

构成 $L^2(\mathrm{R})$ 的标准正交基. 上式中 Z 表整数集. 用 $h_{j,k}(t)$ 代替(7)式中的 $|a|^{-1/2}h\left(\frac{t-b}{a}\right)$，就可得到很实用的离散小波变换. 继梅依尔之后，在小波构造的研究中取得了很多成果. 勒马立(P. Lemarie)和巴托(G. Battle)给出了具有指数衰减速率的小波[8]. 迈莱特(S. Mallat)引入多分辨分析(multiresolution analysis)统一小波构造，并给出以他名字命名的迈莱特算法[2,6,8]. 1988年，道贝切斯构造了具有有限支集的正交小波[2,4,8]. 1990年，崔锦泰(C. K. Chui)和王建忠构造了基于样条函数的所谓单正交小波函数[3,8]，并讨论了具有最好局部化性质的函数. 随着理论研究的不断深入，小波理论的应用范围也日趋广泛，限于篇幅，不拟深入介绍，有兴趣的读者可参阅文末的参考文献.

二、多分辨分析与分形[2,6—8]

多分辨分析把小波构造纳入一个统一的框架之中. 一个多分辨分析是由一个特殊函数 $\phi\in L^2$ 按下述方式生成的一个空间的贯(nest) $N(\phi)$:

(a) $\cdots\subset V_{-1}\subset V_0\subset V_1\subset\cdots$,

$$\bigcap_{n\in Z}V_n=\{0\},\ \overline{\bigcup_{n\in Z}V_n}=L_2,$$

(b) $\forall m\in Z$, $V_m=\mathrm{Clos}_{L_2}\{\phi_{m,n}\}_{n\in Z}$, 且 $\{\phi_{m,n}\}_{n\in Z}$ 是 V_m 中的无条件基[6,8]，其中 $\phi_{m,n}(x)=2^{m/2}\phi(2^m x-n)$.

条件(a)中的"——"表示对集合取闭包，(b)中的 Clos_{L_2} 表示在 L_2 中的闭包.

多分辨分析也表明了小波变换的显微能力. 可以将信号或图像分解成交织在一起的多种尺度成分，并对大小不同的尺度成分，采用相应粗细的时域或空域取样步长，从而能够不断地聚焦到任意微小的细节. 将这种思想应用到人们对分形的观察和认识上，体现了人们逐步识别形体的过程. 从远到近观察形体(如海岸线)，首先注意到形体最显著的特征——轮廓；再慢慢注意其结构——线条；最后逐步观察其纹理或细节. 这种识别过程体现了一种从低分辨到高分辨的原理，同时也体现了对目标进行分割的思想. 对分形体，通过从大到小不同尺度的变换，在越来越小的尺度上观察到越来越丰富的细节. 分形体的特征正是各种意义下的尺度对称性. 所以，对复杂形态的分形分析，实质上就是一种多分辨分析. 这表明，小波分析与分形几何具有深刻的内在联系，它们在尺度变换上具有一致性. 分形是一种几何语言，小波是一种分析工具，两者相得益彰.

三、小波、分形与重正化群[2,4—7]

众所周知，当我们处理用降维方法生成的分形集合时，重正化群理论具有重要作用. 在分形渗流的分维计算中，重正化群是一种有力的工具. 与分形和多分辨分析一样，重正化群的实质也是标度变换. 威尔孙建立的量子场论中的重正化群，其原理与小波分析中的平移与伸缩技巧不谋而合. 设在取定的物理模型下，a 是给定点阵的常数尺度，不同格点上的某个物理量为 P，用尺度 $2a, 3a, \cdots$ 来考察相应物理模型，相应物理量记作 $P_i(i=2,3,\cdots)$. 威尔孙假定 P 与 P_i 之间有非线性关系 $P_{na}=T[P_{(n-1)a}]$，T 为重正化变换，且 $P_{n+1}=T^n(P)$ $(n=1,2,\cdots)$. 应用不动点定理，可从 $P^*=T(P^*)$ 求出临界点与临界指数. 重正化群理论，已解决了连续相变中的难题. 若按标度 $1/b$ 的某种规律改变长度标度，则可求出渗流集团在临界值处的分形维数. 从(1)式知，连续小波函数族 $h_{a,b}(t)$ 是通过小波母函数 $h(t)$ 的平移和伸缩构筑的，即 $h_{a,b}(t)$ 是 $h(t)$ 在仿射变换

群 $A(a,b)(at+b)$ 的作用下得到的：$h_{a,b}(t)=[A(a,b)h](t)$。这在量子场论中表示一种新的凝聚态，即仿射凝聚态。由于小波的"变焦"性质，它更适合于处理半经典场问题。

四、小波函数的正则性、L-H 指数与分形[2,7,9—11]

