

# 美妙的多面体\*

郭可信

(中国科学院北京电子显微镜实验室, 北京 100080)

**摘要** 首先介绍正多面体(柏拉图多面体), 正多角面半正多面体(阿基米德多面体)及正多角面半正多面体的历史沿革、几何特征及它们之间的相互关系. 在此基础上, 讨论了三角面多面体与有三连接顶的五角面-六角面多面体(如三角六十面体与截顶二十面体)以及它们在四面体密堆结构(液体, 非晶态, 准晶及 Frank-Kasper 相)、 $C_{60}$  全碳分子、球状病毒衣壳及圆顶建筑中的应用.

**关键词** 正多面体, 半正多面体, 三角面多面体, 五角面-六角面多面体

**Abstract** After an introduction to the history and geometrical features of regular (Platonic) polyhedra and facial-regular (Archimedean) as well as vertical-regular semiregular polyhedra, a brief discussion is presented of the deltahedra and the penta-hexagonal polyhedra, such as the hexacontahedron and the truncated icosahedron, and their applications in tetrahedrally close-packed structures (liquid, amorphous, quasicrystal, and Frank-Kasper phases),  $C_{60}$ , spherical virus capsids, and geodesic domes.

**Key words** regular polyhedra, semiregular polyhedra, deltahedra, penta-hexagonal polyhedra

在阅读凝聚态物理的有关著作中, 特别是近来新出现的  $C_{60}$ 、准晶、团簇、非晶等新材料, 常会遇到一些多面体的词汇, 如二十面体、截顶二十面体、五角十二面体、菱形三十面体等. 有些还冠以一些古代著名哲学家(如柏拉图)、数学家(如阿基米德)、天文学家(如开普勒)的姓名, 更增添一份色彩. 这些多面体是怎么回事? 有多少种? 相互之间的关系又如何? 为了回答这一连串问题, 编写了这篇简介. 一方面力求简单易懂, 便于不专门从事结构研究的读者浏览; 另一方面又要讲清多面体的历史渊源, 使读者了解其来龙去脉. 受到篇幅限制, 对多面体在一些新材料结构中的意义只能做到点到为止.

## 1 《几何原本》

人类认识自然界中规则的几何形状可谓岁月久远, 西汉的《韩诗外传》就有“凡草木花多五出, 雪花独六出”的总结. 在甘肃临洮马家窑出

土的陶器(属新石器时代晚期, 约公元前 3300—2050 年)上就有对称的五点图案. 在伊拉克的两河流域出土的史前时期的陶器以及在克里地岛出土的米诺斯文化(约公元前 2800—1100 年)的印章都有近乎正五边形的图案. 可见人类很早就知道五边形了.

不论是中文的“晶体”还是英文的“crystal”, 都与水的冰冻有关: 冰, 水之精也, 水精与水晶同<sup>1)</sup>; cryo-是冷冻, state 是状态. 不少矿物有四面体、立方体、八面体等外形, 深海中单细胞放射虫的骨架常显示出由 20 个三角形围成的二十面体[图 1(a)]和由 12 个五边形围成的十二面体[图 1(b)]的形状. 人类什么时候知道这 5 种正多面体? 由于历史久远, 很难说明确

\* 1995 年 8 月 9 日收到初稿, 1995 年 11 月 27 日收到修改稿.

1) 杜甫的著名诗篇《丽人行》中就有“水精之盘行素鳞”之句, 可见唐初还用“水精”二字.

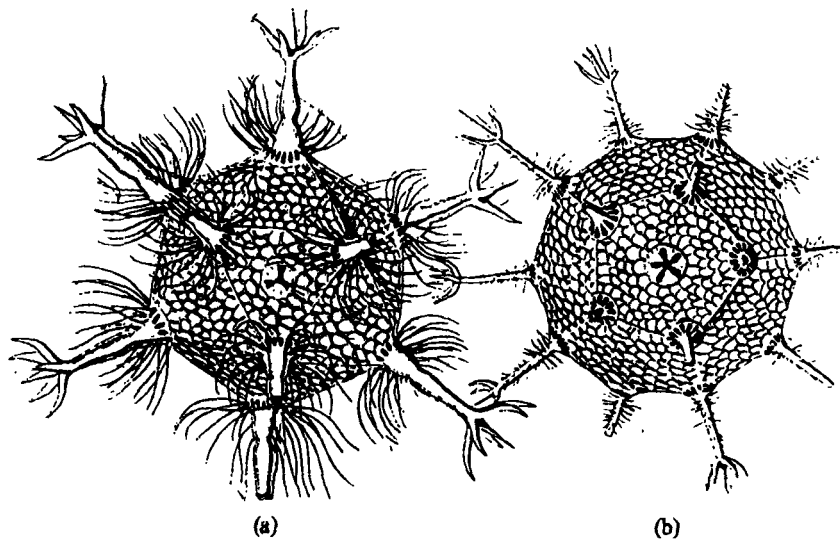


图1 放射虫骨架  
(a)三角二十面体; (b)五角十二面体

切年代。古埃及人在建造金字塔时肯定已经知道三角底的金字塔是四面体,古希腊人就称四面体为金字塔(phramid)。在苏格兰出土的新石器时代用硬石雕刻的5种正多面体球,在埃及出土的二十面体骰子和在意大利中部出土的伊特鲁里亚人(Etruscan)的五角十二面体骰子(可见赌博古已有之),显然都早于古希腊文化。

