期权定价理论中的物理学*

于 祖 荣

(同济大学物理系　上海　200092)

摘　要　布朗运动理论是布莱克 - 舒尔斯期权定价理论的基础.这意味着现代金融工程需要物理学.现代金融学向定量科学发展是历史的必然,物理学进入金融业也是势在必行.但是,金融工程是一项大的综合性工程,物理模型只是它的一部分,且要走的路还很长,还有许多工作需要物理学家去做,特别是要用新的物理思想,构造出新的、实用的模型.

关键词　布朗运动理论,期权定价,布莱克-舒尔斯公式

PHYSICS IN THE PRICING THEORY OF OPTIONS

YU Zu-Rong

(*Department of Physics, Tongji University, Shanghai* 200092)

Abstract　The theory of Brownian motion is the foundation of the pricing theory of Black-Scholes. This shows that physics plays an important role in modern finance, which is developing as a quantitative science. However physical models are only a part of modern financial engineering, which is a big comprehensive program. There is still much work for physicists to do, especially in the construction of practical models with new ideas.

Key words　Brownian motion, pricing of options, Black-Scholes' formula

1997 年的经济学诺贝尔奖授予了莫顿(R. Merton)和舒尔斯(M. Scholes),以表彰他们和布莱克(F. Black, 1995 年已过世)在期权定价理论上的卓越贡献.现在,文献常称此理论为布莱克 - 舒尔斯期权定价公式(BS 公式),因为它是 1973 年布莱克和舒尔斯首创的.继后莫顿不仅做了大量的研究,而且在 BS 公式诞生过程中,他也出过好主意.BS 公式的重要性在瑞典科学院的嘉奖辞中已说得很清楚:BS 理论是“今天金融衍生物市场迅猛发展的可靠的理论基础”,“并将为金融业的未来发展带来革命性变化”.

那么金融科学中如此重要的理论与物理学有什么关系呢?这就是本文要回答的问题.我们将阐明 BS 理论的基础是物理学中的布朗运动理论,处理问题的方法也是物理上常用的方法.表明 BS 理论确是植根于物理学的,是一个地道的物理理论.这意味着物理学将成为现代金融工程不可缺少的一部分.

1　期权

什么是期权?为清楚起见我们举下列例子来说明.大家知道股票涨跌无序,股票市场没有永远的赢家,美国老虎基金的败落就是例证.为了规避买卖股票的风险,很久以前人们就以买入期权来达到此目的.即买方不直接购买股票而是与卖方签一份认购股票的合约,在合约中约定购买股票的价格、时间和数量.在合约到期(欧式期权)时或到期之前(含到期时间,美式期权),如果股票市价高于约定价,买方以约定价购进股票而赢利;否则买方就不执行合约.可见,合约执行与否的选择权完全在买方.所以期权实际上是买方买了一份选择权,故期权也称选择权.当然这是在买方看涨和卖方看跌的前题下才成交的,所以这类期权也称买方看涨期权.当然,买方为获得这类权利是要付给卖方钱(期权费)的.所以,买方最大损失就是期权费,而赢利原则上是无限的.

可见,上述期权是股票的一种衍生品种.故常将原始股票称为原生证券,而将股票期权称为衍生证券.如上所述,开始期权只是为了规避风险,但“买方看涨卖方看跌”本身就蕴含有投机性.所以实际上一开始衍生证券就有规避风险和投机两重性.现在衍生证券早已成了交易品种,且品种繁多,期权成了现代金融的核心工具,因此期权如何定价变得十分重要.布莱克、舒尔斯和莫顿的理论回答了这问题.有

*　2000 - 04 - 14 收到初稿,2000 - 06 - 05 修回

趣的是他们的理论与物理学中的布朗运动理论有密切联系.下面就来讨论这个问题.

2 布朗运动和 BS 公式

期权定价的研究已有很长历史.1900 年法国的巴施利尔(L.Bachelier)就得到了一个定价公式.在他的理论中就已将股票价格的涨跌看作类似于布朗运动的随机运动,可惜由此得到的股票价格可能取负值,与实际不符.但巴施利尔的思想一直沿用至今,不过以股价的相对变化替代了股价变化罢了.

