

量子信息讲座

第五讲 量子克隆与量子复制^{*}

郭光灿 段路明

(中国科学技术大学物理系,非线性科学中心,合肥 230026)

摘要 量子态不可克隆体现了量子力学的固有特性,它是量子信息科学的重要基础之一.文章简要介绍了量子不可克隆定理的物理内容以及量子复制机的基本原理,通过么正坍缩过程我们构造了一种概率量子克隆机,并论证所有线性无关的量子态都可以被概率量子克隆机克隆.

关键词 量子不可克隆定理,量子复制机,概率量子克隆机,么正坍缩过程

QUANTUM CLONING AND QUANTUM COPYING

Guo Guangcan Duan Luming

(Department of Physics and Nonlinear Science Center,
University of Science and Technology of China, Hefei 230026)

Abstract No - cloning of quantum states is an intrinsic property of quantum mechanics , and plays an important role in quantum information theory. We review the quantum no - cloning theorem and the principle of the quantum copying machine. We construct a probabilistic quantum cloning machine by a unitary - reduction process and show that all the linearly independent quantum states can be cloned by this machine in a probabilistic fashion.

Key words quantum no - cloning theorem , quantum copying machine , probabilistic quantum cloning machine , unitary - reduction process

1 量子不可克隆定理

自从克隆羊“多莉”问世以来,克隆一词已家喻户晓.人人都在谈论克隆爱因斯坦和克隆希特勒是否可能,人们进一步关注这样一个根本性问题,即克隆技术是否万能.量子力学中有一个基本定理告诉我们,一个未知的量子态不可以克隆,这就是量子不可克隆定理,它限定了克隆技术的适用范围.

早在1982年,Wootters和Zurek就在英国著名刊物《自然》上发表了一篇短文,题目为“单个量子不可能被克隆”^[1].这篇论文在发表后

相当长的时间内并未引起人们足够的重视,只是近年来随着信息科学的迅猛发展,人们才体会到该论文的重要性,并重新激发起研究量子克隆的热情.

W - Z的论文提出这样一个问题,是否存在一种物理过程,实现对一个未知量子态的精确复制,使得每个复制态与初始量子态完全相同?该文证明,量子力学的线性特性禁止这样的复制,这就是量子不可克隆定理的最初表述.

量子不可克隆定理的证明很简单.以两态

^{*} 国家教委博士点基金资助项目

1997 - 11 - 24 收到初稿,1998 - 07 - 17 修回

量子系统为例,其基矢选为 $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$,设 $|s\rangle$ 代表此二维空间任意量子态,量子克隆过程可以表示为

$$|s\rangle|Q_x\rangle|s\rangle|s\rangle|\bar{Q}_s\rangle_x, \quad (1)$$

式中右端 $|s\rangle|s\rangle$ 表示初始模和复制模均处于 $|s\rangle$ 态, $|Q_x\rangle$ 和 $|\bar{Q}_s\rangle_x$ 分别为装置在复制前后的量子态,复制后装置的量子态 $|\bar{Q}_s\rangle_x$ 可能依赖于输入态 $|s\rangle$.假如存在(1)式的变换,那么对基矢 $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$ 应该分别有

$$|0\rangle|Q_x\rangle|0\rangle|0\rangle|\bar{Q}_0\rangle_x, \quad (2-a)$$

$$|1\rangle|Q_x\rangle|1\rangle|1\rangle|\bar{Q}_1\rangle_x. \quad (2-b)$$

现假定 $|s\rangle$ 是一个任意的叠加态,即

$$|s\rangle = |0\rangle + |1\rangle, |s\rangle|s\rangle|s\rangle = 1, \quad (3)$$

由(2)式及量子操作的线性特征,不难得到在操作后, $|s\rangle$ 将演变为

$$|s\rangle|Q_x\rangle = (|0\rangle + |1\rangle)|Q_x\rangle \\ |0\rangle|0\rangle|\bar{Q}_0\rangle_x + |1\rangle|1\rangle|\bar{Q}_1\rangle_x. \quad (4)$$

如果复制机的态 $|\bar{Q}_0\rangle_x$ 与 $|\bar{Q}_1\rangle_x$ 不恒等,那么上式给出的初始模和复制模均处于 $|0\rangle$ 与 $|1\rangle$ 的混合态;如果态 $|\bar{Q}_0\rangle_x$ 与 $|\bar{Q}_1\rangle_x$ 恒等,则初始模和复制模将处于纠缠态 $|0\rangle|0\rangle + |1\rangle|1\rangle$.无论哪种情况,初始模和复制模都不可能处于直积态 $|s\rangle|s\rangle$.因此如果一个量子复制机能精确复制态 $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$,则它不可能复制两态的叠加态 $|s\rangle$,此即量子不可克隆定理的内容.

