

## 5 结束语

自从  $\beta$ - $C_3N_4$  的理论预言发表之后,经过广大科学工作者的努力,已经取得了一些重要进展.理论上对碳氮化合物的研究已经更为广泛和深入.实验合成上也取得了长足的进展.已在成分、晶体结构和化学键等方面与  $\beta$ - $C_3N_4$  相符或相近的报道.我们在 Si、Pt 等基底上初步合成了晶态的  $C_3N_4$  薄膜,实验分析表明,薄膜主要由  $\beta$ - $C_3N_4$  晶相组成,成分接近理论值, N/C 原子比接近 4/3,并且薄膜中的 C 和 N 以 C—N 单键结合.

### 参 考 文 献

[ 1 ] Cohen M L. Phys. Rev. B, 1985,32(12):7988—7991

- [ 2 ] Liu A Y, Cohen M L. Science, 1989,245:841—842  
[ 3 ] Cohen M L. Mater. Sci. & Eng. A, 1996,209:1—4  
[ 4 ] Teter B M, Hemley R J. Science, 1996,271:53—55  
[ 5 ] Cote M, Cohen M L. Phys. Rev. B, 1997,55(9):5684—5688  
[ 6 ] Cuomo J J, Leary P A, Yu D *et al.* J. Vac. Sci. Technol.,1979,16(2):299—302  
[ 7 ] Niu C M, Lu YZ, Lieber C M. Science, 1993,261:334—337  
[ 8 ] Zhang Z J, Fan S S, Lieber C M. Appl. Phys. Lett., 1995,66(26):3582—3584  
[ 9 ] Chen Y, Guo L P, Wang E G. Phil. Mag. Lett.,1997,75(3):155—162  
[10] Werninghaus T, Zahn D R T, Wang E G *et al.* Diamond and Related Mater.,1998,7(1):52—56  
[11] Yen T Y, Chou C P. Appl. Phys. Lett.,1995,67(5):281—283

## 光学分数傅里叶变换及其应用\*

张 岩 顾本源 杨国桢

(中国科学院物理研究所 北京 100080)

**摘 要** 介绍了分数傅里叶变换的定义及其性质,给出了分数傅里叶变换的光学实现结构,并对分数傅里叶变换在光学信息处理领域中的应用进行了综述.

**关键词** 分数傅里叶变换,光学信息处理

## OPTICAL FRACTIONAL FOURIER TRANSFORM AND ITS APPLICATIONS

Zhang Yan Gu Benyuan Yang Guozhen

(Institute of Physics, The Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080)

**Abstract** The fractional Fourier transform, which is a generalization of the conventional Fourier transform, is introduced. Its definitions, properties, and optical implementations are presented. Some applications in optical information processing are discussed.

**Key words** fractional Fourier transform, optical information processing

## 1 引言

在数学中,有许多变换和运算的最初定义

都是针对整数级次的,随着研究的深入以及适应各种应用的要求,它们的定义从整数级次推

\* 国家自然科学基金资助项目

1998 - 11 - 12 收到初稿,1999 - 01 - 04 修回

广到分数级次,一个简单的例子是乘幂运算: $x^n$ 的最初定义是 $x$ 的 $n$ 次连乘,如 $x^2 = x \times x$ .显然,这一定义只有 $n$ 是整数时才成立,而现在这一运算不仅推广到了分数级次,还具有复数级次的幂运算.在物理学中也存在着分数化的过程,如 Talbot 效应(自成像效应),最初的研究仅限于在相距为 $Z = NZ_d$ 的平面上观察到输入物体自成像的现象( $Z$ 为轴向坐标, $Z_d$ 为特征距离), $N$ 为整数.但随着研究的深入, $N$ 也扩展到了分数,即人们开始研究分数 Talbot 效应.

分数傅里叶变换是传统的傅里叶变换在分数级次上的推广<sup>[1-4]</sup>,与傅里叶变换和菲涅耳变换都有着紧密的联系<sup>[5]</sup>,又具有许多不同于傅里叶变换和菲涅耳变换的特殊性质,已经应用于空间平移变化的滤波、相位恢复、神经网络、透镜设计、信息处理等领域<sup>[6-8]</sup>,并可以演生出诸如分数相关、分数卷积、分数盖伯变换等许多新的变换<sup>[9-11]</sup>.因而,对分数傅里叶变换的研究必将推动光学信息处理领域的进一步发展.