现在保存的有关正多边形和5种正多面体的最早记载是欧几里得(约公元前323—285年)的《几何原本》(Elements),以下简称《原本》。这部13册巨著原名《初探》(Stoicheia),这是欧几里得对直到那时为止的全部数学知识(不仅是几何)综合整理出的一个逻辑体系。它的前6册在1607年由意大利传教士“利玛窦口译,徐光启笔授”成中文时首先将Geometry(原意是土地(Geo)丈量(metry),源于古埃及人测量尼罗河水泛滥的范围)译成“几何”。利玛窦在《原本》的序中写明“几何家者,专察物之分限也。其分者若截以为数,则显物几何众也,若完以为度,则指物几何大也”。“曰原本者,明几何之所以然”。可见几何是从其研究对象的量的含义译出,而不是日本人林鹤一诡称的几何是Geo的中文音译。现在常见的《原本》英译本是由Heath从Heiberg整理出的希腊文本译出的<sup>[1]</sup>。

## 2 正多边形

《原本》中有关于圆及圆内一些正多边形的作图法,如第IV册命题[11]—[14]中的有关正五边形的顶的外接圆和边的内切圆。这册中的评注[2]明确指出,“此册是毕达哥拉斯学派的发现”。毕达哥拉斯(约公元前530—470年)及其追随者把数学研究与宗教教义渗合在一起,既是一个学派,也是一个兄弟会式的秘密组织。一切成就都属集体或其领袖。毕达哥拉斯逝世后,这个学派/兄弟会还活动了约200年。因此有时难于分清一个发现是毕达哥拉斯本人的还是这个学派(Pythagoreans)的。毕达哥拉斯学派一方面认为万物皆数,一方面认为圆是最美的。同时他们还特别垂青正五边形及五角星形(pentagram)。《原本》中第IV册中命题[11]记载的在圆内画正五边形ABCDE及其中五角星形(图2,《原本》中的原图仅缺BE对角线)的作图法就是毕达哥拉斯的贡献(具体作图法见艾鲍著、周民强译的《早期数学史选篇》<sup>[2]</sup>)。毕达哥拉斯学派就用这个五角星形作为他们的会徽,以便秘密联络[世界上有50多个国家(包括中国、美国、前苏联)的国旗中有五角星形,少的1

个,多的50个,可见并不仅是毕达哥拉斯学派钟爱这种对称性高而且可以一笔画就的图形]. 据说有一个毕达哥拉斯学派/兄弟会成员流落国外,临终前对服侍他的邻居说,只要把五角星形标记挂在门外,就会有人来询问. 果然,几年后有毕达哥拉斯学派/兄弟会成员路过此地,看到五角星形标记,前来问清情况后付了一笔不小的款项,作为对死者生前服侍的报酬. 从希腊出土的银币(博物馆编号 Kraaz M3)就有一个非常规整的正五角星形图案<sup>[3]</sup>. 这种银币曾在公元前500—300年前使用,说明五角星形在这之前就确已存在了.

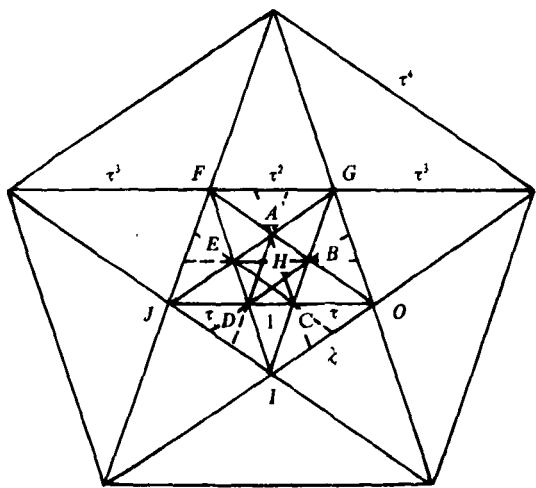


图2 五角星形

正五边形的对角线构成一个五角星形;ABCDE正五边形的边延长交于F,G,O,I,J点,构成一个大五角星形和膨胀了 $\tau^2$ 倍的正五边形FGOIJ(黄金数 $\tau = (1 + \sqrt{5})/2 = 1.61803\dots$ ).

### 3 正多面体

《原本》第Ⅷ册中讨论了5种正多面体,其中的第一个评注说“在此册中称为柏拉图体的5个图其实并不属于柏拉图. 5个图中的3个,即立方、四面体及十二面体,属于毕达哥拉斯学派,而八面体及二十面体属于 Theatetus”. 这是有关称为柏拉图多面体的5个正多面体(图3)

的最权威的论述. 在此之前,柏拉图(公元前427—327年)在他写的与 Temeaus 对话一书中曾有过关于5种正多面体的讨论,并且认为它们是构成万物的五要素的最小颗粒形状(实际上只有火、水、土、空气四要素,为了与5个多面体对应,把以太或宇宙也称为与正十二面体对应的要素). 后来, Heron(约公元60年)称这5个正多面体为柏拉图多面体,沿用至今.

数学史家们对谁先发现哪一种正多面体曾有过一些争论. 但是, Waterhouse<sup>[4]</sup>认为不必拘泥于这些具体情况,重要的是谁最先把对它们的零星的、个别的感性认识上升为整体的、系统的理性认识. 显然,这要归功于 Theatetus. 此人原属毕达哥拉斯学派,与柏拉图是同时代人,并在柏拉图办的学园(Akademie)中讲授几何学(学园大门上写有“不知几何者不得入内”的告示). 柏拉图是从他那里得到5种正多面体的知识并写进 Temeaus 一书的. 此书已失传,但有关正多面体的作图及只有5种正多面体的论证已写进《原本》中.

在正多面体中,不但多角面是相同的正多边形,多面角也是由相同的多角面围成的正多面角,如图3中正二十面体中的5个三角面相截的5个棱交于1个顶而形成的正五面角. 这第二个条件很重要,因为全同的正多边形并不总能构成一个正多面体. 如两个正四面体面对面地合在一起构成的由6个正三角面围成的六面体就不是正多面体. 因为除了原来的2个三面角外,新的多面角都是四面角. 由此可见,正多角面和正多面角全等是一个正多面体的充要条件,因此可用一个包含正 $m$ 角面和正 $n$ 面角的符号 $\{m, n\}$ 表征一个正多面体. 它的项可用 $m^n$ 表示,说明围绕这个顶有 $n$ 个 $m$ 角面. 这种符号首先由 Schläfli(1814—1895)使用,图3中的5种正多面体就用 $\{m, n\}$ 及 $m^n$ 注明.