量子态不可克隆是量子力学的固有特性,它设置了一个不可逾越的界限.量子不可克隆定理是量子信息科学的重要理论基础之一.量子信息是以量子态为信息载体(信息单元).量子态不可精确复制是量子密码术的重要前提,它确保了量子密码的安全性,使得窃听者不可能采取克隆技术来获得合法用户的信息.鉴于这个定理的重要性,近年来人们对它作了进一步的研究,揭示出更丰富的物理内涵^[2-5].

在W-Z的证明中,假设了输入态是完全未知的.但在实际情况中,我们往往知道输入态属于一个确定的态集合.例如在基于非正交态的量子密码术中,输入态是两个非正交态的其

中之一^[6,7].W-Z的证明基于量子叠加原理,该证明行之有效至少需要3种可能的输入态,如上面的 $|0\rangle$, $|1\rangle$ 及 $|0\rangle + |1\rangle$,因此它没有排除克隆两个量子态的可能性.文献[3,4]推广了量子不可克隆定理,使之适用于两态情况,指出如果克隆过程可以表示为一么正演化,则么正性要求两个态可以被相同的物理过程克隆,当且仅当它们相互正交,亦即非正交态不可以克隆.该结果的证明很简单.设两个态 $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$ 同时被一么正过程 U 所克隆,即

$$U(|0\rangle|Q_x\rangle) = |0\rangle|0\rangle|\bar{Q}_0\rangle_x, \quad (5-a)$$

$$U(|1\rangle|Q_x\rangle) = |1\rangle|1\rangle|\bar{Q}_1\rangle_x, \quad (5-b)$$

其中 $|Q_x\rangle$, $|\bar{Q}_0\rangle_x$, $|\bar{Q}_1\rangle_x$ 均为归一化的量子态.(5-a)和(5-b)式的内积给出

$$\langle 0|_1 \langle 0|_1 \\ = \langle 0|_1 \langle 1|_1 \cdot \langle 0|_1 \langle 1|_1 \\ \leq \langle 0|_1 \langle 1|_1, \quad (6)$$

当且仅当 $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$ 相互正交时,上式成立,此即推广的量子不可克隆定理.该结果在量子密码术中有重要应用,我们知道,一个简单的量子密码方案就是随机地传送两个非正交的量子态^[6,7],正因为非正交态不可克隆,所以窃听者无法窃取信息^[8].

适用于两态的量子不可克隆定理经文献[5]进一步推广到混合态情况,并证明了一个更强的定理,文献中称为量子不可播送定理.设系统 A 处于两个可能的混合态 $\{\rho_0, \rho_1\}$ 中的一个, ρ_0, ρ_1 为密度算符,如果要将系统 A 的态克隆到系统 B 上,则演化后系统 AB 的态应为 $\rho_s \otimes \rho_s$,其中 $s=0,1$.但量子播送的要求更弱,记演化后系统 AB 的态为 $\tilde{\rho}_s$,量子播送只要求

$$tr_A(\tilde{\rho}_s) = \rho_s, tr_B(\tilde{\rho}_s) = \rho_s, \quad (7)$$

其中 tr_A, tr_B 表示对系统 A, B 求迹.因此量子播送只要求系统 AB 的约化态与演化前系统 A 的态一致.量子不可播送定理指出,两个混合态经过么正演化可以被量子播送,当且仅当它们相互对易.该定理是量子不可克隆定理的强化,

当 $|0\rangle, |1\rangle$ 表示纯态时,显然量子不可播送定理回到两态的量子不可克隆定理.

2 量子复制机

量子不可克隆定理断言,非正交态不可以克隆,但它并没有排除非精确克隆即复制量子态的可能性.现在文献大多同时用到术语量子克隆和量子复制,两者含义的差别为,一般前者指精确复制,而后者允许输出态与输入态有一定偏差.最近,量子复制引起人们很大兴趣^[9-14],研究的中心问题是寻找最佳的量子复制机,尽可能精确地复制所有输入态.

