

网络“建筑学”*

朱 涵¹ 王欣然¹ 朱建阳^{2, †}

(1 南京大学物理系 南京 210093)

(2 北京师范大学物理系 北京 100875)

摘 要 复杂网络系统普遍地存在于自然界与人类社会中,对它们的研究也具有广泛而重要的意义.我们如何来认识和区分晶格、Internet 和一个生态食物链?它们又是如何演化的?在这些网络背后,是否隐藏着某种无形的组织原理?近年来,借助强大的计算工具,人们对网络的认识发生了巨大的改变.文章以小世界、集团化和无标度等新的概念为中心,介绍了其中的研究进展.

关键词 复杂网络系统,小世界,集团化,无标度

The architecture of networks

ZHU Han¹ WANG Xin-Ran¹ ZHU Jian-Yang^{2, †}

(1 Department of Physics, Nanjing University, Nanjing 210093, China)

(2 Department of Physics, Beijing Normal University, Beijing 100875, China)

Abstract Complex network systems widely exist in nature and human society, hence its research carries broad significance. How do we characterize and differentiate amongst a crystal lattice, the Internet and a food web? How do they evolve? Is there some kind of invisible organizing principle, hiding behind all these networks? In recent years our view of network systems has been greatly changed due to research supported by powerful computational facilities. Focussing on new concepts such as the small-world, clustering and scale-free systems, we review the progress in this field.

Key words complex network systems, small-world, clustering, scale-free

在今天的生活中,我们经常可以听到“网络”这个词.打开电脑,上网浏览一下当天的新闻,已经成了很多人每天的习惯.当然,Internet只是网络的一种.仔细观察一下周围的事物——画在纸上的电路,一个城市中的供电系统,这个世界上所有相识或陌生的人——你会发现生活中几乎到处都有网络.此外,生物之间根据捕食与被捕食的关系,细胞中的化学物质根据是否发生反应……我们还可以定义许许多多多数不清的网络.这些网络是规则的?混乱的?还是在混乱中隐藏着某种秩序?这是我们一位亲密而又神秘的朋友.在过去的五年里,借助功能强大的计算机,人们对网络的认识发生了巨大的改变.新奇的规律、优美的结构、最新的研究成果为我们揭示了

其中的奥妙.在本文中,我们将兼顾历史,对此作一简单的介绍¹⁾.

1 个体与合作:网络系统

在数学上,一个网络可以用一个图来表示,或者说,一个网络就是一些点和它们之间的关系的集合.而在物理上,一个网络就是一个合作系统,它所展示的行为将难以从单个节点的性质直接预料.从这种

* 国家自然科学基金(批准号:10075025)资助项目
2002-11-28 收到

† 通讯联系人. E-mail: zhujy@bnu.edu.cn

1) 权威的综述可参阅文献[1, 2]

意义上说,对网络的研究是范围更广的对复杂系统的研究的一部分。

直到数年前,人们对网络的了解一直受到极大的局限。真实的网络系统极端复杂,而且千差万别。它们往往规模巨大(Internet 由数以亿计的节点组成),连接方式纷繁杂乱(想一想网页之间无数的超链接),组成元素性质迥异,整个网络不停地进行“新陈代谢”,这使得对它们的研究必须要借助简化的数学模型。

在不同的模型中,大部分的复杂性得到了简化,同时剩下的某方面性质则被突出了。比如说,在固体物理中常用的各种周期性晶格就是一种突出了网络规则性的模型。我们绝大部分的注意力,放在了位于一个毫无秘密的几何结构上的原子之间的相互作用和它们所形成的整体上,从某种角度说,放在了“物理”上(即便是这样,有时候仍然会很困难)。

上面提到的这种研究方式,就好像面对一幢大厦,我们假设自己已经很了解大厦的结构,从而集中注意力观察住在每一间房子里的人的活动。这种历史悠久的模式,曾帮助我们省去了很多精力,几乎在现有的任何一种知识中都可寻得它的踪影。那么,很显然,一条与之相互补充的思路将会是排开房子里人的不同活动而反过来去研究房子本身,或者说,研究网络的“建筑学”。

