

玻色 – 爱因斯坦凝聚体在光势阱中的量子隧穿*

范文斌^{1,2,†} 刘伍明¹

(1 中国科学院物理研究所 北京 100080)

(2 北京应用物理与计算数学研究所 北京 100088)

摘要 微观粒子因具有波动性而能以一定的概率穿过比它动能更高的势垒,这一现象称为隧道效应.玻色 – 爱因斯坦凝聚体在不同的囚禁势阱中表现出不同的隧穿特性.文章作者用周期瞬子方法首次研究了光势阱中玻色 – 爱因斯坦凝聚体的量子隧穿.研究表明,处在光势阱中的玻色 – 爱因斯坦凝聚体不仅表现出 Landau – Zener 隧穿,而且出现新的 Wannier – Stark 隧穿,Wannier – Stark 隧穿系数大约是 Landau – Zener 隧穿系数的 1000 倍,并得到了隧穿率随温度的变化规律,包括经典热激活、热助隧穿和量子隧穿.理论的计算结果与 Yale 大学和意大利 INFM 研究组关于 Landau – Zener 隧穿的实验结果相符合,同时给出了如何在实验上发现 Wannier – Stark 隧穿的参数区间.

关键词 周期瞬子,Wannier – Stark 局域化,Landau – Zener 隧穿,Wannier – Stark 隧穿

QUANTUM TUNNELING OF BOSE-EINSTEIN CONDENSATES IN OPTICAL LATTICES

FAN Wen-Bin^{1,2,†} LIU Wu-Ming¹

(1 Institute of Physics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, China)

(2 Institute of Applied Physics and Computational Mathematics, Beijing 100088, China)

Abstract In quantum tunneling a particle with energy E can pass through a high potential barrier ($V > E$) due to the wave character of the particle. Bose-Einstein condensates can display very strong tunneling depending on the structure of the trap, which may be a double-well or optical lattices. We employed for the first time to our knowledge the periodic instanton method to investigate tunneling of Bose-Einstein condensates in optical lattices. Our results show that there are two kinds of tunneling in this system, Landau-Zener tunneling between extended states of the system and Wannier-Stark tunneling between localized states of the system, and that the latter is 1000 times faster than the former. We also obtain the total decay rate for a wide range of temperature, including classical thermal activation, thermally assisted tunneling and quantum tunneling. Our results agree with experimental data in references^[1,2]. Finally, we propose an experimental protocol to observe this new phenomenon in future experiments.

Key words periodic instanton, Wannier-Stark localization, Landau-Zener tunneling, Wannier-Stark tunneling

玻色 – 爱因斯坦凝聚 (Bose – Einstein Condensation, 简称 BEC)是指理想玻色气体在极低的临界温度 T_c 以下时,将会有宏观数量的粒子开始占据最低的单粒子能态——基态.它是爱因斯坦于 1925 年预言的奇特的量子凝聚现象.直到 70 年后的 1995 年,美国国家标准技术研究所与 Colorado 大学联合实验室(JILA), Rice 大学和 MIT 三个研究小组相继

实现了具有弱相互作用的碱金属原子气体的玻色 – 爱因斯坦凝聚^[3–5],不仅加深了对凝聚体基本性质

* 国家自然科学基金(批准号 :10174095, 19725417)、国家攀登计划基金(批准号 95 – YU – 41)、中国工程物理研究院基金资助项目

2002 – 10 – 10 收到

† 通讯联系人. E-mail: wenb_fan@yahoo.com.cn

的理解,而且开辟了研究原子、量子论和多体系统性质,特别是相干物质波性质的新视窗。2001年诺贝尔物理学奖授予 JILA 的 E. A. Cornell 博士、C. E. Wieman 博士和 MIT 的 W. Ketterle 教授,以表彰他们取得的卓越成就。