为了表征量子复制机的性能,必须引入描述输入态和输出态接近程度的物理量.有许多物理量能满足这个要求,其中最简单的有两个:一个是施密特距离(Schmit distance),另一个是态的保真度(fidelity).两个态之间的施密特距离 D 定义为

$$D = \text{tr}[(\rho_a - \rho_b)^2], \quad (8)$$

其中 ρ_a, ρ_b 为两态对应的密度算符,该距离的性质在文献[15]中有详细描述.近期文献中更常用的是态的保真度^[16],设输入态为 $|\rho\rangle$,输出态为 $|\sigma\rangle$,则保真度 F 定义为

$$F = \langle \rho | \sigma \rangle. \quad (9)$$

W-Z证明中描述的物理过程显然也可以当作一种量子复制机,该复制机精确复制态 $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$,但对于它们的叠加态,复制效果则很差.现在的研究目标多为寻找一种通用量子复制机,其复制效果不依赖于输入态的形式.

二维空间一般的量子变换可以写为

$$|0\rangle |Q\rangle_x = \sum_{k,l=0}^1 |k\rangle |l\rangle |\overline{Q}_{kl}\rangle_x, \quad (10-a)$$

$$|1\rangle |Q\rangle_x = \sum_{m,n=0}^1 |m\rangle |n\rangle |\overline{Q}_{mn}\rangle_x, \quad (10-b)$$

式中左边的 $|0\rangle, |1\rangle$ 表示输入模的态,右边的 $|k\rangle |l\rangle$ 和 $|m\rangle |n\rangle$ 表示输出模的态,复印机的态 $|\overline{Q}_{mn}\rangle_x$ 不一定要求正交归一.一般地讲,这

个复制变换是相当复杂的,它包含许多可供自由选择的参数 $\langle \overline{Q}_{kl} | \overline{Q}_{mn} \rangle_x$,这些参数决定了该复制机的性能.换句话说讲,通过选取不同的参数,我们可以设计出性能不同的量子复制机.文献[9]选择了一组合适的参数,使得量子复制机的性能与输入模的态无关,且两个输出模的态完全相同,但不等于输入模的态.这表明输入态在复制过程中不可避免地遭到破坏.该文选择的一组最佳参数使得这种破坏达到最小程度,并证明,输入、输出态之间的保真度最高可以达到 $5/6$.

以上考虑的是一个输入模、两个输出模的复制机,文献[14]考虑了更一般的量子复制机,它具有 N 个处于相同态的输入模和 M 个 ($M > N$) 处于相同态的输出模,输入、输出模之间的态的保真度定义了该复制机的性能.该文构造了 N 输入 M 输出的普适量子复制机,并证明其保真度最高可达到

$$F_{N,M} = \frac{M(N+1) + N}{M(N+2)}. \quad (11)$$

显然,当 $N=1, M=2$ 时,上式给出了单输入双输出的量子复制机的最佳保真度 $5/6$.

3 概率量子克隆机

前面已指出,量子不可克隆定理的 W-Z 证明基于量子力学中的叠加原理,至少需要 3 个以上的量子态,该证明才能行之有效.两个非正交态不可克隆是由量子演化的幺正性决定的.但是在量子力学中,并非所有的过程都能用幺正算符来表示,测量就是一个典型的非幺正演化.于是一个很有意义的问题是,把幺正演化和测量过程结合起来,是否可以提高量子机器的克隆能力?更具体一点,两个非正交态是否可以通过一个幺正坍缩过程来精确克隆呢?我们证明该问题的答案是肯定的^[17].

在我们的克隆方案中,体系包括原始模 A 、复制模 B 和一个附加模 P .模 B 和模 P 被制备到一个确定的初始态 $|0\rangle$,模 A 的输入态为 $|s\rangle$,其中 $s=0$ 或 1 ,且 $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$ 为非

物理

正交. 首先我们让一个么正演化作用在整个体系 ABP 上, 通过设计此么正演化的形式, 可以使得演化后的态由如下两部分叠加而成:

$$\sqrt{1-\eta} |s_A\rangle |s_B\rangle |0\rangle_P + \sqrt{\eta} |1\rangle_{AB} |1\rangle_P, \quad (12)$$