网络“建筑学”的中心内容有三条:第一,研究各种网络的结构;第二,找出结构和功能的联系;第三,设计出更优越的网络。而其中,结构是最重要的,功能由结构决定。

串联在一起的灯泡中,若一个损坏,其他灯泡也就不能亮了。但若它们是并联的,其他灯泡的工作就不会受影响。从这种角度说,并联就是一个“更优”的设计。1996年8月10日,美国俄勒冈州两条输电线发生问题,一系列滚雪球似的反应导致美国11个州和加拿大两省一片黑暗,共700万人长达16小时无电可用。2000年5月4日,爱虫病毒在 Internet 上爆发,导致全球范围数十亿美元的损失。如何设计更好的供电网络,如何改进 Internet 的结构,这都是网络“建筑学”的内容。

下面,我们将介绍其中一些核心的内容。它们是有兴趣的,了解它们并不需要专业的知识,而且我们也希望在阅读的过程中能引起您对某些日常生活经验的有趣的联想。

2 规则与混乱:两种极端

网络的一种最简单、我们也最熟悉的情况,就是

规则网络:一条链,一个圈,一种规则晶格。这样的模型非常有用,因为大部分实际的相互作用都和距离有关,例如生活在一起的人们更容易熟识,物质中的原子一般和它的近邻相互作用最强。但也有不少例外,例如网页之间的超链接。为了描述后者,一个很自然的出发点就是和规则网络相反的一种模型,随机网络。

在地上随便撒100个扣子,然后随使用线将跃入你眼帘的扣子两两串起来(也许你会重复选取,这没有关系),直到你累了为止。现在你任意选一个扣子把它拿起来,那么与它相连的那些也会被拿起。发生了什么?你拿起了一个?一小串?还是一大串?你会想这肯定与你重复的连接次数 m 有关,当然还有一点运气。匈牙利数学家 Erdos 和 Renyi 在20世纪60年代初对随机网络作了深入的研究^[3](因此随机网络也用他们的名字命名),他们发现网络的形态的确由 m 决定。在 m 比较小的时候,你很可能只拿起一小串(这时系统由很多个小串组成)。随着 m 的增加,这些小串也会不断生长(重合将导致合并)。当 m 达到一个临界值——扣子总数 n 的一半的时候,系统的结构将发生奇妙的突变,几乎所有的小串将彼此连起来。这时你随便提起一个扣子,很可能大部分的扣子都会跟随而起。如果把所有的串按大小排起来的话,最大的串具有的扣子数随 n 线性增加,而其次的串则差不多是 $1/n$ 的数量级。这有点像渗流现象,一个箱子里若全是塑料球则不能导电,这时用一些铜球替换掉塑料球,当铜球数量超过某一个临界值(不必完全替换),原先小的铜球集团将互相接触而相连,这个箱子就变得能导电了。这里面的原理是相似的¹⁾,也启发不少物理学家用研究渗流的方法来研究网络。

规则网络和随机网络都可归于20世纪,它们成为了网络科学的鼻祖,也成为几乎所有人在想到网络时首先出现在脑海里的图像。然而,在过去的几年里,人们对网络的认识发生了巨大的改变。

3 秩序与混乱:相依相系

这些改变首先来自突然涌现的极丰富的经验资料。网络虽然很复杂,拥有无数的节点与无数的链接,但是没有关系,计算机可以帮助我们。实测的对

1) 最近的研究甚至发现,随机网络中的相变和平均场渗流相变同属于一个普适类。前者的临界指数被发现和无穷维渗流相变的相等^[4]

象¹⁾包括食物链^[5],细胞内物质反应网^[6],神经网络^[7],蛋白质折叠^[8](记录元变化所连接的不同状态),WWW^[9](world wide web),Internet的架构^[10],供电网^[11],电话网^[12](记录一天之内电话机之间的通话关系),同(反)义词网络^[13](记录英文词典中标记为同义的单词),好莱坞明星网络^[14](记录共同出演过一部电影的演员),科学家之间合作关系的网络^[15](记录科学家共同发表的论文)和科学引文形成的网络^[16](记录论文之间互相引用的关系).这些数据库现在可以方便地访问、调研,借助功能强大的计算机,我们可以分析其结构(几年以前,若没有特殊的设备,研究数以百万计的节点构成的网络是不可能的).

研究结果是如此丰富,让人们既兴奋,又困惑.人们问自己:“我们周围的网络到底是怎样的?”这个问题又能否用一句话回答?

