[17] W. K. Kowk et al. ,*Phys. Rev. Lett.* ,**69**(1992),3370;
72(1994),1088,1092.
[18] W. Jiang et al. , *Phys. Rev. Lett.* ,**74**(1995),1438.
[19] P. Bak, C. Tang and K. Wiesenfeld, *Phys. Rev. Lett.* ,
59(1987),381.
[20] Z. Wang and D. Shi, *Phys. Rev. B*, **48**(1993),4208,
9782.
[21] A. P. Malozemoff and D. A. Fisher, *Phys. Rev. B*, **42**
(1990),6784.
[22] D. L. Yin et al. , *Z. Phys. B*,**94**(1994),249.

控制混沌的原理及应用*

陈立群 刘延柱
(上海交通大学工程力学系,上海 200240)

摘 要 概述了控制混沌使其转化为周期性动力学行为的几种主要方案,包括对受控系统施加外激励型控制的输送控制,对受控混沌系统的可控参数施加小摄动以稳化周期性轨道的 OGY 方法,以及应用自控技术中的自适应控制和常规反馈控制.也介绍了控制混沌在数值实验和实验室实验中的应用.最后还简介了控制混沌的若干发展动向.

关键词 控制混沌,输送,稳化,自动化

有些确定性动态系统,对初值的变化极为敏感,失之毫厘,差之千里,因而呈现出类似随机性的动力学行为,这类现象称为混沌.过去 30 多年的研究表明,混沌现象广泛在于物理、生物、生态、气象甚至经济、社会系统,并非如古书所云"混沌相连,视之不见"(《白虎通·天地》).但混沌虽视之可见,却仍难以驾驭,这无给混沌的应用带来了困难.

近年来,混沌看得见摸不着的局面有所改变.在物理、数学和控制工程等专业研究者的努力下,可以控制具有混沌性态的系统,并开拓了某些应用领域,例如,稳定激光以提高其能量;控制混沌性非线性电路以传递通信信号;将紊动流体层流化,控制化学反应中的混沌振荡,使不健康动物的不规则心脏跳动规则化等.控制混沌是混沌理论走向应用的重要一步.随着研究的深入普及,将会发现它有更广泛的应用前景.

即使在自动化控制理论日趋成熟的今天,控制混沌也不是容易的事情.有的系统加控制后控制信号会驱使系统进入发散区而结束寿命,这正与一个古老的寓言暗合,"中央这帝为混沌",南海之王北海之王有意控制,"日凿一窍",结果却很不妙,"七日而混沌死"(《庄子·应帝王》).所以控制混沌需要一些专门的方法,借助这些方法,尽管"天地混沌如鸡子",却可使"天地开辟,阳清为天,阴浊为地"(《三五历纪》).本文介绍控制混沌的基本原理和若干应用.

1 控制混沌的基本原理

控制混沌就是要把非线性动态系统的混沌动力学行为转化为事先确定的平衡态、周期运动和准周期运动(统称为周期性动力学行为).问题的关键并非仅仅抑制混沌运动(这往往可以通过改变系统参数甚至初值来实现),而是要求达到事先确定的目标,这就需要一些专门的方案.

* 国家教委博士点科研基金和冶金工业部高等学校应用基础科学研究基金资助项目.
1994 年 12 月 15 日收到初稿,1995 年 3 月 1 日收到修改稿.

1989 年,一种对控非线性系统施加外激励型有限摄动使其动力学行为变成事先指定的周期运动的控制方案问世[1],这就是现在一般所称的输送控制或迁移控制[2],其含意是施加控制把系统输送到指定的周期性轨道或者在不同的周期性轨道间迁移.这一方法基于吸引性.在相空间 R^D,假设非线性动态系统

$$x_{n+1} = E(x_n) \tag{1}$$

的目标周期轨道吸引子存在收敛域 $C \subset R^D$,使得附近的轨道沿着 D 个特征方向收敛.这里的动态系统也可以是由一阶常微分方程组描述的有限维连续系统,甚至还可以是由偏微方程描述的无限维系统,但从应用到实验系统方便的角率考虑,(1)式给出的离散序列更有意义.若事先给定周期性目标动力学行为为 g_n,则可对系统(1)实施控制 F,使

$$x_{n+1} = E(x_n) + F(g_{n+1}, g_n), \tag{2}$$

其中

$$F(g_{n+1}, g_n) = g_{n+1} - E(g_n) \tag{3}$$

则易验证 g_n是受控系统(2)的轨道,其稳定性则由收敛域的存在来保证.对于适当的初值,将有

$$\lim_{n\to\infty} |x_n + g_n| = 0, \tag{4}$$

于是便实现了控制.使(4)式成立的初值范围称为目标 g_n的输送盆.在这种中,收敛域和输送盆的存在都是尚待证明的假设,目前仅对低维映射有一些比较严格的数学论证.