1 量子隧穿

隧穿是指微观粒子具有波动性而以一定的概率通过经典禁区(例如势垒)的过程,它是一种没有经典对应的本征的量子现象。在实现玻色-爱因斯坦凝聚的过程中,始终要解决如何防止被囚禁的超冷原子遗漏出囚禁势阱的问题。实现玻色-爱因斯坦凝聚要求原子气体的温度极低,密度极高。然而随着温度的降低,原子的无规则热运动越来越弱,原子的德布罗意波长 λ_{dB} 越来越长。当 λ_{dB} 增大到(即 $n\lambda_{dB} > 2.61$)使相邻原子的德布罗意波叠加在一起时,则实现了玻色-爱因斯坦凝聚,与此同时,超冷原子的波动性也表现得越来越强,原子隧穿出势阱的能力越来越强,因此掌握玻色-爱因斯坦凝聚体在囚禁势阱中的隧穿规律,对控制玻色-爱因斯坦凝聚体的状态(例如原子波激射)具有非常重要的意义。

实验上研究玻色-爱因斯坦凝聚体的隧穿现象,从双囚禁势阱^[6]到光晶格囚禁势阱^[1]。然而,以前的理论研究集中在零温下双囚禁势阱中的玻色-爱因斯坦凝聚体的情况^[7,8]。我们所研究的是在实现玻色-爱因斯坦凝聚的临界温度 T_c 附近的一个温度范围内玻色-爱因斯坦凝聚体的隧穿率的变化规律^[9]。

由两束激光形成的周期性的光晶格势阱中的粒子,在外场的作用下形成所谓的 Wannier-Stark 问题^[10]。Wannier-Stark 问题的哈密顿量形式如下(以一维为例): $H = \frac{P^2}{2m} + V(z) + Fz$, $V(z+d) = V(z)$, d 为平移周期, F 为外场。外场的加入破坏了自由体系的平移对称性,体系的能谱变为复能谱,具有 Wannier-Stark 阶梯形式的能谱结构^[11] $E_{\alpha n} = E_{\alpha} + nFd$, $n = 0, \pm 1, \dots$, 其中 α 为布洛赫(Bloch)带指标,粒子在阶梯间的振荡周期(即 Bloch 周期)为 $\omega_B = 2\pi\hbar/(dF)$ 。实际上, Wannier-Stark 阶梯只是单带近似下 Wannier-Stark 体系的共振条件,一般的表达式应修正为 $E_{\alpha n} = E_{\alpha} + nFd - i\frac{\Gamma_{\alpha}}{2}$, $n = 0, \pm 1, \dots$ 。因此, Wannier-Stark 体系的本征态是具有一定寿命的亚稳态(称为

Wannier-Stark 态),其寿命取决于它的虚能量,寿命为 $\tau = \hbar/\Gamma_{\alpha}$ 。找到复能谱是研究 Wannier-Stark 问题的核心。处在光学晶格中的玻色-爱因斯坦凝聚体在重力场的作用下就是一个 Wannier-Stark 问题,相应 Wannier-Stark 体系的态为 Wannier-Stark 共振态^[12]。因此,已知 Wannier-Stark 体系的虚能量也就掌握了 Wannier-Stark 亚稳态的衰变情况。

2 Landau-Zener 隧穿与 Wannier-Stark 隧穿

Landau-Zener 隧穿是指不同 Bloch 带上空间非局域(扩展)态间的隧穿。一般来讲,玻色-爱因斯坦凝聚体的密度越高,凝聚原子的非线性相互作用能就越大。当超冷原子的非线性相互作用达到一定程度时,在光学晶格中,玻色-爱因斯坦凝聚体就出现奇特的非线性能谱,导致非线性 Landau-Zener 隧穿的出现^[13]。然而,如果非线性相互作用很弱,玻色-爱因斯坦凝聚体系仍然可以当作线性体系来处理。在最近 Yale 大学^[1]和意大利 INFM 研究组的实验中^[2],弱相互作用的玻色-爱因斯坦凝聚体囚禁在 30 或 200 个光学势阱中,每个阱中大约有 1000 个原子,当其在最大(峰值)密度($n_0 = 10^{13} \text{cm}^{-3}$)时,每个凝聚原子的平均场作用能为 $U_{MF} = k_B \cdot 4\text{nK}$,而动能为 $k_B \cdot 157\text{nK}$,式中 k_B 为玻尔兹曼常数,两者相比可忽略掉非线性的平均场作用能,体系可当作线性体系来处理。此时,相邻光学势阱的化学势差就由引力势 mgz 来决定(z 为垂直方向坐标)。由于光学势阱阵列沿垂直方向排列,凝聚原子在阱间重力势的驱动下做相干运动。

