测量不确定度的评定与表示*

刘智敏　刘风

(中国计量科学研究院,北京　100013)

摘　要　测量不确定度如何正确评定与表示,是个极其重要的问题.文章指出了研究不确定度的意义,介绍了不确定度的有关概念,按实际工作的测量模型,给出了标准不确定度A类、B类评定的各种具体方法,提出了标准不确定度的合成方法与展伸不确定度的给出方法,对不确定度评定与表示的程序进行了汇总,并举出应用实例.

关键词　测量不确定度,标准不确定度,展伸不确定度

Abstract　How to exactly evaluate and express the uncertainty in measurement is a very important problem. In this paper, the meaning of uncertainty is put forward, and the relevant concepts are introduced. According to the measurement model for practical work, the various specific methods for Type A and Type B evaluation of standard uncertainties and the expression for expanded uncertainty are given. The procedure for evaluating and expressing uncertainty is summarized, and practical examples are given.

Key words　uncertainty in measurement, standard uncertainty, expanded uncertainty

1　不确定度表示的意义

在科学实验中进行着大量的测量工作,测量结果的质量如何,要用不确定度来说明.不确定度愈小,测量结果与真值愈靠近,其质量愈高.于是其使用价值就愈高.反之,不确定度愈大,测量结果与真值愈远离,质量愈低,使用价值就愈低.

不确定度必须正确评价.评价得过大,会因测量不能满足需要而需再投资,造成浪费.评价得过小,会对产品质量造成危害.

实验不确定度如何评定与表示,是个极其重要的问题.过去对于不确定度的表示各国都有其不同的看法和规定,影响国际间的交流和各种成果的相互利用,因此,国际计量局(BIPM)制定了实验不确定度建议书INC-1.1986年,国际标准化组织(ISO)、国际计量委员会(CIPM)、国际法制计量组织(OIML)、国际电工委员会(IEC)成立了国际不确定度工作组.我国计量科学研究院刘智敏研究员是其工作组成员.经过国际上的长期讨论和细致工作并广泛征求意见,于1993年制定出了"测量不确定度表示指南",并由以上四个国际组织及国际理论与应用物理学会(IUPAP)、国际理论与应用化学学会(IUPAC)、国际临床化学学会(IFCC)批准实施,供各国使用.为实验不确定度的统一奠定了基础,为测量和科学实验的发展提供了有力的保证.本文根据1993年指南最新内容,阐述了测量不确定度的评定与表示.

2　不确定度的概念

测量不确定度是测量结果带有的一个参数,用以表征合理赋予被测量值的分散性.它是

* 国家自然科学基金资助项目.

1994年11月11日收到.

被测量真值在某个量值范围内的一个评定.

下面给出不确定度的几个概念:

(1)标准不确定度:以估计标准差表示的测量不确定度,简称不确定度.

(2)A类评定不确定度:由观测列的统计分析评定的不确定度,也称统计不确定度.

(3)B类评定不确定度:由非统计分析评定的不确定度,也称非统计不确定度.

(4)合成标准不确定度:测量结果由其他量得来时,按其他量的方差和协方差算出的测量结果的标准不确定度,也称合成不确定度.

(5)展伸不确定度:用以确定测量结果附近区间的一个量,合理赋予被测量值分布的大部分可望以高置信水准(概率)落入该区间,也称总不确定度.

(6)包含因子:为获得展伸不确定度,对合成不确定度所乘的数值.

3 标准不确定度的评定

3.1 测量模型

(1) 在很多情况下,被测量 Y 不能直接测得,而是通过函数关系 f,由 N 个别的量 X_1, $X_2,\cdots,X_N$ 决定:

$$Y = f(X_1,X_2,\cdots,X_N). \tag{1}$$

(2) 输出量依赖的输入量 $X_1,X_2,\cdots,X_N$ 自身,也可能是被测量,并可能依赖于含有系统效应修正量及修正因子的其他量,因此导致一个复杂的函数关系,以致 f 不能明显表出,而且 f 可能按实验测定或仅以算法存在. 因此,如数据表明,f 并未将测量模型化至测量结果所需的准确度要求程度,为消除这一不适合性,f 中应加入别的输入量,以反映影响被测量的不完全知识.

(3) 输入量 $X_1,X_2,\cdots,X_N$ 集合可归类为:

(a)其值与不确定度由当前测量直接获得,它们可得自单一观测、重复观测和基于经验的估计,并可包含所用仪器的修正量,和对如温度、大气压、湿度等影响量的修正量;

(b)其值与不确定度由外部来源引入,如已校准的测量标准、有用的参考物质、由手册所得的参考数据.