在过去的5年里,经过整理和热烈的讨论,许多新奇的想法冒了出来.对上面的问题,研究者们目前公认的最好的答案(但仍然很肤浅)是^[1,2]:“大部分的网络系统,都具有‘小世界’、高度集团化和一定范围内无标度²⁾的特征.”

下面我们来简单地解释上面这三个看似专业的概念.

“小世界”:在极庞大的网络中,节点之间的平均距离仍相对较短(距离定义为从一点“走”到另一点的步数).短到什么程度呢?大概是 $\ln N$ 的数量级(N 是系统的大小).举一个很有名的例子来说明,社会学家Milgram^[17]在1967年发现,任意一对美国人之间,大都可以找到不多于6人的路线将他们联系起来.在这条链上按顺序相邻的人两两之间相互认识,这就是著名的“六度分离”.

高度集团化:网络系统中的节点倾向于结成各种小的集团:你的两个朋友彼此之间也是朋友的可能性显然比任意两个人的要大得多.如果把一个庞大的网络画在纸上观察,我们可以很轻易地辨认出一个一个的集团.

无标度:每一个节点上所连的键数(借用化学的概念,叫做它的配位数 k)是不一样的,满足某种分布 $p(k)$.简单的分析告诉我们,随机网络的配位数满足二项式分布,像一个钟的形状,衰减得极快.但是人们最近发现^[5-16]很多实际的网络系统 $p(k)$ 衰减得远为缓慢,在很大一段范围内表现为 $p(k) \sim k^{-\gamma}$.也就是说,具有大配位数的节点(WWW中的雅虎,细胞中的ATP)远比随机网络所预期的为多.两

位美国的物理学家Barabasi和Albert在1999年对这一性质作了开创性的研究^[18],并且将其称为“无标度(scale-free)”,意指没有办法定义一个单一的标度³⁾.

目前,这三个概念占据网络“建筑学”的中心地位,大部分的研究围绕着它们而展开.同时,还有很多其他的概念和发现.比如说,“层次”的概念^[19,20]:中国的所有中学生组成一个网络,但也可以将他们归于各自的学校然后再在学校的层次上相联系,这将有助于我们分析网络的结构.然而,由于它们或者缺少普遍的证据,或者仍处于探索阶段,这里就不细叙了.

4 猜想与模型:驭简知繁

物理学中百年来,实验上的突破往往会带来很多的问题,一时将众说纷纭,最后总结而成简单的规律提交给理论家们.原先的理论,原先的模型无力解释它们,这引起人们强烈的兴趣,持续的努力.网络“建筑学”也是一样.接下来,我们就来试着重复这一方面开创性的几条思路.它们具有许多影响深远的物理思想的共同特征,很简单,也很了不起.

首先我们回到“六度分离”.前面曾经提到人与人之间“相识”这样一种“作用”是和距离有关的,而且人们十分倾向于形成一个一个的“团体”.用随机网络模拟人际关系显然是不妥的.同时,规则网络也不行.如果每一个人都只认识空间上和自己相邻的人,那么美国东海岸的一个人要传一句话到西海岸将会是一场长征.那么,为什么“六度分离”仍然会被观察到呢?很简单,两个人分别住在两个州,彼此并不认识,但是其中一个人认识自己社区的警官,警官认识县长,县长认识州长,州长又认识另外一个州的州长,然后再经过县长,警官然后找到另外一个人.这是一条快得多的路径.人类社会之所以是一个“小世界”,正因为某些长程联系存在.大量真实的网络系统(联系与距离相关)也十分类似,往往是介于规则和随机之间.

1998年,Watts和Strogatz提出了这样一种融合二者的“小世界”模型^[11,21]:一个规则格子上一部分短程联系被随机长程联系所取代(图1是一个简单

- 1) 限于长度,本文无法列出所有的结论和文献,请参阅文献[1]
- 2) 存在某些例外,见下文
- 3) 这并非放诸四海皆准,在某些网络系统中 $p(k)$ 在 k 较大时按指数衰减^[8],到底有何联系、有何原因还远不清楚

的示意图(其总节点数 N 可以很大)。他们发现,即便是选择极小的取代概率(特征概率 $p^* \sim N^{-d}$, d 为系统维数),最后节点之间的平均距离也会被极大地降低,从正比于 N 到正比于 $\ln N$ 和一个随机网络一样。同时,这个网络的高度集团化又几乎不受影响。这个模型既有随机网络的平均距离,又有规则网络的集团化,是一个典型的小世界。