光学势阱和引力势的综合势阱如图 1 所示,相应的哈密顿量为 $H = \frac{P^2}{2m} + U_l(x, y) \sin^2(\frac{2\pi}{\lambda}z) + mgz$, 式中 P 为动量算符, m 为原子质量, λ 为形成光学势阱的激光波长, $U_l(x, y)$ 为(由激光横向的强度轮廓决定的)阱的深度。可见,它是一个斜的周期性

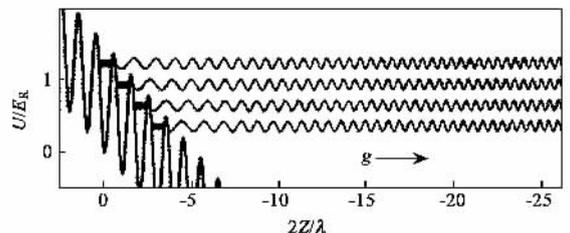


图 1 对应 Yale 大学实验参数的光势阱和引力势的综合势阱^[1]

表 1 隧穿率 Γ 的理论值与实验结果的对比

物理量	Yale 大学研究组	意大利 INFM 研究组
寿命(实验值)	$\tau_{LZ} = 50\text{ms}$ $\sigma_{WS} = ?$	$\tau_{LZ} = 0.30\text{s}$ $\sigma_{WS} = ?$
寿命(LZ理论值)	$\tau_{LZ} = 88\text{ms}$	$\tau_{LZ} = 0.39\text{s}$
寿命(WS理论值)	$\tau_{WS} = 81.57 \times 10^{-3}\text{ms}$	$\tau_{WS} = 0.38 \times 10^{-3}\text{ms}$
Wannier - Stark 隧穿率 Γ_0	$12.26 \times 10^3\text{s}^{-1}$	$2.63 \times 10^3\text{s}^{-1}$
Landau - Zener 隧穿率 Γ_{LZ}	12.37s^{-1}	2.60s^{-1}

势阱结构,倾斜的程度与重力加速度 g 成正比.

我们将玻色 - 爱因斯坦凝聚体在光势阱中的隧穿分为两种情况来考察 (1)不同 Bloch 带上空间非局域(扩展)态间的隧穿,即(绝热近似下的)Landau - Zener 隧穿 (2)局域在阱中的(Wannier - Stark)局域态间的 Wannier - Stark 隧穿. 一般来讲,对于处在周期势阱中的玻色 - 爱因斯坦凝聚体,在无外场条件下,如果阱间没有耦合,体系的能谱是分离且简并的,如果阱间有耦合,体系的简并能谱退简并为 Bloch 能带. 只要外场不够强(弱场),Bloch 能带结构就不会被破坏,此时的体系隧穿为 Landau - Zener 隧穿,体系处于 Landau - Zener 区域. 如果外场增强,体系的能带将出现 Wannier - Stark 阶梯,体系的状态也将出现 Wannier - Stark 局域态,此时体系的隧穿表现为新的 Wannier - Stark 隧穿,体系处于 Wannier - Stark 区域. 可见,外场(力)可以使体系自 Landau - Zener 区域转移到 Wannier - Stark 区域. 对于我们研究的体系,既可以通过改变外场,也可以通过改变光学势阱的参数来控制体系是处于 Landau - Zener 区域,还是处于 Wannier - Stark 区域. 不同带间的 Landau - Zener 隧穿早已在实验中被证实和测量. 然而,到目前为止,Wannier - Stark 隧穿既没有在理论上研究过也没有在实验上观测到.

计算亚稳态衰变率(寿命)既可以采用微扰的 WKB 方法,也可以采用精确的瞬子方法^[14]. 瞬子定义为任意给定模型的场方程的 Euclidean 作用的局部有效作用经典解. 在量子场论中,瞬子实际上并不代表一种“粒子”,而是代表一个量子跃迁过程,例如不同真空态之间跃迁的过程. 我们将周期瞬子的方法应用到光学晶格中的玻色 - 爱因斯坦凝聚体的隧穿研究上,考察具有有限能量 E 的冷原子自亚稳态隧穿有效势垒 $V(z)$ 的情况. 与有效势垒 $V(z)$ 对应的 Euler - Lagrange 方程为 $\frac{1}{2}m\left(\frac{dz}{d\tau}\right)^2 - [V(z) - E] = 0$. 求解该问题可以得到对应 E 一个瞬子的解,累加所有(相互独立的)瞬子对路径积分的贡献,最

终确定了体系的虚能量(Wannier - Stark 态的衰变率). 我们发现在重力的作用下该体系在 Wannier - Stark 局域区域亚稳态的衰变规律与处在 Landau - Zener 区域时相比,表现出明显不同和有趣的隧穿行为,揭示出了新的 Wannier - Stark 隧穿.