其中 $|1\rangle_P$ 为模 P 的一个与 $|0\rangle_P$ 正交的态. 无论输入态为 $|0\rangle$ 或 $|1\rangle$, 演化末态都具有 (12) 式的形式, 而且 η 不依赖于输入态. (12) 式中的前一项表示体系 AB 处于输入态的一个精确复制态, 而后一项表示体系 AB 的态与复制态存在偏差, 为非复制态. 复制态和非复制态通过模 P 纠缠在一起. 设 $|0\rangle_P$ 和 $|1\rangle_P$ 为模 P 的某个力学量 A_P 的本征态, 测量 A_P , 以 η 的概率我们得到测量值 0, 并且系统 AB 坍缩到复制态 $|s_A\rangle |s_B\rangle$, 此时克隆机输出输入态的精确复制态. 反之, 如果测量值为 1, 系统 AB 坍缩到非复制态 $|1\rangle_{AB}$, 此时克隆机无输出.

以上我们把么正演化和测量过程相结合, 实际上构造了一种概率量子克隆机. 此机器以确定的大于零的概率产生输出, 而且输出态一定是输入态的精确复制态. 为构造概率量子克隆机, 测量和合适的么正演化都是不可缺的. 如果只有么正演化, 显然非正交态不可以精确克隆; 另一方面, 如果只有测量, 当输入态为非正交态时, 机器不可能对其中任意一个输入态都以大于零的概率产生输出, 且输出态是输入态的精确复制态. 因此构造概率量子克隆机的关键是要设计出合适的么正演化并要联系测量过程.

在 (12) 式中, η 为概率克隆机成功产生输出的概率, 定义为克隆效率, 它决定了该机器的性能. 显然, 对于确定的输入态集合, 我们希望设计一种机器, 使得它具有最大的效率, 且该效率不依赖于具体的输入态, 此时该机器称为最佳概率量子克隆机. 我们证明, 如果输入态属于集合 $\{|0\rangle, |1\rangle\}$, 则概率量子克隆机的最高效率为

$$\max \eta = \frac{1}{1 + \frac{1}{\langle 0|1\rangle}}. \quad (13)$$

显然只有对于正交输入态, 该效率才能达到 1, 这一点保证了基于传送两个非正交态的量子密

钥体系的安全性.

我们可以进一步考虑具有 N 种可能输入态的情况. 在量子力学中, 无论是么正演化, 还是测量过程, 都是线性的, 因此, 类似量子不可克隆定理的 W-Z 证明, 线性相关的量子态不可能被同一物理过程克隆, 即使是采用最一般的么正坍缩过程. 但是反过来, 是不是线性无关的量子态总可以通过一个么正坍缩过程来概率克隆呢? 这一点远非显然, 但我们证明, 情况确实如此^[18]. 可以设计出一种概率量子克隆机, 它同样由么正演化和测量构成, 其输入为 N 种可能的线性无关的量子态. 无论对于哪个输入态, 该机器以大于零的概率产生输出, 且输出态一定是输入态的精确复制品. 对于给定的 N 种可能的输入态, 也可以设计出最佳的概率量子克隆机, 它的效率不依赖于输入态, 并且达到最大值. 由于该效率的表达式较复杂, 这里不再赘述, 如果输入只有两种可能的态, 该表达式回到 (13) 式.

4 结语

量子不可克隆定理的研究虽然已经有较长的历史, 但是量子克隆和量子复制成为量子信息论中的一个研究热点, 则是在 1996 年之后, 特别是关于量子复制机和概率量子克隆机的工作. 目前, 人们对这一领域的兴趣有增无减. 一方面, 人们继续寻找量子复制机在量子密码窃听以及量子态的测量、估计和重建中的可能应用^[11]; 另一方面, 人们发现概率量子克隆和量子态的确认及量子计算机中的编程具有内在的联系^[19]. 在量子克隆和量子复制领域, 还有许多问题有待于进一步的研究.

参 考 文 献

- [1] W. K. Wootters, W. H. Zurek, *Nature*, **299** (1982), 802.
- [2] D. Dieks, *Phys. Lett., A*, **92**(1982), 271.
- [3] H. P. Yuen, *Phys. Lett. A*, **113**(1986), 405.

(下转第 34 页)

制成的紫外二极管或紫外激光器的潜在应用价值很大. 在室温下观察到用光泵激发的受激发射使人们对 ZnO 的研究兴趣更浓厚. 虽然生长更高质量的 ZnO 还有待进一步研究,但其作为继 - 族氮化物和 - 族的硒化物之后又一新的宽禁带半导体激光器件材料已经显示出其独特的优越性.