1990 年,又有一种很有影响的控制方案问世,现在一般称为 OGY 方法[3].这一方法基于混沌汲引子的几何结构和混沌动力学行为对初值的敏感性. OGY 方法可直接适用于以映射表示的离散动态系统,对于连续动态系统则要通过构造相应的 Poincare 映射来实现控制.为突出其基本原理,这里仅讨论控制二维映射到事先选定的不动点,当然该方法对于高维系统也是适用的[4].目标不动点必须是构成混沌吸引子的无穷多个不稳定稠密周期性轨道中的一个. OGY 方法实质上是将不稳定轨道稳化.考虑有可控参数 p 的映射

$$x_{n+1}=E(x_n, p), \quad x_n \in R^2,$$
$$p_0-\delta<p<p_0+\delta . \tag{5}$$

$p=p_0$时,系统(5)有混沌吸引子,目标不动点为

$$x_F = E(x_F, p_0). \tag{6}$$

在 (x_F, p_0) 的邻域内取一阶近似,有

$$x_{n+1} - x_F = D_x E \cdot (x_n - x_F) + \frac{\partial E}{\partial p}(p_n - p_0), \tag{7}$$

其中 2×2 矩阵 $D_x E$ 和二维向量 $\frac{\partial E}{\partial p}$ 都是在 (x_F, p_0) 计算的.设 $D_x E$ 有特征值 λ_s和 λ_u,$|\lambda_s| < 1$,$|\lambda_u| > 1$,对应的特征向量 e_s和 e_u给出不动点 x_F的局部稳定和不稳定流形.设 e_s和 e_u的反变基向量 f_s和 f_u满足

$$f_s^T \cdot e_s = f_u^T \cdot e_u = 1,$$
$$f_s^T \cdot e_u = f_u^T \cdot e_s = 0 , \tag{8}$$

则

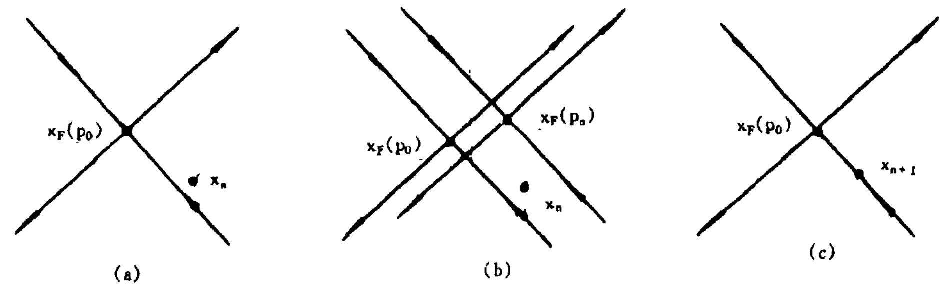

图 1 OGY 方法示意图

(a) x_n进入 $x_F(p_0)$ 邻域; (b)施加控制;

(c)x_{n+1}进入 $x_F(p_0)$局部稳定流形,控制停止

$$D_x E = \lambda_s e_s f_s^T + \lambda_u e_u f_u^T, \quad (9)$$

故当

$$p_n = p_0 - \frac{\lambda_u}{f_u \cdot \frac{\partial E}{\partial p}} f_u \cdot (x_n - x_F) \quad (10)$$

时，由(7)，(8)，(9)和(10)式，可以验证

$$f_u \cdot (x_{n+1} - x_F) = 0 . \quad (11)$$

这表明控制律(10)式成立时，可使 x_{n+1}进入 x_F 的局部稳定流形，此后可不做参数摄动，即 $p_n = p_0$，一旦 x_{n+1} 又离开 x_F的局部稳定流形，(10) 式再起作用. 整个过程如图 1 所示. 由于混沌行为对初值的敏感性，系统对参数的小变化会有迅速的反应.

