

多孔介质中的声传播及其研究进展¹⁾

钱 祖 文

(中国科学院声学研究所声场声信息国家重点实验室, 北京 100080)

摘要 评述了多孔介质中的声传播, 特别是 Biot 理论近年来的进展和它在实际应用方面的困难。此外还介绍了分形学在这方面的应用。

关键词 多孔介质, 颗粒介质, 声传播, 分形

Abstract Recent progress in the theory of sound propagation in porous media in particular Biot's theory is described. The difficulties of its applications in practice are analysed. Furthermore, the application of fractal theory to this area is presented.

Key words porous media, granular media, sound propagation, fractals

通常所说的多孔介质是一种有孔隙的固体, 其中充满流体, 固体部分称为骨架, 而波动学所讨论的多孔介质, 其中的孔隙是彼此连通的, 也就是说, 它不包括闭合腔。

多孔介质处处皆是, 地壳、岩石以及大部分人造材料如陶瓷材料等都具有多孔介质的特征。为了探索其性质, 地震波、声波是有效的手段。根据可靠的波传播理论以及声波在这类介质中的测量数据, 应用最优化方法, 可以反演出有关介质参数。研究表明^[1], 可靠的理论是至关重要的。

与此有关的另一类介质称为颗粒介质, 即在一种连续介质中存在一种或几种物理特性不同的颗粒体。不少颗粒介质也被看成是多孔介质(例如海洋沉积物即为一例)。但值得提起的是, 海洋江河的表层沉积物, 其中的固体颗粒与多孔材料的骨架定义还不能完全等同, 因为它们彼此并不是粘牢在一起, 从形式上来看, 在波传播的稀疏过程中, 这一差别无疑会显现出来。

1 多孔介质中的声传播——Biot 理论概述

据我们所知, 多孔介质声学研究至少可以

追溯到本世纪40年代初^[2-4], 而 Biot 的“充满流体的多孔弹性固体中的波传播理论”^[5,6]则是这一领域较为系统的代表作。在这一理论中, 借用唯象的方法, 将多孔介质的动能和位能写成固体部分、流体部分以及它们之间的相互作用三部分之和, 从而给出介质中的拉格朗日函数。进一步考虑到流体是非理想的, 又引入了耗散函数。根据分析力学的方法, 选取固体及流体的位移和速度矢量的分量作为广义坐标, 最终得到了统计各向同性多孔介质中的波传播方程组:

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2(He - C\zeta) &= \frac{\partial^2}{\partial t^2}(\rho e - \rho_f \zeta), \\ \nabla^2(-Ce + M\zeta) &= \frac{\partial^2}{\partial t^2}(-\rho_f e + m\zeta) \\ &+ \frac{\eta F}{k} \frac{\partial \zeta}{\partial t}, \end{aligned} \right\} (1)$$

式中 e 为骨架的三个法向应变之和,

$$\zeta = \phi \nabla \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{U}), \quad (2)$$

\mathbf{u} 和 \mathbf{U} 分别为骨架与流体的位移矢量, ϕ 为介质的孔隙率, ρ 和 ρ_f 分别为该介质的密度

1) 国家自然科学基金资助项目。

1994年10月28日收到初稿, 1995年1月9日收到修改稿。

和孔隙中填充流体的密度, m 是描写孔隙微结构的惯性结构因子, H , C 和 M 是三个弹性常数, η 为流体的切变粘滞系数, k 为静态渗透率, F 为非 Poiseuille 流动时的流阻修正函数。

我们很容易得到(1)式的简谐平面波解, 其结果表明, 多孔介质中的声波包含一个体横波和两个体纵波, 其中第一个体纵波的传播速度大于孔中流体的波速, 故称它为快波。值得注意的是第二个体纵波, 它的波速比在流体中的要小, 故被称为慢波。在多孔介质中预见到有慢波的存在, 应该说是 Biot 理论的重要发现, 但这一理论真正得到普遍公认却是在 14 年之后。1980 年, Plona^[7] 在用玻璃珠烧成几种孔隙率不同的多孔材料中, 让声波透过材料样品而产生折射, 在样品之外的流体中接收折射波。转动样品, 使声波的入射角依次超过快波和横波的临界角, 但小于慢波的临界角, 这样就能够将后者从波形图上分离出来。将样品的厚度除以波传播时间, 可以得到几种波的传播速度。表 1 列出了四种样品中三个波的传播速度与孔隙率的关系。Plona 实验至少是定性地支持了 Biot 理论。

表 1 玻璃珠烧成材料中波速与孔隙率的关系

样 品	孔隙率 (%)	快纵波速 (km/s)	横波速 (km/s)	慢波速 (km/s)
1	28.3	4.05	2.37	1.04
2	25.8	4.18	2.50	1.00
3	18.5	4.84	2.93	0.82
4	7.5	5.50	3.31	...