图1 “小世界”网络模型^[1]

这个模型一经提出,立即引起了科学界广泛的重视。几乎每一个学科的研究者看到它都会马上想到它和自己学科的联系,可谓“仁者乐山,智者乐水”。它的应用包括传染病(计算机病毒)的传播、各种渗流问题、动力学合作系统的同步性、自组织现象、信号传输,甚至量子小世界网络等等。

在小世界模型中,由于取代短程联系的这些长程键是随机相连的,最后的配位数分布仍和实际的观测结果有很大出入。为了解决这个问题,我们不妨直接来思考一下,为什么节点之间配位数会有不同。“罗马不是一天建成的”,网络也不是。一个网络系统,譬如 WWW,并不是静止的,时时刻刻在进行着“新陈代谢”。这样一种过程可以刻画为四个元素的组合:点的生,点的灭,键的生,键的灭。然则,何者生,何者灭,何时生,何时灭?以科学引文系统为例(描述论文之间的引用关系),某一位研究者新写了一篇论文,他会选取哪些文章引用呢?首先,他将选择和自己的研究内容相关的论文;其次,他将倾向于选择那些较有影响力的论文,或者说,已经被广泛引用的论文;第三,他也会考虑时效性,就像今天的相对论研究者已经不太可能会去引用爱因斯坦最初的论文,尽管它累计的被引用次数极大。

Barabasi 和 Albert 通过上面的考虑,提出了如下的“无标度”模型^[18]:从一个任意起始状态(如一个饱和的小网络)出发,每秒钟往里面添加一个节点,从这个节点上引出 m 条键,独立地选取现存的节点之一相连,概率正比于该节点现有的配位数(满足相加为 1)。当时间很长时,人们将得到配位数按 k^{-3} 分布,而且保持恒定。这样一个“富者愈富”的

模型突出了上面三种考虑的第二条,它一针见血地指出了隐含在许许多多网络中的生长机制。这个模型更重要的意义在于使人们认识到,网络结构是由演化过程决定的。“无标度”模型与随机网络在结构上的不同在图 2 中一目了然。人们受此鼓舞,一方面提出了广义的网络演化论^[14-22](从两个元素扩展到四个元素)和各种数学处理方法,如连续性近似^[18]、主方程^[23]、速度方程^[24]等,另一方面修改相连概率的形式使之能反应其他的一些考虑,就像上文所提出的属性的影响^[25]和老化的影响^[8-26]等等。

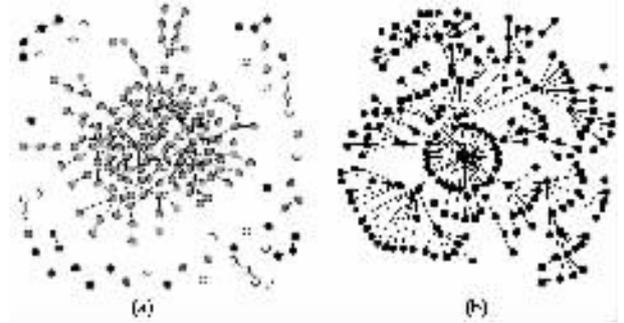


图2 (a)随机网络 (b) 无标度”网络

[来自 Callaway D. Nature 2001 410(6825) 268]

5 前景与展望 冰山一角

网络“建筑学”在数年间以惊人的速度越来越深入,但同时有一些基本的问题,包括上面提到的统一模型,一直得不到满意的回答。

真实的网络系统大多同时具有三个特征,小世界、高集团度和无标度。我们前面提到,小世界网络不能体现无标度,那么无标度模型又如何呢?遗憾的是,无标度模型中平均距离固然较短(相互联系不受空间位置影响,这是很自然的),但是集团化程度却很低^[1-20](直觉上可想而知)。这可难倒了研究者们。在人们广泛地对小世界网络和无标度网络进行各种补充和扩展的时候,所有的人也都在思考,有没有一个模型能够同时体现三种性质?

此外,如何解释那些静态网络所体现的“无标度”性质^[27-28]?如何解释许许多多只有近邻作用的“小世界”网络^[28]?

网络系统是千差万别的,同样是小世界这一性质,人类社会所呈现的和 WWW 所呈现的显然不一样,小世界模型和无标度模型所呈现出来的也不一样。这种差异具有什么更深层次的意义呢?