上述两种方法具有可以互相补充的特点：输送控制是无反馈开环控制，OGY 方法是反馈控制；输送控制基于系统的数学模型(已知或可从实验数据中建构)，OGY 控制仅要求相应的 Poincare 映射（计算或测量)；输送控制要求系统可以控制，OGY 方法要求系统有可控参数；输送控制要对系统做在限摄动，OGY 方法原则上仅对参数做小摄动；输送控制的目标不能是系统的任何特解(此时由(3)式 $D(g_{n+1}, g_n) = 0$，无控制)，OGY 方法仅能将混沌吸引子中不稳定的周期性轨道稳定化. 但是，这两种方法邓有共同的局限，它们都依赖动态系统的吸引性，因而均不适用于非耗散系统.

利用自动控制技术既可以控制耗散系统，也可以控制保守系统中的混沌行为. 忽略技术性细节，自适应控制的基本结构如图 2 所示. 利用随机自适应控制来控制保守系统得到了有意义的结论[5]，通常的确定性控制用于控制保守系统时，误差积累将驱使系统进入发散区，从而结束系统寿命，所以保守系统需要随机控制. 由于随机自适应控制器复杂，也有将确定性自适应用于耗散非线性系统中混沌的控制[6]. 此外，原理更为简单的常规反馈控制也应用于控制混沌，其基本结构如图 3 所示，这类方法对于分段线性的非线性系统有很好的控制效果[7]，对于一般的非线性振子也作了初步的尝试[8].

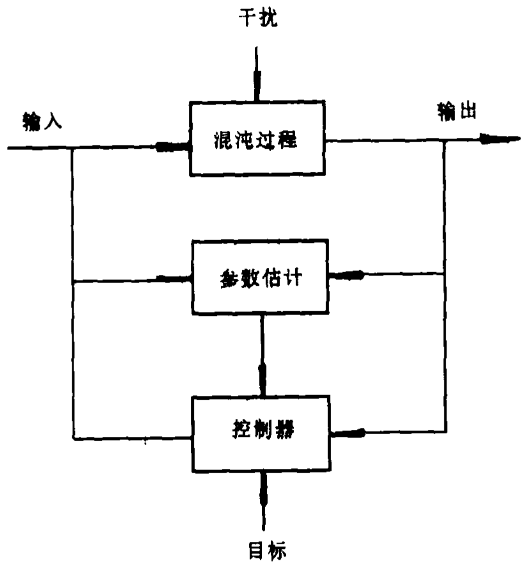

图 2 自适应控制的基本结构

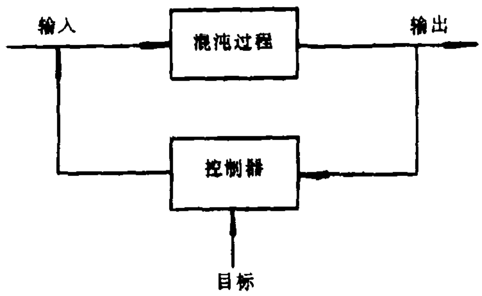

图 3 常规反馈控制的基本结构

2 控制混沌在实验中的应用

这里所称的实验既包括数值实验也包括实验室实验. 上述各种方法均已在数值实验中应用，而 OGY 方法更是成功地应用于实验室实验.

在数值实验中，控制混沌的原理已应用于映射 描述的离散动力系统、一阶常微分方程组描述的有限维连续动力系统和偏微分方程描述的无穷维连续动力系统. 典型的 Logistic 映射和 Hénon 映射中的混沌用不同的方法均可控制，输送控制还控制了源于环形腔光学双稳实验的 Ikeka 映射中的混沌，OGY 方法应用于控制源于二自由度受周期冲击的双摆系统的一

类四维映射中的混沌[4]，常规反馈控制用于控制分段线性的 Lozi 映射中的混沌[7]. J 结的数学模型中的混沌[1]，OGY 方法和自适应控制应用于几类典型的连续动态系统，如 Lorentz 系统、R Össler 系统和 Duffing 振子，也应用于 Bongoeffer-van der Pol 振子[9]. OGY 方法加以改进后还应用于一类六步骤自催化化学反应的三变量模型和一类抗议散耦合生物系统[10]，内模型参考自适应控制应用于控制连续搅拌槽反应器中的放热不可逆连续一阶反应数学模型中的混沌[6]，随机自适应控制可控制保守的 Hénon-heiles 系统[5]. 控制无穷维动力系统的时间混沌的例子有正弦波驱动非线性移波方程[11].