本文将介绍分数傅里叶变换的定义及其性质,给出分数傅里叶变换的光学实现结构,并概述其在光学信息处理等领域中的应用.

## 2 分数傅里叶变换的数学定义及其性质

传统的傅里叶变换是一个十分重要的数学工具,被广泛地应用于电气工程、信号及信息处理等领域,并成为光学信息处理这一新领域的数学基础.如果将傅里叶变换看作是一个算符操作,记作 $F\{\}$ ,则可以得到它的本征方程为

$$F\{\phi_m(x)\} = \exp(-im/2)\phi_m(x), \quad (1)$$

其中本征函数 $\phi_m(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n} \sqrt{n!}} H_m(x) \cdot \exp(-x^2/2)$ 是归一化的高斯-厄米函数, $H_m(x)$ 为第 $m$ 阶厄米多项式.分数傅里叶变换是传统的傅里叶变换的推广,将其也看作算符,记为 $F^P\{\}$ ,可以得到它的本征方程为<sup>[1]</sup>

$$F^P\{\phi_m(x)\} = \exp(-imP/2)\phi_m(x). \quad (2)$$

28 卷 (1999 年) 8 期

由于 $\phi_m(x)$ 是正交、完备、归一的多项式函数集合,对任何平方可积的函数 $f(x)$ 均可以展开为 $\phi_m(x)$ 的线性叠加形式,即 $f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m \phi_m(x)$ ,其中 $A_m = \int f(x) \phi_m(x) dx$ 代表 $f(x)$ 对高斯-厄米函数为基矢的展开系数,因而有分数傅里叶变换的高斯-厄米函数叠加形式

$$F^P\{f(x)\} = \sum_{m=0}^{\infty} A_m \cdot \exp(-imP/2)\phi_m(x), \quad (3)$$

将 $A_m$ 的表达式代入(3)式,并利用 $\phi_m(x)$ 的积分表达式,则可以得到分数傅里叶变换的积分表达式

$$F^P\{f(x)\} = \int f(x) B(x, v, P) dx, \\ B(x, v, P) = \sqrt{\frac{-i \cot}{2}} \cdot \exp\left[\frac{i}{2} \cot(x^2 + v^2) - ixv \csc\right], \quad (4)$$

其中 $\theta = P/2$ 是级次 $P$ 决定的角度, $x$ 和 $v$ 分别是输入和输出平面的坐标.

从分数傅里叶变换的定义可以推出它的许多性质<sup>[1,2]</sup>:

### (1) 指数可加性质和交换性质

分数傅里叶变换具有指数可加性和交换性,即 $F^{P_1}\{F^{P_2}\{f(x)\}\} = F^{P_2}\{F^{P_1}\{f(x)\}\} = F^{P_1+P_2}\{f(x)\}$ .

### (2) 可逆性质

对一个函数的 $P$ 级分数傅里叶变换进行 $-P$ 级的分数傅里叶变换,则可以得到原函数: $F^{-P}\{F^P\{f(x)\}\} = F^0\{f(x)\} = f(x)$ .

### (3) 线性性质

几个函数线性叠加的分数傅里叶变换等于这几个函数同级次的分数傅里叶变换的线性叠加, $F^P\{c_1 f(x) + c_2 g(x)\} = c_1 F^P\{f(x)\} + c_2 F^P\{g(x)\}$ ,其中 $c_1, c_2$ 是任意复常数.

### (4) 周期性性质

分数傅里叶变换是周期为4的变换,

$$F^{P+4}\{f(x)\} = F^P\{f(x)\}.$$

### (5) 平移性质

• 485 •

分数傅里叶变换具有特殊的平移性质

$$F^P\{f(x+m)\} = \exp[i m \sin(v + m \cos v/2)] \cdot F^P\{f(x)\}_{|v+m \cos v|}, \quad (5)$$

其中  $m$  是输入平移量. 可见输入信号的平移不仅引入了一个相位因子, 还使其分数傅里叶变换的输出信号产生了平移.

(6) 相似性质

分数傅里叶变换的输入信号的尺度发生变化时, 不仅会引入一个与尺度因子有关的二次相位, 而且还使分数傅里叶变换的级次发生了改变,

$$F^P\{f(cx)\} = \frac{1}{\sqrt{c^2 - \cot^2 v}} \exp[i \frac{v^2}{2} \cot^2 v] \cdot (1 - \frac{\cot^2 v}{c^2})^{1/2} F^P\{f(x)\}_{|v \frac{\sin v}{c \sin v}|}, \quad (6)$$

其中  $c$  是输入信号的尺度变化因子,  $\frac{v}{c} = P/2$ , 并且有  $\tan \frac{v}{c} = c^2 \tan v$ . 这与传统的傅里叶变换有着明显的不同.