给定一个多分辨分析 $N(\phi)$，就可以构造出一个小波正交基。此时，要求 ϕ 满足某个双标度差分方程

$$\phi(x)=\sum_{n\in Z}c_n\phi(2x-n). \qquad (10)$$

若取如下形式的双标度差分方程

$$f(x)=\sum_{n=-N_1}^{N_2}c_nf(kx-n), \qquad (11)$$

则可构造出紧支集小波的正交基[2,6]。当 $k=3$，$c_0=1$，$c_1=c_{-1}=1/3, c_2=c_{-2}=2/3$，其余 $c_n=0$ 时，则构造出一个处处连续但不可微的分形函数，即德·拉姆(de Rham)函数[2]。该函数是 Hölder 连续的，其李普希兹(Lipschitz)-霍德尔(Hölder)指数(简称 L-H 指数) $\alpha=1-\ln 2/\ln 3$，但这一函数无处可微[2]。可以证明，存在具有非整数豪斯道夫维数和零勒贝格测度的分形集，在这个分形集上，在局部奇异性指数(即 L-H 指数) α 可以任意接近 1 的意义下，f 是"几乎"不可微的[2]。若令 $k=3, c_0=1, c_1=c_{-1}=\frac{1}{2}-a$，$c_2=c_{-2}=\frac{1}{2}+a$，其余 $c_n=0$，所得函数 f^a 是德·拉姆函数的推广[2]。在 $a<0.1592$ 时，f^a 是几乎处处李普希兹的分形函数[2]。$k=2$ 时，(11)式可归结到(10)式，应用二进内插，也可构造出分形体和具有分形性质的函数[2]。

所谓一个函数 g 具有 m 阶正则性，是指 g 具有直到 m 阶的连续导函数，且 g 的 1 至 m 阶导函数在无穷远处都是速降的。因此，上述例子说明，小波函数的正则性与分形有关。收敛于分形的小波函数不具有正则性。众所周知，L-H指数 α 是刻画分形体局部奇异性的一个指数。在分形论中，它有两种常用的求法[7,11]。一种是求出广义维数 $D(q)$、质量指数 $\tau(q)$，然后由勒让德变换得到；二是直接求 α。

小波变换也可以刻画分形函数或分形体的局部奇异性，而且给出了求奇异性指数 α 的一个新方法。在实际应用中，对被检测函数 $f(x)$ 施行二进小波变换的尺度 2^j 总是有限个。在适当选用单位之后，不失一般性，可以假设施行小波变换的尺度是 2^1 到 $2^{j_0}(j_0>1)$。记 $a_j=\phi_{2^j}(x_0)$，这里 $\phi_{2^j}(x_0)$ 表示离散的二进小波变换，x_0 表示被检测的点。作目标函数 $E(\alpha,K)=\sum_{j=1}^{j_0}(a_j-2^{\alpha j}K)^2$，其中 α 是 L-H 指数，K 是待定常数。求 α 及 K 使 $E(\alpha,K)$ 达到极小，则可得到 α 值。这一算法不仅简单而且得到的 α 值误差很小，非常接近实际奇异性。

五、滤波迭代与分形[2—6,8,10—11]

由双标度差分方程(10)式可以确定一对数字滤波器，即(10)式的系数 $\{c_n\}_{n\in Z}$ 及相应的 $\{d_n\}_{n\in Z}$，d_n 满足条件 $d_n=(-1)^n\bar{c}_{1-n}$。前者是低通滤波器，后者是带通滤波器。工程上称他们为 QMF(quadrature mirror filter)。利用 QMF 可以构造出锥算法，对信号进行分解与合成[6]。在这一滤波迭代过程中，对于某些脉冲响应，将产生分形函数。例如，对一维数字信号 $f^N=(f_n^N)_{n\in Z}$，令 $f_k^{N-1}=\sum_n c_{n-2k}f_n^N$，$g_k^{N-1}=\sum_n d_{n-2k}f_n^N$。若记 $f^{N-1}=(f_k^{N-1})_{k\in Z}$，$g^{N-1}=(g_k^{N-1})_{k\in Z}$，则分解过程可以写成 $f^{N-1}=Pf^N$，$g^{N-1}=Qf^N$。其中 P,Q 是相应的离散变换算子。这一过程可以迭代任意次，得 $f^{j-1}=Pf^j$，$g^{j-1}=Qf^j$。经过 $N-l$ 步后，f^N 被分解成 $g^{N-1}, g^{N-2},\cdots,g^l$ 及一个 $N-l$ 次模糊像 f^l。反之，从 $g^{N-1},g^{N-2},\cdots,g^l,f^l$ 又可合成原来的信号 f^N。设 P^*,Q^* 为 P,Q 的共轭算子，则 $f^{j+1}=P^*f^j+Q^*g^j$，从而 $f^N=\sum_{j=l}^{N-1}(P^*)^{N-1-j}\cdot Q^*g^j+(P^*)^{N-l}f^l$。设信号序列 $e=\{e_n\}$ 只含有一个非零项，即 $e_n=\delta_{n0}$，则在参数 $\nu=-1.5$ 时，$(P^*)^Ne$ 将迅速收敛于一个分形函数[2]。实际上 $(P^*)^6e$，分形的极限集就形成了。