OGY 方法及其变形已应用于有关力学、电学、光学、化学、生物等实验室实验中的控制混沌问题. 最早的结果是个可演示的力学系统实验[12]，铅垂放置底端固定的金属悬臂梁在周期变化的磁场中的混振动可以控制成为周期 1、周期 2 和周期 4 运动. OGY 方法稍加改变，用混沌行为的测量数据代替 Poincare 映射，可用于控制三极管谐振器中的混沌[13]，得到了 23 个周期的轨道，驱动频率高达 50000 Hz . 这类技巧还应用于 Duffing 电路中混沌的控制[14]. 类似的技巧在激光动态控制中取得了引人注目的成功[15]，激光强度的混沌性起伏得到了控制，稳化了 9 个周期的不稳定振荡，驱动频率高达 150000 Hz . OGY 方法应用于底部加热，上部冷却的环形对流实验[16]，可将混沌流动层流化. 在与小变化外加磁场次谐共振构形中的钇铁石榴石的旋波不稳定实验中，也得到了与 OGY 方法定性相符的结果[17]. 改进的 OGY 方法[10]也应用于连续流动搅拌槽反应器中的 Belousov Zhabotinsky 反应[18]，跟踪了不稳定的周期轨道. OGY 方法甚至还应用于生物医学方面，可以用电信号控制动物心脏跳动从而改变心律不齐症状[19]，这个方面的应用很值得重视，OGY 方法有可能用于治疗心房或心室纤维颤动，甚至有可能研制出采用控制混沌技术的心脏整律器和去纤颤器. OGY 方法也应用于混沌的控制[20].

3 控制混沌的若干新进展

输送控制和 OGY 方法的一个重要改进是不必要求被控过程有完整的数学模型，采用延迟坐标技巧可利用任一实验变量的时间序列来实现控制，这并非单纯是从已知数据建模的问题，控制算法也要有相应修改. 另一重要改进是在有随机噪音背景时实现控制，这方面输送控制仅有很初步的结果，而 OGY 方法也有些变化，如只有当参数摄动超过特定阈值时才可能实现控制，而且随机干扰可能导致阵发混沌. 此外，在控制时间缩短和控制精度提高方面也有进展.

用自动控制技术混沌的一个重要发展是使人工神经网络通过学习来实施非线性系统混沌行为的控制. 此外，在常规反馈控制的理论框架中有可能统一地研究控制混沌和混沌同步化，将它们视为由驱动而改变系统动力状态.

控制混沌在数值实验中的应用也不局限于时间混沌的控制，在时空混沌控制方面已取得一些结果，如离散的耦合映射晶格模型和描述介质近长波阈值振荡不稳定性的复 Cinzburg-Landau 方程中时空混沌的控制. 在实验室也实现了时空混沌的控制，控制催化晶片上的时空图案. 电路实验方面也作了较多工作，尤其是可模拟多种奇怪吸引子的蔡氏电路中混沌的控制，在此基础上甚至可能产生一种新的通信方案.

参 考 文 献

[1] A. Hubler, *Helvtica Phys. Acta.*, **62**(1989), 343.
[2] E. A. Jackson, *Phys. Lett. A*, **151**(1990), 478.
[3] E. Ott, C. Grebogi, J. A. Yorke, *Phyw. Rev. Lett.*, **46**(1990), 1196.
[4] D. Auerbach, C. Grebogi, E. Ott et al., *Phys. Rev. Lett.*, **69**(1992), 3479.
[5] T. B. Fowler, *IEEE Trans. Autonmat. Control*, **34**(1989), 201.
[6] J. K. Bandyopadhyay, V. R. Kumor, B. D. Kulkarni, *Phys. Lett. A*, **166**(1992), 197.
[7] G. Chen, X. Dong, *Int. J. Bifur. Chaos*, **2**(1992), 407.