(7) 帕色伐定律

同传统的傅里叶变换相同, 分数傅里叶变换也是能量守恒的, 满足帕色伐定律

$$\int |f(x)|^2 dx = \int |F^P\{f(x)\}|^2 dv.$$

为了说明分数傅里叶变换的平移性质和相似性质, 图 1 (a), (b) 和 (c) 分别给出了矩形函数  $\text{Rect}(x/4)$ ,  $\text{Rect}[(x-2)/4]$  和  $\text{Rect}(x/2)$  的级次为 0.25, 0.50, 0.75 和 1.00 的分数傅里叶变换的模值, 从中可以看到分数傅里叶变换同传统的傅里叶变换的不同之处.

### 3 光学分数傅里叶变换的定义和实现

分数傅里叶变换是由 Mendlovic 等人研究渐变折射率介质中光波的传播性质和相关的光学理论时在 1993 年首先引入光学领域的<sup>[4]</sup>. 由于负二次型渐变折射率介质的本征模式是高斯-厄米函数, 因此, 不同的高斯-厄米模式在这种介质中的传播具有不同的传播常数  $r_{lm}$

$k - \frac{(n_2)^2}{n_1^2} (l+m+1)$ , 其中  $k = 2\pi/\lambda$ , 是入射光波长,  $n_1, n_2$  为介质的参数,  $l, m$  分别

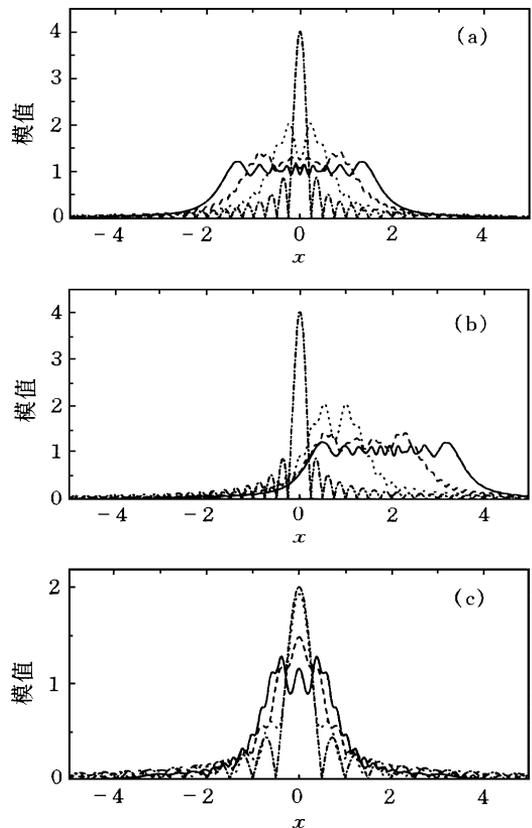


图 1

(a) 函数  $\text{Rect}(x/4)$ ; (b)  $\text{Rect}[(x-2)/4]$ ; (c)  $\text{Rect}(x/2)$  的分数傅里叶变换的模值  
(—:  $P=0.25$ ; - - :  $P=0.50$ ; ··· :  $P=0.75$ ; - · - :  $P=1.00$ )

是高斯-厄米函数模式在  $x, y$  方向上的阶次. 对任何输入函数, 其分数傅里叶变换定义为距输入面  $Z = PL$  处平面上的光场分布为

$$F\{f(x, y)\} = \int \int A_{lm} \phi_{lm}(x, y) \cdot \exp(i r_{lm} PL),$$

其中  $L = (f/2)(n_1/n_2)^{1/2}$  是利用几何光学确定的渐变折射率介质的焦距, 除了一个不重要的常数因子外, 这一定义与 (3) 式是完全相同的. Lohmann 利用 Wigner 分布函数的相空间旋转, 给出了光学分数傅里叶变换的另一种定义<sup>[3]</sup>: 将 Wigner 分布函数在相空间进行逆时针旋转  $= P/2$  角的光学变换, 即  $P$  级的分数傅里叶变换. 随后的研究表明, 分数傅里叶变换的这两种定义是完全等价的<sup>[12]</sup>. 由于自由空间