为了对比实验结果,我们将光势阱中的玻色 - 爱因斯坦凝聚体合理近似为谐振子体系,然后计算了该体系的 Landau - Zener 隧穿. 我们的计算结果与美国 Yale 大学和意大利 INFM 研究组的实验结果相符合^[1]. 试验与理论的对比见表 1.

由表 1 可见,理论与实验结果相符. 对比 Landau - Zener 隧穿和 Wannier - Stark 隧穿,我们发现后者的衰变率是前者的 1000 倍,这说明处于 Wannier - Stark 区域的玻色 - 爱因斯坦凝聚体的衰变要远远快于处于 Landau - Zener 区域的玻色 - 爱因斯坦凝聚体.

3 温度效应

对不同的亚稳态的隧穿率求统计平均,我们得到了在实现玻色 - 爱因斯坦凝聚的临界温度 T_c 附近的一个温度范围内玻色 - 爱因斯坦凝聚体的隧穿率 $\Gamma(T)$ 随温度的变化关系,如图 2 所示. 图中 $\Gamma(T)$ 曲线显示出三种不同的变化规律:高温下全部为热激活,满足 Arrhenius 变化律^[15] $\Gamma_{AR} = \frac{\omega_0}{2\pi} e^{-V_{max}/k_B T}$; 中温下的热助隧穿,即超冷原子首先热激发到光势阱中的高激发态,然后从这些激发态隧穿出光势阱,更低温下的是直接自基态的纯量子隧穿,其隧穿规律由“真空”瞬子解决定. 在中温区与低温区之间,可定义“跨越”(crossover)温度 $T_{cr} = \frac{\hbar\omega_0}{2\pi k_B}$. 其意义为 $T < T_{cr}$ 为量子隧穿, $\Gamma(T)$ 与 T 无关; $T > T_{cr}$ 为热助隧穿, $\Gamma(T)$ 随 T 增大. 对于 Yale 大学的实验, $U(x, y) = 2.1E_R$, 计算结果为 $T_{cr} = 257\text{nK}$. 为了检验理论结果,我们设计了实验验证理论结果的整套实验方案.

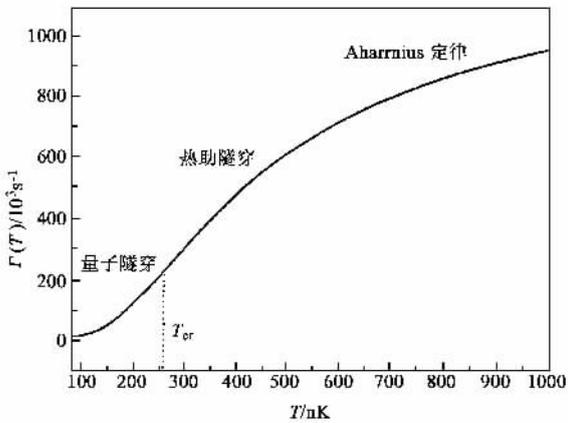


图2 对应 Yale 大学实验参数的隧穿率 $\Gamma(T)$ 随温度的变化^[9]

4 试验方案

试验方案分为两大部分:凝聚体最低(单带)亚稳态的隧穿和多带亚稳态的隧穿.为了测量最低(单带)亚稳态的隧穿,需要经过以下步骤来实现:(1)调整光晶格,使得每个阱中只有最低能态(2)加速势阱,分离最低带与高激发带(3)增加阱高,使阱中态成为局域态(4)倾斜势阱,使体系处于 Wannier - Stark 区域(5)在时刻 t 测量阱中剩余的原子数.应当注意的是,在第(3)和第(4)步过程中,时间 t 要长到可以忽略非绝热激发,同时要短到足以保证隧穿还没有开始.