### 4 等顶半正多面体

如果一种多面体中只有多角面是正多边形或者只有多面角是正多面角,称为半正多面体.

阿基米德(约公元前 287—212 年)首先推导出 13 种由正多角面构成的半正多面体,因此这种半正多面体常称为阿基米德多面体.阿基米德的原著已失传,Pappus 在公元 320 年出版了《汇编》(Collectanea),其中第 5 册重述了阿基米德

关于这 13 种半正多面体的原著.此书流传不广,后世知道阿基米德多面体主要是开普勒(1571—1630)在 1619 年出版的 Harmonices Mundi 一书中记载了这 13 种半正多面体,并予命名,延用至今<sup>[5]</sup>.

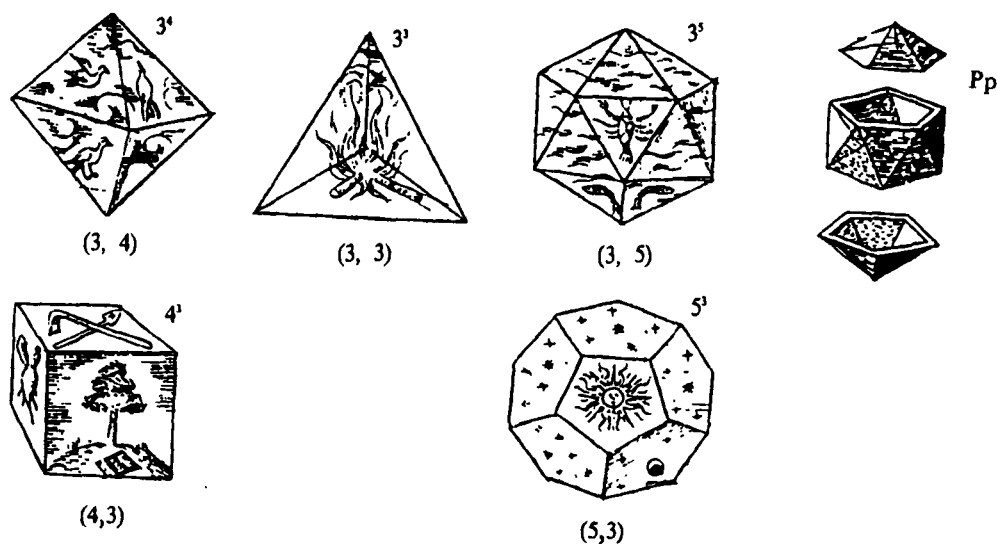


图 3 柏拉图多面体

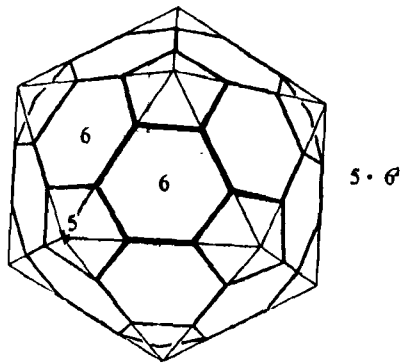
(开普勒在 1617 年绘制的柏拉图多面体;二十面体(Pp)

可以分解为上、下两个五角锥,中间一个五角反棱柱<sup>[5]</sup>)

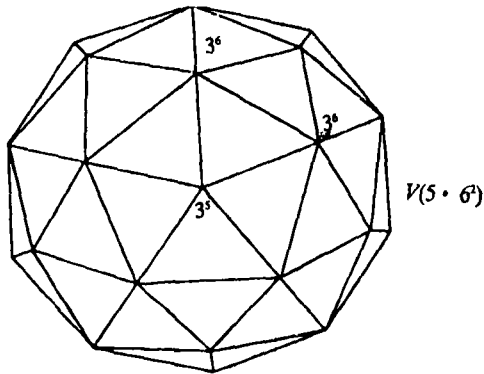
图 4(a)中粗线画的是一种由 12 个正五角面和 20 个正六角面组成的半正多面体.它的 32 个多角面都是正多边形,但不止一种.它的 60 个顶或多面角都是由 1 个正五角面和 2 个正六角面围成,不是正多面角,但全等,因此可用顶的 Schläfli 符号  $5 \cdot 6 \cdot 6 = 5 \cdot 6^2$  表征这种等顶半正多面体.阿基米德是将正二十面体[图 4(a)中细线]在棱的  $1/3$  处截顶得出这个半正多面体的.12 个五连结顶在截顶后变成 12 个正五角面,原来的 20 个正三角面截顶后变成 20 个正六角面.开普勒称这种半正多面体为截顶二十面体(在此之前,Piero della Francesca 在他写的有关 5 种正多面体一书中已绘制了截顶二十面体的图,后来在 1509 年译成意大利文.据说此图是达·芬奇所绘).其他 12 种阿基米德多面体也可用截顶方法从 5 种正多面体得出

[笛卡尔(1596—1650)也做过类似尝试,不过仅得出 11 种阿基米德多面体].