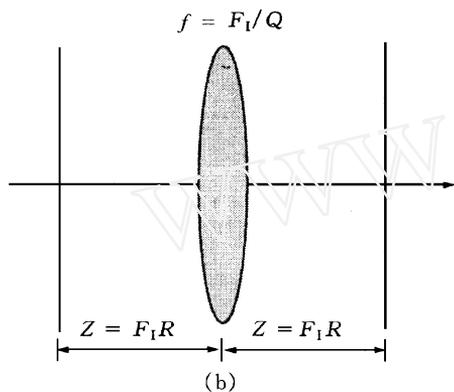
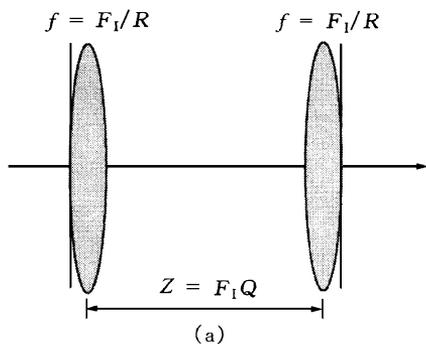


图2 Lohmann 提出的实现分数傅里叶变换的透镜组合结构

(a) 双透镜结构; (b) 单透镜结构

传播和透镜的组合也能够实现 Wigner 分布函数的旋转,于是,Lohmann 提出两种透镜组合结构来实现分数傅里叶变换,如图 2 所示.图中  $R = \tan(\alpha/2)$ ,  $Q = \sin \alpha$ ,  $F_1$  为标准焦距.通过简单的推导可以得到输入和输出函数的关系为

$$U_2(v) = F^p\{U_1(x)\} = c \int_{-\infty}^{\infty} U_1(x) \exp\left\{ \frac{i}{F_1} \left[ (x^2 + v^2) \cot \frac{\alpha}{2} - 2xv \csc \frac{\alpha}{2} \right] \right\} dx, \quad (7)$$

其中  $U_1, U_2$  分别为输入、输出函数,  $c$  为复常数。

光学信息处理中经常需要两个或更多级次的分数傅里叶变换进行级联,由于分数傅里叶

变换特殊的相似性质,它要求级联的前一级结构的标准焦距等于后一级结构的标准焦距<sup>[13]</sup>.对 Lohmann 提出的两种结构来讲,一旦安排使用的透镜和分数傅里叶变换的级次选定,则系统的标准焦距就确定下来,这样十分不利于分数傅里叶变换的级联,为了解决这一问题,一些能够改变标准焦距的结构被提出和发展<sup>[13,14]</sup>.此外,还有一些结构是利用菲涅耳衍射来实现分数傅里叶变换<sup>[15]</sup>.

## 4 光学分数傅里叶变换的应用

分数傅里叶变换与传统傅里叶变换有许多相同的性质,却又具有其自身的特点,所以自从它被引入到光学领域,它的应用就一直吸引着人们的注意.

### 4.1 信号分离与噪音去除<sup>[16]</sup>

分数傅里叶变换是一种空间平移变的操作,所以许多在空间域和频率域都重叠的信号和噪音在特定的分数傅里叶变换域却能够很好地分开.因此只需一个简单的振幅滤波器就可以实现信号分离或噪音去除.图 3 给出一个在分数傅里叶变换域利用纯振幅滤波器进行噪音去除的示例.这一示例表明,对于特定的噪音,在分数傅里叶变换域中进行滤波可以得到较好的效果.

### 4.2 演生新的变换

分数傅里叶变换的提出,也为一些新变换的产生奠定了基础,我们给出三个例子来说明.