六、分形生长的小波变换[2,7,10-13]

分形生长是物理、化学、生物等领域较常见的一种现象．这类分形的一个典型性质是在小长度标度下其结构具有自相似性．这种局部自相似性意味着分形测度 μ 在点 x_0 邻近的标度变化满足 $\mu[B(x_0,\lambda\varepsilon)]\propto\lambda^{\alpha(x_0)}\mu(B(x_0,\varepsilon))$[12]．这里，$B(x_0,\varepsilon)$ 是中心在 x_0，半径为 ε 的球，$\alpha(x_0)$ 即 x_0 的 L-H 指数．广义维数谱 $D(q)$ 和奇异谱 $f(\alpha)$ 只能提供多重分形的统计特性．而小波变换可用来分析其局域奇异性和动力学信息．设 h 是 R^d 上的解析小波，它在原点邻近是局部化的，其它矩为零且(8)式成立，则定义测度 μ 关于小波 h 的小波变换为

$$W_h(a,r,b)=\int\bar{h}(a^{-1}r^{-1}(x-b))d\mu(x).$$

对非整数 L-H 指数 $\alpha(x_0)$ 和在∞速降的小波，μ 的局部标度特征由小波变换给出，即

$$\begin{aligned}W_h(\lambda a,x_0+\lambda b)&=\int\bar{h}((\lambda a)^{-1}r^{-1}(x-\lambda b)d\mu(x)\\&=\int\bar{h}(a^{-1}r^{-1}(y-b))d\mu(\lambda y).\end{aligned}$$

当 $\lambda\to0$ 时，有标度特征．

$$W_h(\lambda a,x_0+\lambda b)\propto\lambda^{\alpha(x_0)}W_h(a,x_0+b).$$

它表征了 μ 的局部分形性质，μ 的局部奇异性也可得到清晰的展示．当放大倍数 a^{-1} 增加时，μ 的每一局部奇异性在小波变换下产生一个指向 x_0 的类锥结构[12,13]．$a\to0$ 时，其奇异性通过 $W_h(a,b)$ 表示，$\alpha(x_0)$ 就是 x_0 的奇异性强度．在分形理论中，常用的小波函数有高斯型小波，分段常数小波和莫勒特小波[12]．将小波变换应用于康托集的分析，揭示出了单标度和双标度康托集的差异[12]；运用小波变换计算逻辑斯蒂方程 $x_{n+1}=1-\lambda x_n^2$ 的混沌轨道的奇异性指数，结果与重正化群方法测出的值显著一致，而小波变换的图形显示对倍周期 2^∞ 环复杂性的理解有启发作用[2]；临界圆映射的黄金中值轨道的小波变换，展示出轨道在所有标度下的精细结构[2]；小波变换不仅揭示了多标度雪花分形的构造规则，而且提供了定量测定局部标度指数 $\alpha(x)$ 的一个有效方法[12]．对 DLA，小波变换揭示了凝聚的整体自相似性．通过小波显微镜，观察到了 DLA 内部的丰富细节，揭示了 DLA 与粘性指进的深刻联系[12,13]．

综上所述，从小波变换可以得到分形体奇异性的空间局域信息．分形测度自相似性的总体复杂程度，也可通过小波变换的可视性表示出来．应用快速小波算法(FWT)，小波变换可以方便地在计算机上实现．因此，小波变换还提供了一个用实验或模拟来分析分形体的有效工具．小波变换已成功地应用于分形生长的研究，它还有希望应用到与分形有关的非常广泛的物理领域，例如临界现象、渗流、发达湍流等的研究．

可以断言，小波理论不久将被有效地应用于众多的物理和工程技术领域．它对科学技术的广泛、深刻的影响不久即将显示出来．

[1] 李后强、程光钺，分形与分维，四川教育出版社，(1990)，42—217.

[2] 李后强、汪富泉，分形理论及其在分子科学中的应用，科学出版社，(1993).

[3] Charles, K. Chui Approximation Theory and Functional Analysis, Academic Press, (1990), 47—71.

[4] I. Daubechies, Communications on Pure and Applied Mathematics, Vol. XLI, (1988), 909—996.

[5] A. Arneodo, G. Grasseau and M. Holschneider, *Phys. Rev. Lett.*, **61**-20(1988), 2281.

[6] 王建忠，数学进展，**21**—3(1992)，289.

[7] 汪富泉、李后强，分形几何与动力系统，黑龙江教育出版社，(1993).

[8] 刘贵忠、邸双亮，小波分析及其应用，西安电子科技大学出版社，(1992).

[9] 汪富泉、罗朝盛，中国地球物理学会年刊，地震出版社，(1992)，2.

[10] 李后强、汪富泉，大自然探索 **10**-2(1991)，55.

[11] 汪富泉、李后强，四川师范学院学报(自)，**14**-1(1993)，16.

[12] F. Argoul, and A. Arneodo, *Phys. Rev. A.* **41** (1990), 5537.

[13] E. Freysz et al., *Phys. Lett.*, **64**-7 (1990), 475.