上面讲的有关正多面体和等顶半正多面体的发现都是 2000 多年前古希腊文明的光辉成就,用柏拉图和阿基米德的名字来命名这两类多面体就充分说明了这一点.随着希腊被占领和后来的黑暗时代,多面体的发展中断了 1000 多年,直到文艺复兴才首先由一些绘画大师如达·芬奇(1452—1519),A. Durer(1471—1528)重新研究这些多面体及有关的问题,如黄金分割.接着开普勒对多面体的发展做了重要的贡献.我们已经两次提到了这位伟大的天文学家,一次是图 1 中的 5 种多面体是他绘制的,一次是他重新导出 13 种阿基米德多面体,并予以命名.他从小爱好数学,又信奉哥白尼的日心说,在青年时曾试图把柏拉图正多面体与太阳



(a)



(b)

图4 多面体的截顶与加锥

(a)从正二十面体截顶得出的五角面-六角面三十二面体(截顶二十面体),60个顶都是 $5 \cdot 6^2$ 顶;

(b)五角十二面体的正五角面上加五角锥得出的三角面六十面体,每个三角面的顶分别是 $3^5, 3^6, 3^6$ .这个等面半正多面体与 $5 \cdot 6^2$ 等顶半正多面体对偶,

记为 $V(5 \cdot 6^2)$

系各行星绕太阳运动联系在一起(图5).立方体的外接球与内切球的半径比是 $\sqrt{3}$ ,这与土星与木星绕太阳运行的圆形轨道的半径比差不多(当时是1595年,开普勒还没有发现椭圆轨道).开普勒认为这个外接球的赤道就是土星运行的轨道,内切球的赤道是木星运行的轨道.这个内切球又是一个正四面体的外接球.对于正四面体而言,其外接球与内切球的半径比是3,这与木星与火星绕太阳运行的圆形轨道的半

径比差不多.开普勒认为正四面体的内切球的赤道是火星的运行轨道.照此类推,里面相继是正十二面体、正二十面体和正八面体,它们的内切球的赤道分别是地球、金星和水星的运行轨道.这些想法显然是不正确的.但是没有这些把数学与天文学联系在一起的冥思苦想,可能也就没有开普勒后来总结出的行星运动三大定律.

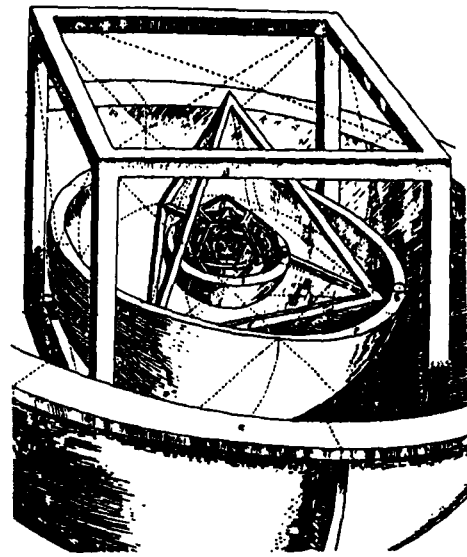


图5 开普勒早年(1595)的太阳系结构

(各行星运行的轨道在5种正多面体的外接球和内切球的赤道上)

除了发展柏拉图有关正多面体的哲学概念和重新推导了阿基米德多面体外,开普勒还发现了两种星状十二面体(图6中 $S_s$ ,在五角十二面体的12个五角面上长出长五角锥; $T_t$ ,在每个三角面上长出长三角锥),一种星状八面体(在8个三角面上长出8个三角锥),以及菱形十二面体及菱形三十面体[在图6中分别用 $V((3 \cdot 4)^2)$ 及 $V((3 \cdot 5)^2)$ 标明].后两种多面体属等面半正多面体,它们的多面角都是正多面角,但不全等[如图6中的 $V((3 \cdot 5)^2)$ 多面体,有五面角也有三角角];它们的多面角全等,但不是正多边形.菱形十二面体及菱形三十面体也称为开普勒多面体.

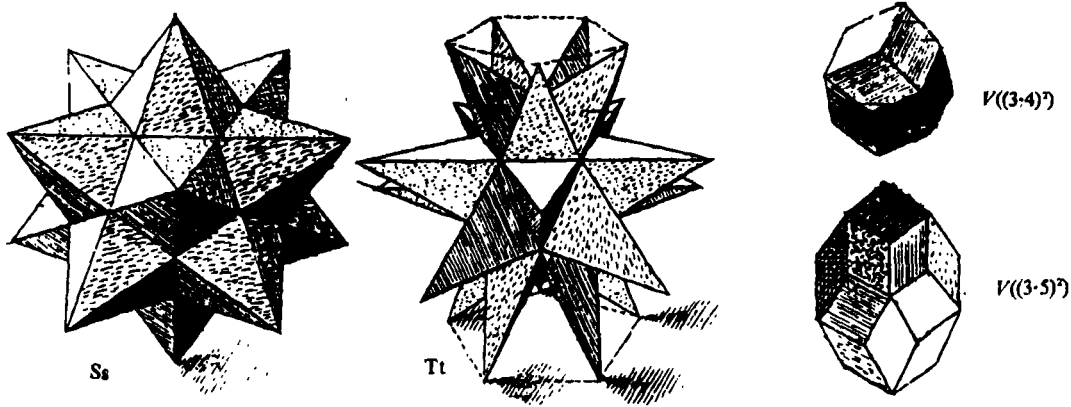


图6 开普勒发现的多面体  
 [开普勒发现的星状十二面体(Ss及Tt), 菱形十二面体  
 $V((3 \cdot 4)^2)$  及菱形三十面体  $V((3 \cdot 5)^2)$ ]

## 5 等面半正多面体

等面半正多面体可从正多面体截顶得出, 相反, 等面半正多面体可从正多面体加顶得出. 从图7(a)可以看出, 在立方体的6个四角面上加正四角锥, 就会得到一个由24个相同三角面构成的二十四面体, 称为四六面体或四重六面体(立方体又称正六面体). 所有多面角都是正多面角, 新加的顶是 $3^4$ 顶, 而原来的 $4^3$ 顶变成了 $3^6$ 顶. 显然这是一种三角面半正多面体. 如果新加的四角锥锥角合适, 在这个立方体的棱两侧的三角面在一个平面上, 新生成的等面半正多面体就是一个菱形十二面体, 新增加的顶仍是 $3^4$ 顶, 而原来的 $4^3$ 顶符号不变, 但内容与前不同. 显然, 这个菱形十二面体也可以由八面体的正三角面上加三角顶得出[图7(b)]. 由图7不难看出, 菱形十二面体中菱形的长短对角线之比是 $\sqrt{2}$ .