千差万别的网络系统,虽然大都具有三个共性,

但因此而将它们等以视之显然是不对的. 我们又如何对它们进行分类? 一种观点是根据相互作用是否与距离有关, 这固然可以很好地将晶体内原(离)子构成的网络和 WWW 区分开来, 但是, 人类社会又属于哪一类呢? 我们固然乐于和邻居们打声招呼, 同时也不忘逢年过节给远方的朋友打个电话.

思考这些问题是十分有趣的, 只需要您对生活中心各种各样的网络仔细观察, 就能获得深刻的理解.

如果说, 早期对随机网络的研究^[3](Erdos 和 Reny)主要是从数学出发, 目前的网络“建筑学”则更多的是作为统计物理学的一个分支. 统计物理的观念统治着^[29](我们用系综观点来看待网络)统计物理的方法, 平均场近似^[30]、重整化群^[31]、蒙特卡罗模拟和主方程^[23, 29]等等得到了有效的应用. 通过向成熟的物理学学习, 年幼的网络“建筑学”在很多方面受益匪浅. 随着越来越多的物理学家的参与, 不断涌现新的方法和概念借自其他分支, 如场论^[32]、量子统计^[33]等等. 与渗流、临界现象^[34]、玻色-爱因斯坦凝聚^[35]等有趣的联系时时引起广泛的兴趣. 图 3 为用网络语言来表现团簇的能量面(能量最小值表现为节点, 跃迁态则表现为键)的示意图. 2002 年, Doye^[28]观察了由 14 个原子形成的 4196 个“点”和其间 87219 个“键”, 并且发现该网络同时具有“小世界”和“无标度”的特征. 其原因尚无法圆满解释.

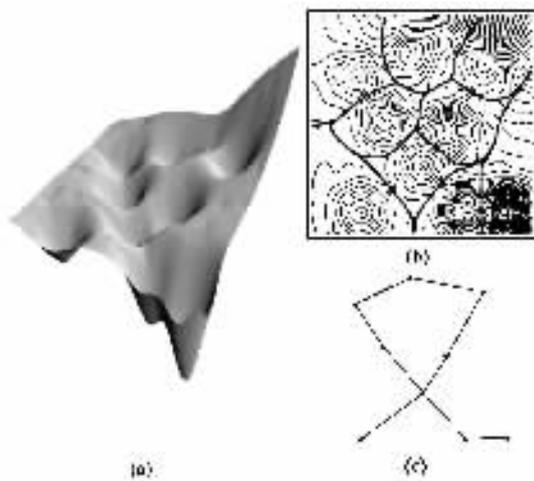


图 3^[28] (a) 团簇中的能量面 (b) 等势线描述, 最小值用点表示, 跃迁态用一对短线表示 (c) 网络描述

在过去的短短 5 年中, 我们对网络系统的认识经历了惊人的极大改变. 我们通过实际观测、模型和理论分析, 了解到真实的网络既不是规则的, 也不是随机的, 而是共同拥有着某些已被发现或未被发现

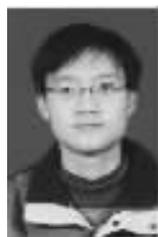
的内在的组织原理. 这些进展已经创造了统计力学一个丰产的分支, 同时也引起了社会学家、生物学家和计算机科学家们广泛的兴趣. 我们已经发现了很多原先未知的规律, 而这一切相信只是冰山的一角, 那些尚存谜团的问题也许还隐含着许多新的概念同样令人兴奋. 同时, 现有的进展将帮助我们在不同场合设计更好的网络, 譬如改进 Internet 使之具有更强的自我修复和容错能力, 设计更好的激光阵列使其通过相互作用更容易达到同步等等. 从长远的角度说, 更加重要的是形成一种网络的思维方式, 当您遇到许许多多的个体按照某种方式联系在一起的时候, 您是否应该想到, 这不是一个网络? 它有着怎样的结构?