2 Biot 理论中重要参数的研讨

正如我们所知, 多孔介质中的波传播理论对于地震波在地球中的传播、物理探矿等领域至关重要, 以 Biot 为代表的系统理论在学科和应用两方面都作出了重大贡献。但由 (1) 式来看, 要待定的参数较多, 使应用者颇感不便。首先, 其理论模型是统计各向同性介质, 但出现了三个待定的弹性常数, 而通常的各向同

性的弹性固体只能有两个独立的弹性常数。为了寻求三个弹性常数 H, C 和 M , Biot 等人^[8,9] 在两种限定的情况 (即在包装和不包装两种情况) 下计算了它们的数值。三个常数的表达式中包含有孔隙率 ϕ 、固体的材料压缩模量 K_s 和材料切变模量 N 、流体的材料压缩率 K_f 以及骨架的压缩模量 K_0 。所谓材料模量 (或压缩率) 是指这材料单独存在时的模量 (普适量), 但 K_0 却不是普适量, 它依赖于骨架的结构。不少工作企图给出它的关系式 (见文献 [10]), 其中 Berryman 的自治法^[11] 即为一例。这个方法依赖于结构因子 m 的选取, 这样得到的 K_0 , 结合 Biot 理论, 得到三种波速与孔隙率的关系。图 1 给出了理论结果与 Plona 实验数据的比较, 图中的符号是实验点, 曲线是理论结果。由图 1 可见, 对于慢波来说, 理论和实验之间尚有一定的系统性偏离。

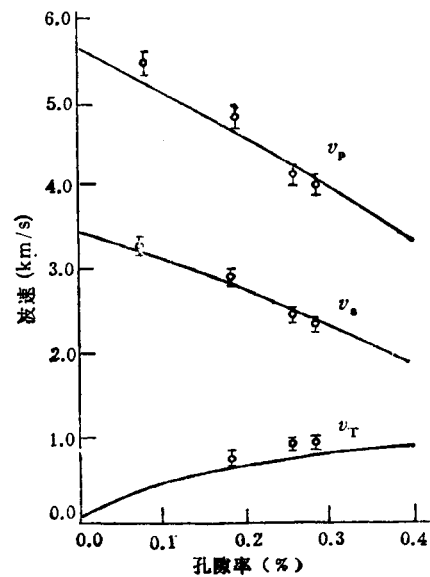


图 1 三种波速与孔隙率的关系 (v_p 为快波; v_T 为慢波; v_s 为横波)

从(1)式可见, 这里有一个惯性结构因子 m , 它取决于多孔介质中连通孔的微结构, 显然, 很难从理论上给出一个通用的表达式, 很多工作总是半经验、半理论地来确定 (例如文献 [11])。

(1) 式中的第三个问题是确定流阻 (或渗

透率)的修正函数 F 。当流动属于 Poiseuille 流时,它等于 1;当雷诺数较大,流动成为非 Poiseuille 时,则要引入修正函数 F 。显然,它与孔的微结构以及孔隙空间的界面等情况有很紧密的关系。多孔介质千变万化,要想找到一个普适性的 F 函数是很困难的。作为启蒙, Biot 等^[9]研究了两种微结构模型,一种是在平行的无限长狭缝中充满流体的孔隙,另一种孔隙是在平行的柱形管中充满流体,并计算了两种模型粘滞摩擦和相应的修正函数 F ,将 F 写成

$$F = F_r + jF_i$$

图 2 和图 3 分别表示 F 的实部 F_r 以及虚部 F_i 与 Ka 的关系, K 为粘滞波的波数, a 是孔隙的尺寸(对于狭缝,它等于缝的半宽度;对于圆柱管,它等于圆的半径)。两张图中的曲线 1 和曲线 2 分别属于平行狭缝和平行圆管的情况。Biot 证明,半宽度为 a_1 的平行狭缝,其修正函数 F 等效于半径为 $\frac{4}{3}a_1$ 的平行圆柱孔,即

$$F_s(Ka_1) \simeq F_c\left(\frac{4}{3}Ka_1\right), \quad (3)$$

其中 $F_s(Ka_1)$ 和 $F_c\left(\frac{4}{3}Ka_1\right)$ 分别为狭缝和柱管的 F 函数。这一事例似乎为人们寻找 F 的普适形式给出了一个启示。