[8] G. Chen, X. Dong, *IEEE Trans. Circuit Syst.*, **40** (1993), 591.
[9] S. Rajaseker, M. Lakshmanan, *Int. J. Bifur. Chaos*, **2** (1992), 201
[10] B. Peng, V. Petrov, K. Showalter, *J. Phys. Chem.*, **95** (1991), 4957
[11] H. Gang, H. Kaifen, *Phys. Rev. Lett.*, **71** (1993), 3794.
[12] W. L. Ditto, S. N. Rauseo, M. L. Spano, *Phys. Rev. Lett.*, **65** (1990), 3211.
[13] E. R. Hunt, *Phys. Rev. Lett.*, **67** (1991) 1953.
[14] T. L. Carrol, I. Triandaf, I. Schwartz et al., *Phys. Rev. A*, **46** (1992), 6159.
[15] R. Roy, T. W. Murphy, T. D. Maier et al., *Phys. Rev. Lett.*, **68** (1992), 1259.
[16] Y. Wang, S. Singer, H. H. Bau, *J. Fluid Mech.* **237** (1992), 479.
[17] A. Azevedo, S. M. Rezende, *Phys. Rev. Lett.*, **66** (1991), 1342.
[18] V. Petrov, M. J. Crowley, K. Showalter, *Phys. Rev. Lett.*, **72** (1994), 2955.
[19] A. Garfinkel, M. L. Spano, W. L. Ditto et al., *Science*, **257** (1992), 1230.
[20] S. J. Schiff, K. Jerger, D. H. Duong et al., *Nature*, **370** (1994), 615.

混沌和李雅谱诺夫特征指数*

李尧亭　蔡诗东

（中国科学院物理研究所，北京　100080）

摘　要　混沌现象是非线性学科中的重要课题之一. 文章深入浅出地介绍了李雅谱诺夫特征指数和混沌系统的关系以及如何计算李雅谱诺夫特征指数，强调了李雅谱诺夫特征指数在判断混沌系统过程中的重要性，同时，还简单介绍了李雅谱诺夫特征指数与容量维数之间的关系.

关键词　混沌，李雅谱诺夫特征指数，测度熵，分数维

1　混沌和混沌状态的判断

非线性科学（nonlinear science）是当今科技界非常活跃的学科之一，非线性现象在许多领域受到越来越多的科学工作者的关注，这种复杂的运动现象引起了人们的浓厚兴趣. 在众多的非线性现象中，混沌（chaos）运动显得尤其突出，也是人们研究较多的几个非线性运动现象之一. 有人又认为奇异吸引子（strange attractor）就是混沌，但是也有人不同意这一观点，为了区别于其他类型的平凡吸引子，本文暂采用混沌吸引子的说法. 在混沌这个领域中，洛伦兹（Lorentz）[1]最早以混沌吸引子为依据，提出了大气运动的长期不可预测性，这是洛伦兹对混沌运动研究的最大贡献，他的这个贡献引发了混沌运动研究这一新兴学科. 到目前为止，许多学科都发现具有混沌性质的这一现象.

混沌运动，是在确定论基础上产生的与随机运动有相似方面的复杂现象，混沌运动现象的发现正逐步改变着我们对自然界的看法，通过剖析、研究复杂运动方式，迫使人类用更高、更深的观点面对我们生存的这个世界. 拉普拉斯（Laplace）那种‘只要给我初始条件，我就可以决定未来一切’的时代已经过去.

混沌运动是一种高级的复杂运动形式，它的最重要的特点就是对初值的高度敏感性. 初值的微小差别将导致系统状态的巨大差异，可以用下面的比喻说明这个意思：如果在欧洲的一个蝴蝶煽动了一下翅膀，这个微小的扰动能决定数天或数小时后出现在我们头顶的是蓝天白云，还是狂风暴雨. 这就是洛伦兹模型所要说明的事情. 混沌运动受确定性系统规律的制约，它既不同于布朗运动的随机涨落，也不同于有规律的定轨线运动.

混沌是耗散和非线性相互作用的结果，由

* 1994年11月30日收到初稿，1995年3月25日收到修改稿.