大家知道,布朗运动是植物学家布朗(R.Brown)在 1827 年发现的.但它的理论解释直到 1905 年才由受因斯坦(A.Einstein)作出.爱因斯坦的主要结论有:(1)布朗微粒的运动是随机运动;(2)它的一维密度分布函数 $n(x,t;x_0,t_0)$ 在较长时间 t 后呈高斯(正态)分布,因此位移的平均值为 x_0,均方偏差正比于 $\Delta t = t - t_0$;(3)分布密度函数满足扩散型微分方程等等.这些都被皮兰(J.B.Perrin)在 1908 做的实验所证实[1].爱因斯坦之后,特别是由于数学家的参与,布朗运动理论已有很大发展,应用也已扩展到许多领域.

现在来看布莱克、舒尔斯(BS)和莫顿的期权定价理论[2—4]与布朗运动理论的关系.BS 理论的要点如下:

(1) BS 假定股票价格的变化是一种随机运动,满足随机微分方程:

$$\mathrm{d}S(t) = S(t)\mu\mathrm{d}t + S(t)\sigma\mathrm{d}B(t). \tag{1}$$

(1)式与布朗粒子所满足的朗之万(P.Langevin)方程非常相似,右边第二项(随机项)相当于朗之万方程中的随机力.式中的 $B(t)$ 是布朗运动,意即它是一个具有布朗运动特征的物理量:平均值为零、均方偏差为 $\mathrm{d}t$ 的高斯(正态)型随机变量.μ 称漂移率,它标记股票价格的相对收益率;σ 称波动率,它代表 $\mathrm{d}B(t)$ 在单位时间内对系统的干扰强度.在 BS 理论中,μ 和 σ 均是常数.

(2) BS 假定期权价格 f 是 S 和时间 t 的函数,并证明期权价格的变动满足伊藤(K.Itio)公式:

$$\mathrm{d}f = \left|\frac{\partial f}{\partial S}\mu S + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right|\mathrm{d}t + \frac{\partial f}{\partial S}\sigma S\mathrm{d}B(t). \tag{2}$$

因为(2)式是 BS 理论的关键方程之一,故在此稍作说明如下:

①在 BS 假设 $f(S+\Delta S, t+\Delta t)$ 的泰勒(Taylor)展开中,仅保留 Δt 的一级小量,而 ΔS 则保留到二级小量,后者表示股价的变动对衍生证券价格的变动影响很大.由此展开即可得到 Δf 的表达式.

②如上所说,B 是具有布朗运动特征的随机变量,它的均方偏差是 $(\Delta B)^2 = \Delta t$.按此以及①规定的近似,用(1)式即可导得 $(\Delta S)^2 = S^2\sigma^2\Delta t$,这表明 S 也是一个高斯型随机变量.将此结果代入到上面的 Δf 中去,并让 $\Delta t \to 0$,即得(2)式.

从上面的推导过程可以看出,布朗运动理论是 BS 理论的核心,而处理技巧也完全是物理方法,所以整个处理过程是很物理化的.

(3) 布莱克和舒尔斯另一基本思想是将股票价格 S 和期权价格 f 组合成一份组合资产 Π,使

$$\mathrm{d}\Pi = -\mathrm{d}f + \frac{\partial f}{\partial S}\mathrm{d}S. \tag{3}$$

这样的组合消去了(1)和(2)式中的 $\mathrm{d}B$ 项,同时也冲掉了含 μ 的项.所以 BS 公式中不含 μ,这是 BS 理论的一个显著特征.仔细观察 BS 理论的推导可以发现,冲掉 μ 项的根源是由于随机量具有布朗运动的特征和所用近似方法.

(4) 因为组合资产已经消去了 $\mathrm{d}B$,这意味着经 Δt 后价格变动的风险已消除,Π 已没有风险.按不存在无风险套利机会的假设,该无风险组合资产的收益应与其短时期(Δt)内无风险证券的收益相同,即

$$\mathrm{d}\Pi = r\Pi\mathrm{d}t, \tag{4}$$

r 是无风险投资年利率,BS 理论中假定它是常数.