同理, 在正十二面体的正五角面上加正五角锥可以得出由60个三角面构成的五重十二面体[图4(b)]. 原有的20个 $5^3$ 顶变成 $3^6$ 顶, 新加12个 $3^5$ 顶, 共32个顶. 可用 $V(5 \cdot 6^2)$ 代表这个等面半正多面体. 如果五角锥的锥角合

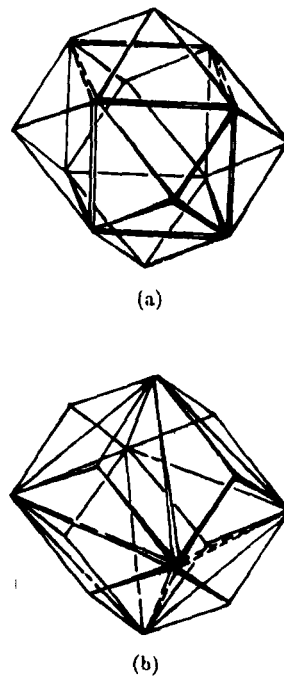


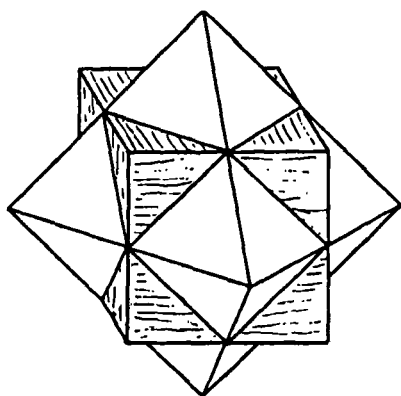
图7 菱形十二面体  
 (a)在立方体的四角面上加四角锥;  
 (b)在正八面体的三角面上加三角锥

适, 十二面体的棱的两侧的2个三角面合二为一, 就会生成一个菱形三十面体[图6中的 $V((3 \cdot 5)^2)$ ], 不过这个菱形的长、短对角线

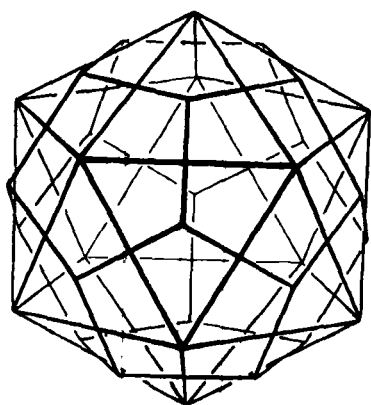
的比是  $\tau = (1 + \sqrt{5})/2$ . 通过加顶的作法可以得出 13 种等面半正多面体.

比较图 4(a) 的  $5 \cdot 6^2$  等顶半正多面体与图 4(b) 的  $V(5 \cdot 6^2)$  等面半正多面体的面数 ( $F$ )、顶数 ( $V$ )、棱数 ( $E$ ) 的关系 (见下表). 显然, 这两类半正多面体的面、顶数目不但有互换关系, 并且有互相对应的关系, 称为对偶. 其实这种对偶关系在正多面体中就存在, 从正八面体与立方体的符号  $\{3, 4\}$  及  $\{4, 3\}$  就可以看出

	$F$	$V$	$E$
$5 \cdot 6^2$	32(12 个正五角面 + 20 个正六角面)	60(三角顶)	90
$V(5 \cdot 6^2)$	60(三角面)	32(12 个正五角顶 + 20 个正六角顶)	90



(a)



(b)

图 8 对偶多面体

(a) 立方体与正八面体对偶;

(b) 正十二面体与正二十面体对偶

它们有对偶关系. 从图 8(a) 可见正八面体的  $3^4$  顶从立方体的正四角面长出, 而立方体的  $4^3$  顶从正八面体的正三角面长出, 两个多面体的棱正交并等分, 数目不变, 这些棱有一个共同的内切球, 在它们的交点内切. 把这两个对偶正多面体的顶连接起来即是一菱形十二面体. 同理, 正十二面体  $\{5, 3\}$  与正二十面体  $\{3, 5\}$  也有对偶关系 [图 8(b)], 它们的顶合起来即是菱形三十面体的顶. 正四面体  $\{3, 3\}$  与自己对偶.

对偶是一种比较抽象的概念, 古希腊时不可能产生, 就是到了 17 世纪, 开普勒一方面重新推导出 13 种等顶半正多面体, 一方面又发现了两种等面半正多面体, 他也没有想到其中的对偶关系. 倒易点阵与正点阵也是一种对偶关系, 一般认为是厄瓦耳德 (Ewald) 在 1912 年发现的, 其实布喇菲 (Bravais) 早在 19 世纪中叶就首先引入了倒易点阵概念, 没有引起人们的重视, 厄瓦耳德只不过是再发现而已. 可见对偶概念在 19 世纪中叶在法国已经成熟了. 法国数学家 Catalan (1814—1894) 在 1865 年根据对偶性系统地推导出 13 种等面半正多面体, 与 13 种等顶半正多面体一一对应.  $V(5 \cdot 6^2)$  是与  $5 \cdot 6^2$  等顶半正多面体对偶的等面半正多面体,  $V$  表示顶 (Vertex) 是正多角顶.  $V(5 \cdot 6^2)$  表示三角面的三个顶分别是一个正五角顶和两个正六角顶 [见图 4(b)].