在实际情况下,很难找到一种由平行狭缝或平行柱管所构成的多孔材料。为此, Biot 在 F 函数的宗量中引入了另一个结构因子 δ ,即将所有的宗量 Ka 写成 δKa , δ 的选取也是半经验式的。

为了探索孔隙结构的复杂性,最近我们研究下述模型^[12],即假定多孔介质的孔隙是由半径为 a 的柱形管组成,而 a 的 ϕ 值为

$$\phi \text{ 值} = -\log_2(2a), \quad (4)$$

它服从正态分布(即管径不是同一尺寸),各个管轴在空间的取向服从均匀分布,根据这一模型,算出了多孔介质的修正函数 F ,其实部和虚部的数值计算结果表示为图 2 和图 3 的曲线 3。从图中的几条曲线可知,计及了孔隙尺寸分

布和空间取向分布之后,修正函数 F 比起同尺寸孔隙平行取向的 F 值大大地减小了,即对应的 Biot 结构因子 δ 远小于 $\sqrt{8}$ ^[9]。

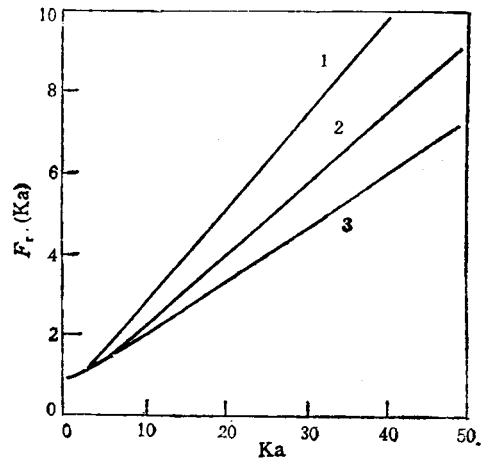


图 2 修正函数的实部 F_r 与 Ka 的关系
1——狭缝; 2——圆管; 3——取向和孔径平均

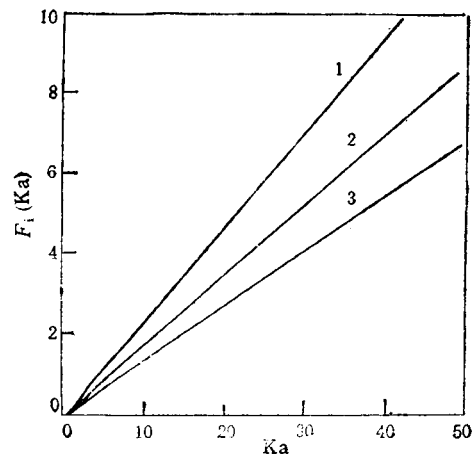


图 3 修正函数的虚部 F_i 与 Ka 的关系
1——狭缝; 2——圆管; 3——取向和孔径平均

与此有关的一个重要物理量是渗透率,在一般情况下它为二阶张量,仅当微流动为统计各向同性时,它为标量。与对其他量的要求相同,人们总希望能找出一个普适形式来描述它,使得其形式与微结构的关系不大。文献[13]的作者作了这样的尝试,他们选取了几种几何形状有一定区别的孔隙微结构作了数值计算,其结果对所涉及的情况有一定的普适性,但还不能说这一结论就普遍成立了,因为渗透性的流

动与粘滞性(因而与修正函数 F) 紧密相关, 而 F 函数随模型的不同而差别很大(见图 2 和图 3 的三条曲线的比较), 企图用几个特例来证明微结构流动的普适性看来是困难的。

综上所述, 以 Biot 为代表的多孔介质中声传播理论给应用者留下了三个难以普适地确定的物理量 m 、 K_0 和 F , 不同的应用者, 在各自的具体应用中, 常常是适当地选取需要的参数, 使得其测量数据与理论符合, 从逻辑上来说, 所谓符合也仅仅是在此意义上而已。