#### 4.2.1 分数相关<sup>[9]</sup>

相关操作在光学信息处理中经常被用来确定输入物体和目标的相似程度,利用傅里叶变换,可以得到相关的一种定义为

$$C(x) = F^{-1}\{F\{f(x)\}F^*\{g(x)\}\}, \quad (8)$$

其中符号“\*”表示复共轭.相仿地,可以利用分数傅里叶变换定义分数相关为

$$C^{P_1, P_2, P_3}(x) = F^{P_3}\{F^{P_1}\{f(x)\}F^{P_2}\{g(x)\}\}. \quad (9)$$

为了得到尖锐的相关峰,分数级次  $P_1, P_2, P_3$  还应满足一定条件.分数相关的相关峰强度不

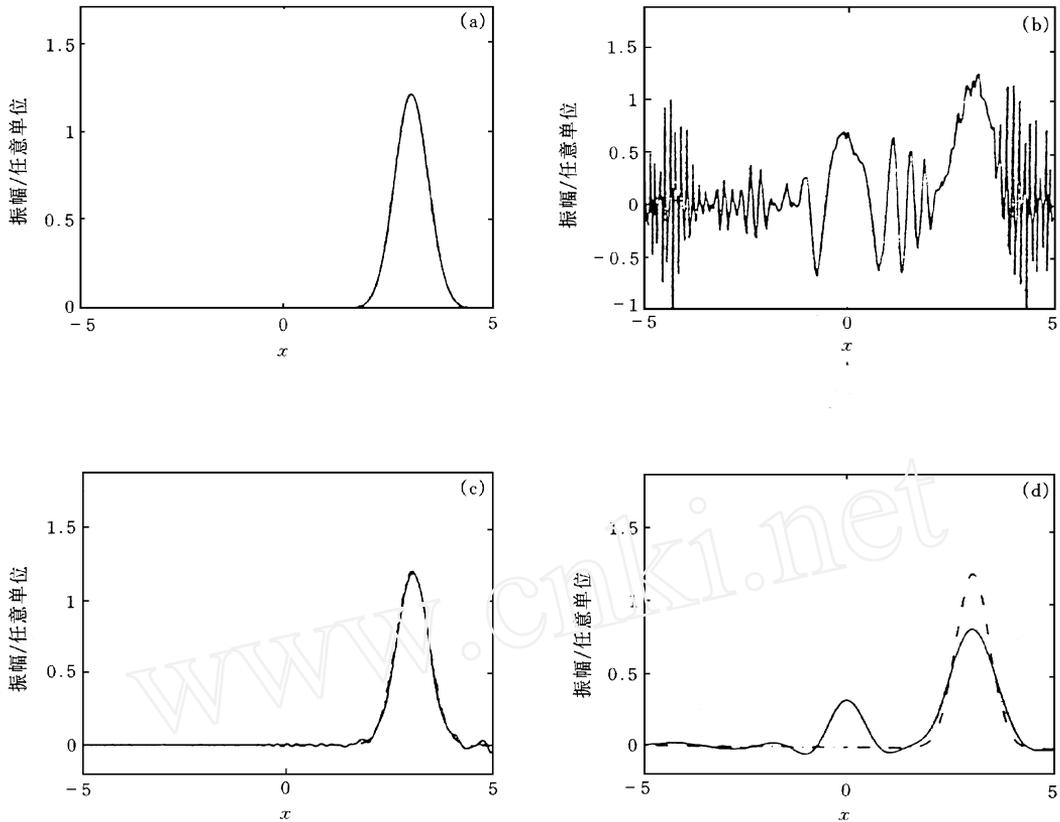


图3 分数傅里叶变换域滤波的实例

(a) 输入信号; (b) 具有噪音的输出信号; (c) 在  $P=0.33$  的分数傅里叶变换域滤波得到的结果(实线)和需要的信号(虚线); (d) 在傅里叶变换域滤波得到的结果(实线)和需要的信号(虚线)

仅同两物体的相似程度有关,而且同两物体的相对位置有关.通过改变分数傅里叶变换的级次,分数相关的这种平移变性质还可以得到控制.将分数相关与谐波函数展开的方法相结合,就可以实现信号畸变不变而空间平移变的相关,从而能够有效地应用于局域目标识别中<sup>[17]</sup>.

#### 4.2.2 分数子波变换<sup>[18]</sup>

子波变换是一个十分重要的联合表象工具,已经成功地应用于数据压缩、声音分析、相关识别等领域,可以在相关的文献中找到它的定义<sup>[18]</sup>.将分数傅里叶变换和子波变换相衔接,可以构造一种新的变换——分数子波变换,其定义为

$$W^P(a, b) = \iint f(x) B(x, x, P) \cdot \frac{1}{\sqrt{|a|}} h^*\left(\frac{x-b}{a}\right) dx, \quad (10)$$

其中  $h(x)$  是子波母函数,  $a$  和  $b$  分别是扩因子和平移因子.分数子波变换是先将输入信号进行优化级次  $P$  的分数傅里叶变换,然后再进行子波变换.当  $P=1$  时,分数子波变换变为通常的子波变换.与传统的子波变换一样,利用分数子波谱还可以重构输入信号.