(4) 用输入估计 $x_1,x_2,\cdots,x_N$ 作为 N 个量 $X_1,X_2,\cdots,X_N$ 的值,由(1)式可得被测量 Y 的估计值 y,因此测量结果即输出估计值 y 为

$$y = f(x_1,x_2,\cdots,x_N). \tag{2}$$

(5) 各输入估计值 x_i 及其相连的标准不确定度 $u(x_i)$ 来自输入量 X_i 的可能的分布,其概率分布可能基于频率分布(即基于 X_i 的观测列 X_{ik}),也可能是先验分布,标准不确定度的 A 类评定基于频率分布,B 类评定基于先验分布.

3.2 标准不确定度的 A 类评定

(1)在很多情况下,输入估计值 x_i 可在相同测量条件下,对 X_i 作 n_i 次独立观测,得到的 x_i 值为 $x_{i1},x_{i2},\cdots,x_{i(ni)}$,于是最佳值为

$$\bar{x}_i = (1/n_i)\sum x_{ij}. \tag{3}$$

(2) X_i 的各观测值 $x_{i1},x_{i2},\cdots,x_{i(ni)}$ 不同,是由于影响量的偶然变化或偶然效应,于是 X_i 的概率分布方差估计为

$$s^2(x_{ij}) = [1/(n_i-1)]\sum(x_{ij}-\bar{x}_i)^2. \tag{4}$$

方差估计的正平方根即实验标准差,表示为

$$s(x_{ij}) = \sqrt{s^2(x_{ij})}. \tag{5}$$

平均值 $\bar{x}_i$ 的实验标准差为

$$s(x_i) = s(x_{ij})/\sqrt{n_i}. \tag{6}$$

于是平均值 x_i 的标准不确定度为

$$u(x_i) = s(x_i) = \sqrt{[1/(n_i(n_i-1))]\sum(x_{ij}-\bar{x}_i)^2}. \tag{7}$$

此标准不确定度的自由度 $\nu_i = n_i - 1$,ν_i 在写出 $u(x_i)$ 时应同时写出.

(3)输入量 X_i 的估计值 x_i 通常得自一条曲线,该曲线由实验数据拟合并采用最小二乘法,表征曲线拟合参数和任何预期点的估计方差和结果的标准不确定度,通常由熟知的统计程序算出.

3.3 标准不确定度的 B 类评定

B 类不确定度在测量范围内无法作统计评定，但以前类似的测量记录、测量中所用装置或材料的一般特性、制造说明书、检定证书、所用仪器（或类似仪器）所提供的检定数据、取自手册的参数等形成一个信息集合，可以提供不确定度的有意义的测度.

(1) 如估计值 x_i 取自制造说明书、检定证书、手册或其他来源，且其不确定度给出为标准差的几倍，则标准不确定度 $u(x_i)$ 可简单取为该值除倍数，估计方差为商的平方.

例如，校准证书上说，名义值为1000g 的不锈钢质量标准的质量 m_s 为1000.000 325g，"该值的不确定度按三倍标准差计为240μg"，于是质量标准的标准不确定度简化为：$u(m_s) = 240\mu g/3 = 80\mu g$，相应于相对标准差 $u(m_s)/m_s$ 为 80×10^{-9}，估计方差为 $u^2(m_s) = (80\mu g)^2 = 6.4 \times 10^{-9} g^2$.

(2)所述 X_i 的不确定度，不是给定为标准差的几倍，而是指不确定度定义的区间有 90%，95%，99% 的置信水准. 这时可用正态分布来计算所述不确定度，将所给不确定度除以正态分布适当因子，以恢复 X_i 的标准不确定度. 相应上述三个置信水准的因子为 1.64，1.96，2.58.

例如，一标准证书说，名义 10Ω 的标准电阻器的电阻在 23°C 时为 10.000 742Ω ± 129μΩ，且"所述不确定度 129μΩ 确定的区间有 99% 的置信水准"，则电阻器标准不确定度可取为 $u(R_s) = 129\mu\Omega/2.58 = 50\mu\Omega$，估计方差为 $u^2(R_s) = (50\mu\Omega)^2 = 2.5 \times 10^{-9}\Omega^2$，

(3) 根据可以用的信息，可说输入量 X_i 的值位于区间 a_- 至 a_+ 中的概率为 50%，如可取 X_i 可能值的分布近似正态，则 X_i 的最佳估计 x_i 可取为区间中点. 区间半宽为 $a = (a_+ - a_-)/2$，则 $u(x_i) = a/0.6745 = 1.48a$.
因此对期望 μ，标准差 σ 的正态分布，区间 $\mu \pm (\sigma/1.48)$ 近似含被测量 Y 值分布的 50%.

表1 正态分布产生置信水准 P 的区间的包含因子 k_P 值

P%	50	68.27	90	95	95.45	99	99.73
k_P	0.6745	1	1.645	1.960	2	2.576	3

(4) 在一些情况下，仅可估计 X_i 的界限（上限，下限），特别是当 X_i 以等概率落于区间 a_- 至 a_+ 的任何处（可能值是均匀分布或矩形分布）时，X_i 的最佳值 x_i 为区间中点，即 $x_i = (a_- + a_+)/2$，其方差 $u^2(x_i) = (a_+ - a_-)^2/12$. 若上下限记为 $2a$，则 $u^2(x_i) = a^2/3$，若 X_i 趋于三角分布，则 $u^2(x_i) = a^2/6$.