A. F. Wells<sup>[6]</sup> 称等面半正多面体为 Catalan 多面体, 这可能并不恰当, 因为在 Catalan 之前德国的晶体学家 J. F. C. Hessel 在 1830 年从晶体生长形貌的角度得出与 32 个晶类对应的 32 个点对称群的同时, 推导出这 13 种等面半正多面体. 他的这些结果收录在 Gehler 编的《物理学词典》中, 流传不广, 后来在 1897 年重新单独发表<sup>[7]</sup>. 其实这 13 种等面半正多面体中有 7 种属于立方晶系的晶形多面体, 另外 6 种由正十二面体或正二十面体导出, 由于包含有五次旋

转对称,不可能是晶体的生长形态<sup>[8]</sup>.在1984年发现二十面体准晶后,已陆续观察到二十面体、五角十二面体、菱形三十面体等生长形态.Hessel早在1830年就把这些非晶体学晶形都阐述清楚,不能不说是很有远见的.

有人不免要问,为什么等面半正多面体的发现比等顶半正多面体晚了2000多年呢?一个可能的解释是等顶半正多面体的多角面都是正多边形,比较直观,容易想到,而等面半正多面体的多角面大都是畸形,不容易想到.只有菱形还比较规整,因此这两种菱形多面体发现的也较其他等面半正多面体早一些.

## 6 欧拉公式

欧拉(1707—1783)大约在1750年总结出有关多面体的面数( $F$ )、顶数( $V$ )、棱数( $E$ )间的定量关系,即欧拉公式或欧拉定理:

$$F + V = E + 2 \quad (1)$$

这仅适用于凸多面体.前面已经提到,一对对偶多面体的面、顶互换,根据(1)式,棱数 $E$ 不变.

由于正多面体及半正多面体数目有限, $F$ , $V$ , $E$ 的关系比较简单清楚.对于下面讲到的三角面多面体及五角面—六角面多面体,由于 $F$ , $V$ , $E$ 不但数目大,并且种类繁多,需要经常用欧拉公式进行分析.

欧拉首先是在1750年在给哥德巴赫的一封信中谈到这个多面体公式,后来在1752/1753年正式发表,但他本人未给出证明<sup>[9]</sup>.这个公式发表后,许多数学家都给出他们各自的证明,最早的是拉格朗日(1794年).笛卡尔在欧拉之前也研究过多面体,并且给出与此公式只差一步的一个公式,但这一步却是最关键的一步,从而与此公式无缘<sup>[10]</sup>.

## 7 三角面多面体

正四面体、正八面体和正二十面体都是由

正三角面围成的正多面体.此外还有用正三角面围成的六面体、十面体、十二面体、十四面体及十六面体等凸多面体.加在一起共8种三角面多面体,无正三角面组成的十八面体.正二十面体是正三角面数最多的三角面多面体.

如无正三角面的限制,则三角面多面体可以有无穷个.首先考虑二十四面体.如图3中 $P_p$ 所示,二十面体可分解为上、下两个取向相反的由三角面构成的五角锥,中间由10个三角面构成的五角反棱柱(上、下五角面取向相反).如果将上、下五角锥改成六角锥(显然每个六角锥的6个三角面在锥顶的内角和要小于 $360^\circ$ ),同时要将五角反棱柱改成六角反棱柱.这样就构成一个由24个三角面围成的二十四面体,在上、下两个锥顶有2个 $3^6$ 顶,中间有12个 $3^5$ 顶,共14个顶.二十面体中心的原子到12个顶的原子的配位数是12.三角面二十四面体中心原子到14个顶的原子的配位数是14.此外,还有配位数为15(3个 $3^6$ 顶)及16(4个 $3^6$ 顶)的三角面多面体.这些配位多面体在密堆合金相中经常出现,称为Kasper多面体,这种四面体密堆合金相称为Frank-Kasper相<sup>[11]</sup>.

三角面多面体中心与面上的一个三角面的3个顶构成四面体,如二十面体可以看作是20个四面体以共一个顶的方式拼在一起的三角面多面体.因此Frank-Kasper相也称为四面体密堆相<sup>[12]</sup>.Pauling等首先用四面体密堆原理分析这种合金相结构,见图9<sup>[13]</sup>.这些三角面多面体在液体、非晶态及准晶结构的讨论中也经常遇到.Frank首先指出液体中有大量的二十面体团簇存在<sup>[14]</sup>.Nelson等进一步发挥了这种概念,并将其扩大到非晶态结构<sup>[15]</sup>.在配位数为12(二十面体)的基体中还有无规则分布的配位数为14、15及16的一些三角面多面体原子团簇.在晶化过程中,这些配位多面体原子团簇呈有序分布,构成晶体.图4(b)的 $V(5 \cdot 6^2)$ 多面体与图9(d)一样,都有60个三角面,20个 $3^6$ 顶,12个 $3^5$ 顶,共32个顶.三角面越多, $3^6$ 顶也就越多,但 $3^5$ 顶总是12个.这可由欧拉公式证明.



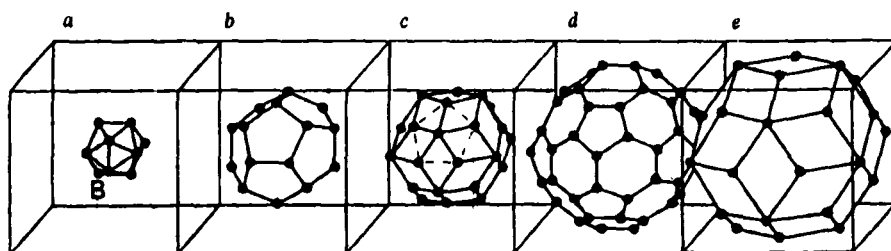


图9 体心立方 $Mg_{32}(Al, Zn)_{49}$ 四面体密堆结构模型<sup>[13]</sup>

- (a)在体心立方中心的二十面体的12个顶有12个原子;  
 (b)在20个三角面上放20个原子,构成五角十二面体;  
 (c)在12个五角面中心偏上处放12个原子,构成菱形三十面体或由60个三角面围成的六十面体;  
 (d)在60个三角面上放60个原子,构成由12个五角面和20个六角面围成的截顶二十面体;  
 (e)再在五角面和六角面中心偏上处放置原子,构成一个大的菱形三十面体