分数子波变换利用了分数傅里叶变换的局域特征来提高子波变换的重构能力.模拟实验结果表明,分数子波变换能够有效地进行图像压缩,而且具有较小的重构误差.

#### 4.2.3 分数盖伯变换<sup>[11]</sup>

传统的盖伯变换是 Gabor 在 1946 年提出的,它在雷达系统、声纳系统、通讯工程中有着广泛的应用.它的定义是

$$G(p, q) = \int f(x) g^*(q-x) \cdot \exp(-i px) dx, \quad (11)$$

物理

其中  $g(x)$  是选定的窗口函数. 盖伯变换是在傅里叶变换之前, 将信号乘以一个可以移动的窗口函数, 因而它又称为窗口傅里叶变换. 相仿地, 如果在分数傅里叶变换之前, 将信号乘以一个可以移动的窗口函数, 可称为分数盖伯变换或窗口分数傅里叶变换, 即

$$G^P(p, q) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) g^*(q - x) \cdot B(x, p, P) dx. \quad (12)$$

如果窗口函数是能量归一的, 利用分数盖伯变换谱可以重建原信号. 在分数盖伯变换的基础上, 我们还提出了一类新的窗口分数变换, 如窗口分数余弦变换、窗口分数正弦变换等. 这些新变换的提出为信号的分析与综合带来了新的工具, 必将推动光学信号和信息处理的发展.

### 4.3 利用分数傅里叶变换实现 Radon - Wigner 展示

Radon - Wigner 变换 (RWT) 是将信号的 Wigner 分布函数在相空间按任意角度投影, 它和时间 - 频率或空间 - 频率分析有着密切的关系, 并广泛地应用于信号处理领域中<sup>[19]</sup>. 一维信号的 Radon - Wigner 展示 (RWD) 是一个二维分布, 它在一个方向上是信号的 RWT 谱, 在另一个方向上是投影角的连续变化. 最近的研究表明,  $P$  级的分数傅里叶变换的模平方即是角度为  $\phi = P/2$  的 RWT, 受这一发现的启发, 我们最近提出和发展了一些利用分数傅里叶变换实现 RWD 的结构<sup>[20]</sup>.

在 Lohmann 提出的结构中<sup>[1]</sup>如图 2(a) 所示, 输出平面的透镜只使输出函数引入了一个纯相位因子, 而 RWD 是分数傅里叶变换的模平方, 所以这一透镜可以从光学系统中取消. 如果一维信号沿  $x$  轴分布, 投影角随纵坐标  $y$  变化, 我们提出如图 4 所示的结构来实现 RWD, 其中参数为:  $Z(y) = (1 - cy) F_1$ ,  $P(y) = 2\sin^{-1}(1 - cy)/c$ ,  $f(y) = F_1 \sqrt{\tan[\sin^{-1}(1 - cy)]}$ ,  $c$  是实常数, 该结构中实现傅里叶变换处的透镜焦距等于  $F_1$ . 我们所提出的结构仅使用一个变焦透镜, 而且不同级次的分数傅里叶变换, 对输入信号的尺度要求都是相同的, 这样,

该结构有利于光学实现, 并能够应用于多通道分数相关运算中.

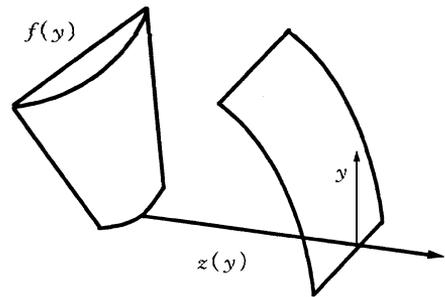


图 4 实现一维信号 Radon - Wigner 展示的光学结构示意图

分数傅里叶变换还有许多其他方面的应用, 这里只给出几个典型的例子, 感兴趣的读者可以阅读相关的文献.

## 5 结束语

本文概述了分数傅里叶变换的定义、基本性质及其光学实现, 介绍了它在相关识别、信息处理、光学计算等方面的应用. 自从分数傅里叶变换引入光学领域, 在短短的 5 年中, 它已经得到了广泛的重视和研究. 将这新的数学工具和光学技术相结合, 可望开拓出许多新的应用技术, 必将推动光学信号和信息处理的进一步发展.