在结束这一节之前, 我们不妨回顾一下弹性波理论。对于一种均匀各向同性的弹性固体来说, 它只有两个独立的弹性常数, 在这种介质中, 只能有两种波(一个纵波和一个横波)传播。而 Biot 理论所描述的统计各向同性多孔介质中却有三个弹性常数, 并从理论上预见到, 在后一介质中有三个波(一个横波和两个纵波)传播, 而 Plona 实验证实确有三个波存在, 这表明, 三个常数是独立的。这也就意味着, 所讨论的统计各向同性的多孔介质与通常的均匀各向同性固体介质是有重要区别的。这也许是由于在 Biot 的多孔介质模型中, 填充的流体是彼此连通的, 它与骨架之间既有相互作用(惯性、弹性和粘性相互作用), 又能在孔隙中独立流动, 故不能将它看成一个简单的复合性各向同性介质。基于上述事实, 在今后的工作中, 采用统计平均的方法^[14]来发展和完善多孔介质中的声传播理论似乎是一条有效的途径。

3 分形学在多孔介质中的应用

如果将多孔介质的微结构看成具有统计意义下的自相似或自仿射, 则可将分形学方法^[14]应用于这个领域。近年来, Katz 和 Thompson^[15]利用扫描电子显微镜观察了砂岩中流体与固体交界面的特征数目 N , 将其对数对尺度的对数作图, 得到了孔隙界面的分维数 D_s 。他们定义了分形结构自相似区尺度的上限 l_2 和下限 l_1 , 导出了介质的孔隙率 ϕ 服从下述幂定律, 即

$$\phi = \left(\frac{l_1}{l_2}\right)^{3-D_s}, \quad (5)$$

式中 D_s 为孔隙空间的分维数。他们结合扫描电子显微镜对同一样品的成像图, 对其孔隙密度进行自相关处理, 证明了界面分维数 D_s 与孔隙空间的分维数 D_v 近似相等。他们选自相关函数图形上的跳变点的横坐标为自相似区上限 l_2 , 选晶核的最小尺寸(约为 20 \AA) 作为下限 l_1 , 由(4)式算出孔隙率的分形理论值 ϕ 。另一方面, 可以用通常的方法得到 ϕ 的测量值。表 2 给出了测量值和理论值的对比结果, 其符合程度还是比较好的。这个结果表明, 利用(4)式和对 ϕ 的测量结果, 可以求出多孔介质的分维数。但这个问题的关键是 l_1 和 l_2 的选取, 对此 Roberts 曾提出过异议^[16]。

表 2 几种砂岩的孔隙率^[15]

样品名	分维数	$l_2(\mu\text{m})$	$\phi(\%)$	
			理论值	实验值
Tight gas sand #965	2.57	2.5	4.7	5.3—5.6
Tight gas sand #466	2.68	6	7.6	6.9—7.6
Coconino	2.78	98	10	11—12.5
Navajo	2.81	50	15	16.4
St. Peter's	2.87	50	27	24—28

正如前面提到过的, 沉积物也可当作多孔介质来处理。最近, 我们应用分形学方法研究海洋江河沉积物的分维数。首先测量了河床粗砂的声衰减^[17], 将测量数据与理论值^[18]进行比较, 可知数据值比理论值大得多, 这是由于我们的理论模型是将自然界的砂颗粒看成是球形的缘故。事实上, 当频率较高, 使得流体中粘滞波的波长比颗粒的平均粒径小很多时, 用这么小的尺度来观察自然界的砂粒, 其形状非常不规则, 大大地偏离球形^[17,19], 从而增大声衰减是不足为怪的。基于这一想法, 我们应用流体力学和分形学方法修正了声衰减理论^[20], 得到了如下的表达式, 即

$$\alpha = \alpha_0(KR)^{D-D_0}, \quad (6)$$

式中 α 和 D 为被测砂(自然界的砂)颗粒介质的

声衰减系数和分维数, α_0 和 D_0 是当每个砂粒用其等效球形代替时的相应量, R 为颗粒的平均粒径, K 为粘滞波的波数, 它等于 2π 除以粘滞波波长 λ_v . 图 4 给出了 α/f 对频率 f 的曲线, 图中的符号是文献[17]中的测量数据, 曲线 1 是球形模型声衰减的理论值, 曲线是当 $D_0 = 0.36$ 时(5)式给出的结果. 图 4 表明, 在 $f < 540\text{kHz}$ 直到 $f \geq 50\text{kHz}$, 理论和实验符合得较好. 在文献[20]中, 我们提议用粘滞波波长 λ_v 作为自相似尺度, 选取对应于 50kHz 处的 λ_v 作为(4)式中的 l_1 , 540kHz 处的 λ_v 作为 l_2 , 而孔隙率 $\phi = 0.45^{[17]}$, 可以算出 $D = 2.35, D_0 = 1.99$, 即 D_0 很接近 2. 这个结果表明, 通过测量声衰减可以作为测量颗粒介质分维数的一种方法.