令  $V_5$  与  $V_6$  分别表示  $3^5$  及  $3^6$  顶的数目,则

$$V = V_5 + V_6$$

$$2E = 5V_5 + 6V_6$$

$$3F_3 = 5V_5 + 6V_6$$

因为,从  $V_5$ ,  $V_6$  计算棱数  $E$  时,每个棱重复计算了2次;在从棱数  $E$  计算三角面数  $F_3$  时,一方面每个棱共2个三角面,另一方面每个三角面有3个棱.代入欧拉公式并整理得:

$$V_5 = 12 \quad (2)$$

换句话说,三角面多面体的  $3^5$  顶总是12个.  $3^6$  顶不能为1,却可以是大于1的任意整数.将  $V_5 = 12$  代入  $3F_3 = 5V_5 + 6V_6$  得

$$F_3 = 20 + 2V_6 \quad (3)$$

即每增加一个  $3^6$  顶就增加2个三角面.

三角面多面体除了在晶体的密堆结构(四面体堆积密度最高)中得到广泛应用外,还在三角网壳层(二十面体病毒衣壳及圆顶建筑,如座落在北京市北三环中路的中国科学技术馆的穹幕电影馆)中经常遇到.详见数学家 Coxeter 的有关论述<sup>[16]</sup>.

## 8 五角面-六角面多面体

正十二面体由12个正五边形围成.已经

证明,由五角面与六角面围成的多面体,六角面可以是大于1的任意整数.如六角面数  $F_6 = 2$ ,则上、下两个取向相反的六角面与中间12个五角面围成一个六角反棱柱,共14个多角面.24个三连结顶中12个是  $5^2 \cdot 6$ ,12个是  $5^3$ .这个多面体与图7中的三角二十四面体有对偶关系.全碳分子  $C_{24}$  的24个碳原子就坐落在这个多面体的24个并不全等的顶处.

图4(a)的  $5 \cdot 6^2$  半正多面体(又称截顶二十面体)有12个正五角面和20个正六角面,很接近球形.足球就是用12块五角黑皮块和20块六角白皮块缝成的.这个多面体有60个全等的  $5 \cdot 6^2$  顶,近来发现的全碳分子  $C_{60}$  的60个碳原子就分布在这个阿基米德多面体的60个全等  $5 \cdot 6^2$  顶处<sup>[17]</sup>,不少人称它是对称性最高而又最美的分子<sup>[18]</sup>.

这种五角面与六角面围成的多面体的特征是所有顶都是三连结顶,不外乎  $5^3$ ,  $5^2 \cdot 6$  和  $5 \cdot 6^2$ ,与三角面多面体有对偶关系.令  $F_5$  与  $F_6$  分别表示五角面和六角面的数目,则

$$F = F_5 + F_6$$

$$2E = 5F_5 + 6F_6$$

$$3V_3 = 5F_5 + 6F_6$$

代入欧拉公式得：

$$F_5 = 12 \quad (4)$$

$$V_3 = 20 + 2F_6 \quad (5)$$

换句话说，五角面-六角面多面体中的五角面总是 12 个，六角面数可以是大于 1 的任意整数。每增加一个六角面就增加 2 个三连结点。根据两个对偶多面体的面、顶互换关系，公式(4)、(5)也可由公式(2)、(3)直接导出。对于各种由五角面-六角面构成的富勒烯全碳分子笼的数学推导及计算见文献[19]。

上面简单介绍了一些常见的凸多面体，既不严谨，也不全面。《中国大百科全书》数学卷中，为了定义“多面体”一词用了二百七十多个字，先讲由多角面构成的多面体，然后再说多面体是一种封闭的多面体。由此可见，多面体研究的对象不是这个体的本身，而是这个体的表面上的面、棱、顶的几何关系(从这个角度看，多面体的“体”字容易引起误解)。以截顶二十面体[图 4(a)]为例，这是一个由 12 个正五角面与 20 个正六角面围成的三十二面体，它有 60 个全等的  $5 \cdot 6^2$  顶，90 个棱，属等顶半正多面体。不仅如此，每个五角面由 5 个六角面包围，五角面之间无接触。至于这个多面体里面是什么，这不是多面体几何的内容。

多面体结构是研究以多面体为基础的各种结构。以图 10(a)为例，不考虑那些空心 and 实心圆圈，这是一个  $5 \cdot 6^2$  等顶半正多面体或截顶二十面体。60 个碳原子(空心圆圈)对称的分布在这 60 个全等的顶上就构成  $C_{60}$  全碳分子笼，这是一种中空的结构[17]。另一方面  $B_{84}$  结构单元也有截顶二十面体外形，不过不是中空的[20]。表面上 60 个硼原子(空心圆圈)构成一个由 12 个正五角面与 20 个正六角面组成的多面体，里面有 12 个硼原子(实心圆圈)与表面上的硼原子构成 12 个五角锥，中心还有 12 个硼原子构成一个正二十面体(未画出)，并且与这 12 个五角锥相接。图 10(b)是建筑师富勒(Buckminster Fuller)设计的由正五边形与正六边形框架构成的半个截角二十面体圆顶建筑，为了加强它的刚度，五边形和六边形中间都加

梁变成不全等的三角形框架。保持五边形的数目不变，增加六边形数目，目前已建造出直径上百米的大型圆顶建筑，作为仓库、兵营、展览馆等[21]。

多面体几何不但在与晶体学有关的凝聚态物理、固体化学、材料科学、矿物学中非常重要，在病毒的球状衣壳[22]及圆顶建筑[21]方面的应用也日益引起人们的重视。愿意多了解一些有关多面体几何的读者，可参考有关书籍[23-29]。