## 参 考 文 献

- [ 1 ] Namias V. J. Inst. Math. Its. Appl. ,1980 ,25 :241 — 265
- [ 2 ] McBride A C, Kerr F H. IMA J. Appl. Math. ,1987 , 39 :159 —172
- [ 3 ] Lohmann A W. J. Opt. Soc. Am. A , 1993 ,10 :2181 — 2186
- [ 4 ] Mendlovic D, Ozaktas H M. J. Opt. Soc. Am. A , 1993 ,10 :1875 —1881 ,2252 —2531
- [ 5 ] Finet P P. Opt. Lett. ,1994 ,19 :1388 —1390
- [ 6 ] Dong B et al. J. Opt. Soc. Am. A , 1997 ,14 :2709 — 2714
- [ 7 ] Dorsch R G, Lohmann A W. Appl. Opt. , 1995 , 34 : 4111 —4112
- [ 8 ] Zalevsky Z, Mendlovic D. Appl. Opt. , 1996 ,35 :2930 — 2936

- [ 9 ] Mendlovic D *et al.* Appl. Opt. ,1995 ,34 :303 —309
- [ 10 ] Lohmann A W *et al.* Opt. Lett. ,1996 ,21 :281 —283
- [ 11 ] Zhang Y *et al.* Opt. Lett. ,1997 ,22 :1583 —1585
- [ 12 ] Mendlovic D *et al.* Appl. Opt. ,1994 ,33 :6188 —6193
- [ 13 ] Liu S *et al.* Opt. Lett. ,1995 ,20 :1053 —1055
- [ 14 ] Dorsch R G. Appl. Opt. ,1995 ,34 :6016 —6022
- [ 15 ] Andr è P *et al.* J. Opt. Soc. Am. A , 1996 ,14 :853 —858
- [ 16 ] Kutay M A *et al.* IEEE Trans. Sign. Process. ,1997 ,45 :1129 —1143
- [ 17 ] Zhang Y, Gu B Y. Appl. Opt. ,1998 ,37 :6256 —6261
- [ 18 ] Mendlovic D *et al.* Appl. Opt. ,1997 ,36 :4801 —4806
- [ 19 ] Wood J C, Barry D T. IEEE Trans. Signal Process. , 1994 ,42 :2105 —2111
- [ 20 ] Zhang Y *et al.* Opt. Lett. ,1998 ,23 :1126 —1128

## 现代雷达中的光电子技术 \*

蒋 跃

(空军雷达学院物理教研室 武汉 430010)

**摘 要** 介绍了光电子技术在现代雷达中的主要应用.在雷达信号传输、光信息处理和微波器件的光控制等方面,光电子技术的应用显示出广阔的前景和巨大的经济、军事价值.

**关键词** 光电子技术,光纤链路,光纤延迟线

### APPLICATIONS OF OPTOELECTRONIC TECHNOLOGY IN ADVANCED RADAR

Jiang Yue

(Teaching and Research Section of Physics, Air Force Radar Academy, Wuhan 430010)

**Abstract** The main application of optoelectronic technology in advanced radar systems are described, demonstrating the vast prospect and immense value to the economy and defence, with regard to radar signal transmission, optical information processing and optical control of microwave devices etc.

**Key words** optoelectronic technology, fiber - optical links, optical fiber delay - line

#### 1 引言

如所周知,物理学不仅是自然科学的基石,而且也是高新技术的重要生长母体,是现代高技术兵器研制的先导.光电子技术就是由物理学生长出来的一门崭新技术学科.本世纪60年代激光技术的产生,70年代低损耗光纤问世,80年代末集成光学技术的成熟,都极大地推动了光电子技术的形成和发展.

在当代社会和经济发展中,信息容量与日俱增,随着大容量和高速度的信息发展,电子学

和微电子学遇到了困难.仅就目前电子器件及其系统响应时间来看,最快也只能达到 ns 量级,而光器件响应时间则可达到 fs 量级,光频在  $10^{14}$  —  $10^{15}$  Hz,而且激光束的频宽可窄至  $10^3$  Hz,因而即使在  $\mu\text{m}$  量级的光纤内,也能承载传送大量的信息(大于  $10^{12}$  b/s · km).因此,光作为更高频率和速度的信息载体,会使信息技术的发展产生突破.在许多领域中,凡涉及到超大、超精、超微、超功率、超高速及复杂图像的有关应用中都常常要求助于光电子技术.事实

\* 1998 - 10 - 19 收到初稿,1999 - 01 - 13 修回