(5)B 类评定标准不确定度 $u(x_i)$ 的自由度为 $\nu_i = 1/2 \times (\sigma(u(x_i))/u(x_i))^2$.

4 合成标准不确定度与展伸不确定度

对于被测量的测量结果 $y = f(x_1, x_2, \cdots, x_N)$，各 x_i 的标准不确定度 $u(x_i)$ 可得自 A 类评定或 B 类评定，于是 y 的标准不确定度 $u_c(y)$ 为各 $u(x_i)$ 的合成标准不确定度

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 u^2(x_i) + 2\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) u(x_i, x_j), \tag{8}$$

而 $u(x_i, x_j)$ 为 x_i, x_j 不确定度协方差估计值. 引入 x_i, x_j 不确定度相关系数估计值

$$r(x_i, x_j) = u(x_i, x_j)/u(x_i)u(x_j), \tag{9}$$

则

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 u^2(x_i) + 2\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) \times r(x_i, x_j) u(x_i) u(x_j). \tag{10}$$

这一由 x_i 不确定度求函数 y 不确定度的式子，称为不确定度传播定律.

当各 x_i 无关时，$r(x_i, x_j) = 0$，可得

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^{N}(\frac{\partial f}{\partial x_i})^2 u^2(x_i). \qquad (11)$$

若令 $\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right| u(x_i) = u_i$，则当各 x_i 无关时，上式开方后成为

$$u_c(y) = \sqrt{\sum u_i^2}, \qquad (12)$$

式中 $u_c(y)$ 有时也简记为 u_c.

由韦尔奇-萨特思韦特式，$u_c(y)$ 的自由度为

$$\nu = u_c^4(y)/\sum(u_i^4/\nu_i), \qquad (13)$$

而 ν_i 为 $u(x_i)$ 的自由度.

增大置信水准的不确定度测度称为展伸不确定度，记为 U. 它是由合成标准不确定度 $u_c(y)$ 乘以包含因子 k 而得，即 $U = ku_c(y)$. 于是测量结果可表示为 $Y = y \pm U$，意指赋予被测量 Y 值的最佳估计为 y，$y - U$ 至 $y + U$ 区间可望包含合理赋予 Y 值分布的大部分.

5 不确定度评定与表示程序汇总

测量结果不确定度的评定与表示可按以下步骤汇总：

(1)数学上将被测量 Y 及其所依赖的输入量 X_i 的函数表示出，即

$$Y = f(X_1, X_2, \cdots, X_N).$$

对显著影响测量结果不确定度分量的各个量，包括所有修正量及修正因子，都应含于 f 中.

(2) 决定输入量估计值 X_i 及其不确定度 $u(x_i)$，基于观测列统计分析及其他方法.

(3)评定任何相关估计带有的协方差.

(4)由输入量 X_i 的估计值 x_i 求被测量 Y 的估计值 y，即测量结果.

(5)由输入估计标准不确定度和协方差求测量结果 y 的合成标准不确定度.

(6)若需给出展伸不确定度，其目的是提供区间 $y - U$ 至 $y + U$，使被测量 Y 值分布的大部分以置信水准 P 含于此区间，即 $U = ku_c(y)$.

(7) 报告测量结果 y 及其不确定度 $u_c(y)$ 或展伸不确定度 U，说明其如何获得.

6 举例

在某次测量中，各输入量 $x_i(i = 1,2,3\cdots N)$ 之间相互无关，其 A 类不确定度 $u_i(= s_i)(i = 1,2,3,4)$ 与 B 类不确定度 $u_j(j = 5)$ 如表 1 所示.

表1

序号	不确定度			自由度	
	来源	符号	数值	符号	数值
1	基线尺	u_1	1	ν_1	5
2	读数	u_2	1	ν_2	10
3	电压表	u_3	$\sqrt{2}$	ν_3	4
4	电阻表	u_4	2	ν_4	16
5	温度	u_5	2	ν_5	1

根据表1，可得到合成标准不确定度为

$$u_c = \sqrt{\sum u_i^2} = \sqrt{12} = 3.5,$$

其自由度为

$$\nu = u_c^4/\sum(u_i^4/\nu_i) = 8.$$

包含因子 k 可由自由度 ν，置信水准 P 的 t 分布临界值 $t_P(\nu)$ 算出，取 $P = 0.95$，于是

$$k = t_P(\nu) = t_{0.95}(8) = 2.31.$$

总不确定度为

$$U = ku_c = 8.0.$$

参考文献

[1] 刘智敏，不确定度原理，中国计量出版社，(1993).

[2] BIPM, IEC, IFCC, ISO, IUPAC, IUPAP, OIML, Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement ISO, (1993).