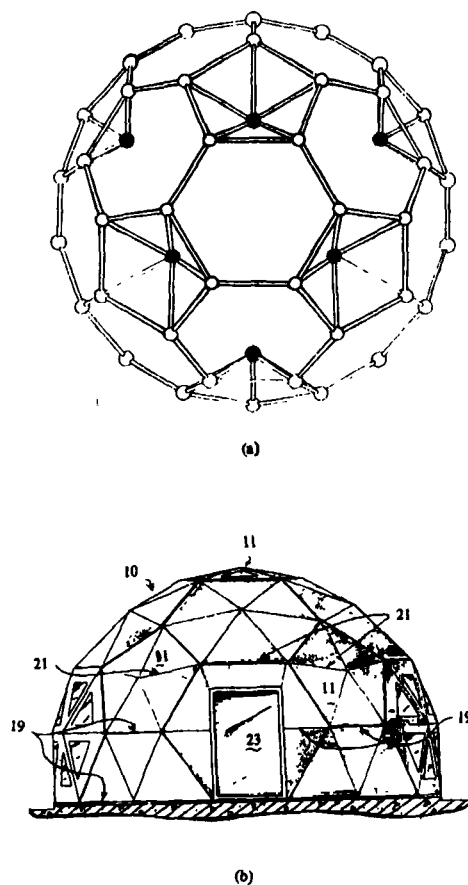


图 10 多面体的应用

- (a)  $5 \cdot 6^2$  等顶半正多面体或截顶二十面体；
- (b) 由正五边形和正六边形框架(半个截角二十面体)构成的圆顶建筑[21]

## 参 考 文 献

- [ 1 ] T. A. Heath, The Thirteen Books of Euclid's Elements, Cambridge Univ. Press, (1908).
- [ 2 ] 艾鲍著,周民强译,早期数学史选编,北京大学出版社,(1990).
- [ 3 ] B. Altermann, *math. Intelligencer*, 12-4(1990), 43.
- [ 4 ] W. C. Waterhouse, *Arch. Hist. Exact. Sci.*, 9(1972), 212.
- [ 5 ] J. Kepler, Harmonices Mundi, J. Plancus et al., *Math. Intelligencer*, 17-3(1995), 23.
- [ 6 ] A. F. Wells, Three Dimensional Nets and Polyhedra, Wiley, (1977).
- [ 7 ] J. F. C. Hessel, Krystallogetrie, Engelmann, (1897).
- [ 8 ] W. Nowacki, *Z. Kristallogr.*, 86(1933), 19.
- [ 9 ] J. Makevitch, Shaping Space, A Polyhedral Approach, eds. M. Senechal and G. Fleck, Birkhäuser, (1988), 80.
- [ 10 ] P. J. Federico, Descartes on Polyhedra, Springer, (1982).
- [ 11 ] F. C. Frank and J. S. Kasper, *Acta Crystallogr.*, 11(1958) 184; 12(1959), 483.
- [ 12 ] C. B. Shoemaker and D. P. Shoemaker, *Acta Crystallogr.*, 16(1963), 997; 23(1967), 231.
- [ 13 ] G. Bergman, J. L. T. Waugh and L. Pauling, *Acta Crystallogr.*, 169(1952), 1057.
- [ 14 ] F. C. Frank, *Proc. Roy. Soc. London A*, 215(1952), 43.
- [ 15 ] D. R. Nelson, *Phys. Rev. B*, 28(1983), 5515.
- [ 16 ] H. S. M. Coxeter, A Spectrum of Mathematics, ed. J. C. Butcher, Oxford Univ. Press, (1971), 98.
- [ 17 ] H. W. Kroto, J. R. Heath, S. C. O'Brien et al., *Nature (London)*, 318(1985), 162.
- [ 18 ] J. Baggott, Perfect Symmetry, The Accidental Discovery of Buckminsterfullerene, Oxford Univ. Press, (1994).
- [ 19 ] C.-H. Sah, *Croat. Chem. Acta*, 66(1993) 1; B. Kostant, *Proc. Natl. Acad. Sci.*, 91(1994) 11714; P. W. Fowler and D. E. Manolopoulos, An Atlas of Fullerene, Oxford Univ. Press (1995).
- [ 20 ] J. Donohue, The Structure of Elements, Wiley, (1974) 61.
- [ 21 ] R. W. Marks, The Dymaxion World of Buckminster Fuller, Reinhold, (1960).
- [ 22 ] D. L. D. Caspar and A. Klug, *Cold Spring Harbor Symp. Quant. Biol.*, 27(1962), 1.
- [ 23 ] M. Brückner, Vielecke und Vielfache, Teubner, (1900).
- [ 24 ] L. Lines, Solid Geometry, Dover, (1965).
- [ 25 ] H. S. M. Coexter, Introduction to Geometry, Wiley, (1965).
- [ 26 ] H. S. M. Coexter, Regular Polytopes, Dover, (1973).
- [ 27 ] A. Pugh, Polyhedra, A Visual Approach, Univ. Calif., (1976).
- [ 28 ] P. Pearce and S. Pearce, Polyhedra Primer, Nostrand, (1978).
- [ 29 ] H. M. Cundy and A. P. Rollet, Mathematical Models, Oxford Univ. Press, (1961).

## 有机光电磁功能材料\*

刘云圻 刘升高 朱道本

(中国科学院化学研究所,北京 100080)

**摘 要** 有机光电磁功能材料是新一代材料.文章简要介绍了有机半导体、光导体、光致变色与电致变色材料、有机非线性光学材料、有机导体、超导体、导电高分子,以及有机铁磁材料和有机分子电子器件.

**关键词** 有机固体,功能材料,分子器件

**Abstract** Organic photo-electro-magnetic functional materials are a new generation of materials. A brief review is presented of organic semiconductors, photoconductors, photoluminescent and electroluminescent materials, organic non-linear optical materials, or-

\* 1995年5月18日收到初稿,1995年6月30日收到修改稿.