参 考 文 献

- [1] M. Haase et al. , *Appl. Phys. Lett.* , **59**(1991) ,1272.
 [2] M. A. L. Johnson , Shizuo Fujita , W. H. Rowland et al. , *J. Electronic Materials* , **25**(1996) ,855.
 [3] Y. F. Chen , D. M. Bagnall , Z. Q. Zhu et al. (to be published) .
 [4] P. Yu , Z. K. Tang , G. K. L. Wong et al. , Eds. M. Scheffler , R. Zimmermann , 23rd Intern. Conf. on the Physics of Semiconductor , World Scientific , (1996) ,1453.

(上接第 43 页)

- [17] U. R. Potheckamury , G. V. Barbosa-Canovas et al. , *Food technology* , No. 12 , (1993) ,85.
 [18] Q. Zhang , A. M. Gonzalez , G. V. Barbosa-Canovas et al. , *Transactions of the ASA E* , No. 2 , (1994) ,581.
 [19] 刘颂豪、孟耀勇 , *物理* , **21**(1992) ,516.
 [20] Chen Zhengu , *Laser Biology* , **3**(1992) ,99.
 [21] 李俊亨、梁宏 , *激光医学* , 科学出版社 , (1989) ,1.
 [22] 郑得连 , *医学超声原理与仪器* , 上海交通大学出版社 , (1990) ,277.
 [23] Grant. Morris , Mc Iellan , *Trends in Biotechnology* , **8** (1990) ,293.
 [24] 张秀华 , *生物学通报* , **30**(1995) ,95.
 [25] 习岗 , *生物物理学报* , **8**(1992) ,512.
 [26] A. M. Kuzin et al. , *Environmental and Experimental Botany* , **26**(1986) ,163.
 [27] 林廷安等 , *北京农业大学学报* , **18**(1992) ,360.
 [28] 薛华等 , *生物化学与生物物理进展* , **18**(1991) ,234.
 [29] 国家自然科学基金委员会 , *生物物理学* , 科学出版社 , (1995) ,95.
 [30] B. J. Sedlak , *Genetic Eng. News* , No. 1 , (1995) ,8.
 [31] 陈进国、石峰等 , *生物物理学报* , **10**(1995) ,119.
 [32] F. Abeles. , *Ann. Rev. Plant Physiol.* , **37**(1986) ,49.
 [33] F. A. Popp et al. , *Recent Advances in Biophoton Research and Its Application* , World Scientific , Singapore , (1992) ,1.

(上接第 57 页)

- [4] G. M. D Ariano , H. P. Yuen , *Phys. Rev. Lett.* , **76** (1996) ,2832.
 [5] H. Barnum , G. M. Caves , C. A. Fuchs et al. , *Phys. Rev. Lett.* , **76**(1996) ,2818.
 [6] C. H. Bennett , G. Brassard , N. D. Mermin , *Phys. Rev. Lett.* , **68**(1992) ,557.
 [7] C. H. Bennett , *Phys. Rev. Lett.* , **68**(1992) ,3121.
 [8] A. Ekert , B. Huttner , G. M. Palma et al. , *Phys. Rev. A* , **50**(1994) ,1047.
 [9] V. Buzek , M. Hillery , *Phys. Rev. A* , **54**(1996) ,1844.
 [10] D. Mozyrsky , V. Privman , M. Hillery , *Phys. Lett. A* , **226**(1997) ,253.
 [11] N. Gisin , B. Huttner , *Phys. Lett. A* , **228**(1997) ,13.
 [12] M. Hillery , V. Buzek , *Phys. Rev. A* , **56**(1997) ,1212.
 [13] D. Drug , D. P. DiVincenzo , A. Ekert et al. , LANL e-print quant-ph/9705038 , to appear in *Phys. Rev. A* .
 [14] N. Gisin , S. Massar , *Phys. Rev. Lett.* , **79** (1997) , 2153.
 [15] 吴河浚、郭光灿、祝钧 , *量子光学学报* , **2**(1996) ,47.
 [16] B. Schumacher , *Phys. Rev. A* , **51**(1995) ,2738.
 [17] L. M. Duan , G. C. Guo , LANL e - print quant - ph/9704020 , *Phys. Lett. A* , (1998) ,in press.
 [18] L. M. Duan , G. C. Guo , *Phys. Rev. Lett.* , **80**(1998) , 4999.
 [19] M. A. Nielsen , I. L. Chuang , *Phys. Rev. Lett.* , **79** (1997) ,321.