联结以上各式,可得到 f 所满足的偏微分方程.在做了一些变换之后,上述偏微分方程可简化成类似爱因斯坦描述布朗运动的扩散方程.再用到期权(欧式期权)价作边界条件:$f(T) = \max[S(T) - K, 0]$,T 是到期时刻,K 是约定股票价格.从而得到了方程的解析解:

$$f(S,t) = S\Phi(d_1) - Ke^{-r(T-t)}\Phi(d_2), \tag{5}$$

其中 $\Phi(d)$ 是通常的高斯(正态)积分,知道积分上限 d 后,它的数值可查表得到.特别是当 $t = T$ 时,$d_1, d_2 = \infty$,所以 $\Phi = 1$.d 与参数 σ 等有关,具体表示在这里从略.(5)式就是著名的 BS 公式.BS 公式只有一个可调参数 σ,它只能依靠估计得到,因此自然会影响 BS 公式的计算值.另外,用 BS 公式计算美式期权是比较麻烦的,但在大型高速电子计算机的帮助下已不成问题.

用(5)式作实际计算十分简单.例如假定一股票

当前的市场价是 50 元,约定价设为 45 元,年无风险利率为 6 %,约定时间为 3 个月.若估计 $\sigma = 20\%$.则可算出 $d_1 = 0.65$, $d_2 = 0.4262$,所以当前的期权价为 $f(t=0) = 7.62$ 元.

由上可见,BS 公式是在布朗运动理论基础上和使用适当的近似导出的,推导并不难,用到的数学也并不复杂,重要的是 BS 的创新的物理思想.这与物理学史上许多重大发明创造的情况是一致的.例如低温超导中的 BCS 理论,布朗运动的爱因斯坦解释等等,"怪招"都在物理,数学一般不很繁复.优秀的物理学家总是有很好的直感,并且总能把好的物理思想用相对简单的数学表示出来.正因为此.物理学家构造的模型一般图像比较清晰、简单,比较易懂、管用.也许这就是目前华尔街偏好于雇用理论物理学家做定量分析研究的原因所在.当然数学对物理学是非常重要的,没有数学的物理学是不可能处理有重大意义的东西的.所以重要的是数学要与物理学相结合,在金融学中做定量模型研究也应如此.

BS 模型问世后,莫顿做了许多改进工作.例如 r 不是常数,股票有红利,股票价变动是跳跃式的,等等.BS 公式及莫顿的工作经过几十年的实践证明是正确的,从而也就证明了金融业确实需要物理学.

3 结语

1997 年 10 月,一夜之间东南亚数百亿美元变得无影无踪,使整个经济几乎处于瘫痪并引发了亚洲金融危机.足见金融之威力和重要,从而也显示出金融科学的研究特别是如何规避风险的研究必须要有一个大的发展.

金融科学向定量化方向发展是不可逆转的历史必然,物理学进入金融领域也是势在必行.但是,金融工程是一项综合性大工程,物理模型只是金融工程中的一部分.况且模型带来的后果也不十分理想.1987—1997 年,这十年中衍生品市场总的损失约 238 亿美元,而由模型的损失平均约占 20 %,并且逐年上升,1997 年竟达 40 %[5].这些事例表明,在金融科学中物理学家要做的事还很多.现有的理论也尚待深化.但是,BS 理论问世后,环绕它已发表有上千篇文章,许多问题已有很深入的讨论.所以重要的是有开创性的新思想,创造出新的和实用的理论和模型.过于侧重数学的精雕细刻的工作也许还不是第一位的.

参 考 文 献

[1] 王竹溪.统计物理学导论.北京:人民教育出版社,1965.215—244[WANG Zhu-Xi. Introduction of Statistical Physics. Beijing: The people's Education Press, 1965.215—244(in Chinese)]

[2] 刘金宝主编.金融工程中的核心工具——期权.上海:文汇出版社,1997.157—165[LIU Jin-Bao. Kerner Tools of the Financial Engineering-Options. Shanghai: Wen-Hui Press, 1997.157—165(in Chinese]

[3] 宋逢明.金融工程原理——无套利均衡分析.北京:清华大学出版社,1999.84—98[SONG Feng-Ming. The Principles of the Financial Engineering——No-Arbitrage. Beijing: Qinghua University Press, 1999.84—98(in Chinese)]

[4] 叶中行,林建忠.数理金融——资产定价和金融决策理论.科学出版社,1998.182—192[YE Zhong Xing, LIN Jian-Zhong. Mathematical Methods in the Financial Theory. Beijing:Science Press, 1998.182—192(in Chinese)]

[5] Stix G. Scientific American, 1998,278(5):46