为了测量多带亚稳态在高温下的隧穿,需要经过以下步骤来实现(a)将具有热分布的自由态原子装入光势阱,使得每个阱中有 n 个能带(b)加速势阱,分离最低的 n 个带与高激发带,加速度大小的选取要使得每个带上的原子数在加速过程中保持不变(c)增加阱高,使阱中态成为局域态(d)倾斜势阱,使体系处于 Wannier - Stark 区域(e)在时刻 t 测量阱中剩余的原子数.同样应当注意的是,在第(c)步和第(d)步过程中,适当选取时间 t ,以保证每个带上的布居数没有改变.

原子在 n 个带上的布居数可分以下三种情况来确定(i)无耗散)绝热地施加光学晶格,第 n 个带的布居数与自由原子的第 n 个布里渊区的布居数相同(ii)无耗散)突然施加光学晶格,第 n 个带的布居数由自由态 K 与自由态的热分布的交叠积分决定(iii)如果有耗散,耗散使冷原子形成热分布,其布居数满足能带能量的玻尔兹曼分布律.一般情况下,作为结果的布居分布不是亚稳态能量的玻

尔兹曼分布.尽管如此,可以调整第(ii)种情况来达到这些态的玻尔兹曼分布.耗散热化原子以后,加速势阱,使阱中只留最低带,阱底的基带很窄,阱底的势可以近似看作谐振子势,具有能量 $E_n = n\hbar\omega_0 + E_0$,相应的布居数分布具有 $e^{-n\hbar\omega_0/(k_B T)}$,经过第(c)步(d)步和(e)步后,这些分布就变为亚稳态分布,如果亚稳态的阱底是谐振子频率 ω 的二次方,那么这个分布就是按亚稳态能量分布的热分布,其有效温度 $T = (\omega/\omega_0)T_0$.

在光学势阱中的凝聚体通过隧穿影响其他阱中凝聚体的行为,从而改变整个凝聚体体系的状态.掌握它的隧穿规律,对人为控制玻色-爱因斯坦凝聚体的状态(例如原子波激射)具有重大的应用前景.我们的上述结果已在 Physical Review Letter 上发表^[9].

致谢 作者感谢郑伟谋研究员、梁九卿教授和徐少达教授在原始工作^[9]中的合作.

参 考 文 献

- [1] Anderson B P, Kasevich M A. Science, 1998, 282: 1686
- [2] Cataliotti F S, Burger S, Fort C *et al.* Science, 2001, 293: 843
- [3] Anderson M H, Ensher J R, Mathews M R *et al.* Science, 1995, 269: 198
- [4] Davis K B, Mewes M -O, Andrews M R *et al.* Phys. Rev. Lett., 1995, 75: 3969
- [5] Bradley C C, Sackett C A, Tollett J J *et al.* Phys. Rev. Lett., 1995, 75: 1687
- [6] Smerzi A, Fantoni S, Giovanazzi S *et al.* Phys. Rev. Lett., 1997, 79: 4950; Wilkinson S R, Bharucha C F, Madison K W *et al.* Phys. Rev. Lett., 1996, 76: 4512
- [7] Liu W M, Wu B, Niu Q. Phys. Rev. Lett., 2000, 84: 2294
- [8] Zhang Y B, Müller-Kirsten H J W. J. Eur. Phys. D, 2001, 17: 351
- [9] Liu W M, Fan W B, Zheng W M *et al.* Phys. Rev. Lett., 2002, 88: 170408
- [10] Niu Q, Zhao X G, Georgakis G A *et al.* Phys. Rev. Lett., 1996, 76: 4504
- [11] Mendez E E, Agullo-Rueda F, Hong J M. Phys. Rev. Lett., 1988, 60: 2426; Mendez E E, Bastard G. Phys. Today, 1993(6): 34
- [12] Gluck G, Kolovsky A R, Korsch H J. Phys. Rev. Lett., 1999, 83: 891
- [13] Wu B, Niu Q. Phys. Rev. A, 2001, 61: 023402
- [14] Liang J Q, Müller-Kirsten H J W. Phys. Rev. D, 1992, 46: 4685
- [15] Weiss U. Quantum Dissipative Systems. Singapore: World Scientific, 1993