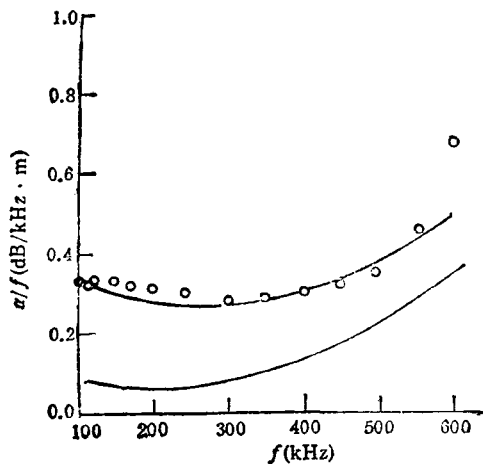


图 4 声衰减与频率的关系
1——球形模型; 2——分形修正; 3——测量数据^[17]

4 讨论和结论

以唯象方法为基础的 Biot 多孔介质声学, 预见到有慢纵波的存在, 这是该领域的一个重要成就. 在这一理论中, 有几个描写骨架及微结构的参数尚未能普适地解析确定. 就目前状况而言, 只是半经验、半理论式地来讨论具体问题, 凭借调节几个参数使理论与实验符合. 对于这类统计各向同性介质而言, 采用统计平均

的理论方法来研究其声传播细节, 似乎更接近实际. 在研究海洋江河的底质沉积时, 颗粒介质模型加上分形学修正是一条有效途径. 这就启发我们, 多孔介质理论加上分形学修正也许会有助于这一领域的发展.

本文未涉及多孔介质界面的反射和折射等问题, 也未详细述及颗粒介质中的声传播和有关参数的反演问题, 有兴趣的读者可分别参阅文献[21]和文献[19, 22].

参 考 文 献

- [1] 钱祖文, 中国科学 (A 辑), No. 2(1992), 193.
- [2] J. Frenkel, *J. Phys. USSR*, 8(1944), 230.
- [3] C. Zwikker and C. W. Kosten, *Sound absorbing materials*, Elsevier Publishing Company, Inc., New York, (1949).
- [4] F. Gassmann, *Geophys.*, 16(1951), 673.
- [5] M. A. Biot, *J. Acoust. Soc. Am.*, 28(1956), 168.
- [6] M. A. Biot, *J. Appl. Phys.*, 33(1962), 1482.
- [7] T. J. Plona et al., *Appl. Phys. Lett.*, 36(1980), 259.
- [8] M. A. Biot et al., *J. Appl. Mech.*, 24(1957), 594.
- [9] R. D. Stoll, *Acoustic waves in marine sediments*, Ocean Seismo-Acoustics, ed. T. Akel et al., Plenum Press, New York, (1986), 417.
- [10] P. R. Ogushwitz, *J. Acoust. Soc. Am.*, 77(1985), 429.
- [11] G. Berryman, *Appl. Phys. Lett.*, 37(1980), 382.
- [12] Z. W. Qian, (钱祖文), International workshop on modern acoustics, Nanjing Univ., Sept. 4-7, 1994, B3-1, p. 26.
- [13] Ping Sheng and Min-yao Zhou, *Phys. Rev. Lett.*, 61(1988), 1591.
- [14] B. B. Mandelbrot, *The fractal geometry of nature*, W. H. Freeman & Company, New York, (1982).
- [15] A. J. Katz and A. H. Thompson, *Phys. Rev. Lett.*, 54(1985), 1325.
- [16] J. N. Roberts, *Phys. Rev. Lett.*, 56(1986), 2111; 2112.
- [17] D. Wu, Z. W. Qian and D. Shao, *Journal of Sound and Vibration*, 162(1984), 529.
- [18] Z. W. Qian, *Journal of Sound and Vibration* 103(1985), 427; 108(1986), 147.
- [19] 钱祖文, 自然科学进展, 5-1(1995), 47.
- [20] Z. W. Qian, Fractal dimensions of sediments in nature. (to be published).
- [21] 诸国帧, 应用声学, 13(1994), 1.
- [22] 钱祖文, 应用声学, 12(1993), 1.