参 考 文 献

- [1] Albert R, Barabasi A. Rev. Mod. Phys., 2002, 74 : 47
- [2] Strogatz S H. Nature, 2001, 410 : 268
- [3] Erdos P, Renyi A. Publ. Math. Debrecen, 1959, 6 : 290 ; Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci., 1960, 5 : 17 ; Bull. Inst. Int. Stat., 1961, 38 : 343
- [4] Christensen K *et al.* Phys. Rev. Lett., 1998, 81 : 2380
- [5] Williams R J, Martinez N D. Nature, 2000, 404 : 180
- [6] Jeong H *et al.* Nature, 2000, 411 : 41
- [7] Achacoso T B, Yamamoto W S. *AY's Neuroanatomy of C. elegans for Computation.* Boca Raton, FL : CRC Press, 1992
- [8] Amaral L A N *et al.* Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 2000, 97 : 11149
- [9] Albert R, Jeong H, Barabasi A-L. Nature, 1999, 401 : 130
- [10] Vazquez A *et al.* Phys. Rev. E, 2002, 65 : 066130
- [11] Watts D J, Strogatz S H. Nature, 1998, 393 : 440
- [12] Aiello W, Chung F, Lu L. In Proc. 32nd ACM Symp. Theor. Comp., 2000
- [13] Sigman M, Cecchi G. Proc. Nac. Acad. Sci. USA, 2002, 99 : 1742
- [14] Albert R, Barabasi A-L. Phys. Rev. Lett., 2000, 85 : 5234
- [15] Newman M E. J. Proc. Nat. Acad. Sci USA, 2001, 98 : 404
- [16] Redner S. Eur. J. Phys. B, 1998, 4 : 131
- [17] Milgram S. Psychol. Today, 1967, 2 : 60
- [18] Barabasi A-L, Albert R. Science, 1999, 286 : 509
- [19] Ravasz E *et al.* Science, 2002, 297 : 1551
- [20] Ravasz E, Barabasi A-L. arXiv : cond-mat/0206130
- [21] Watts D J. *Small Worlds.* Princeton : Princeton Univ. Press, 1999
- [22] Dorogovtsev S N, Mendes J F F. Europhys. Lett., 2000, 52 : 33
- [23] Dorogovtsev S N, Mendes J F F, Samukhin A N. Phys. Rev. Lett., 2000, 85 : 4633
- [24] Krapivsky P L, Redner S, Leyvraz F. Phys. Rev. Lett., 2000, 85 : 4629

- [25] Bianconi G , Barabasi A-L. arXiv : cond-mat/0011029
 [26] Dorogovtsev S N , Mendes J F F. Phys. Rev. E , 2000 , 62 : 1842.
 [27] Mukherjee G , Manna S S. arXiv : cond-mat/0207476
 [28] Doye J. Phys. Rev. Lett. 2002 , 88 : 238701
 [29] Dorogovtsev S N , Mendes J F F , Samukhin A N. arXiv : cond-mat/0204111
 [30] Newman M E J , Moore C , Watts D J. Phys. Rev. Lett. , 2000 , 84 : 3201
 [31] Newman M E J , Watts D J. Phys. Lett. A , 1999 , 263 : 341
 [32] Burda Z , Correia J D , Krzywicki A. arXiv : cond-mat/0104155 , 2001
 [33] Zizzi P A. arXiv : lanl/gr-qc/0103002 , 2001

- [34] Pekalski A. Phys. Rev. E , 2001 , 64 : 057104
 [35] Bianconi G , Barabasi A-L. arXiv : cond-mat/0011224 , 2000



作者简介 朱涵,男,1983年生,汉族,南京大学物理系2000级本科生。大学二年级开始参加课题研究,主要涉及晶格自旋系统的非平衡动力学以及复杂网络系统,已发表SCI论文5篇:Physical Review E (3篇)、Chinese Physics Letters (1篇)、Chinese Physics (1篇)。

· 物理新闻与动态 ·

测定砖块的年代 (Watching bricks age)

长期以来,土木工程师和材料科学家们都知道,由粘土烧制成的砖块或陶瓷都会吸收大气中的水分而发生膨胀。过去对这种受潮膨胀的研究都局限在短时间内,即它们刚出炉不久后的一段时间内的情况。近来英国曼彻斯特大学与英国爱丁堡大学的科学家们却从实验的角度研究砖块在长时间内受潮后发生膨胀的行为及规律,这个时间间隔可以长达1900年以上,即追溯到罗马时代。以A. Wilson教授为首的研究组认为:在长时间的尺度下,砖块吸收水分后的膨胀与时间成幂函数关系,而不是短时间尺度内已知的对数膨胀规律。确切地说,长时间尺度下受潮膨胀所遵守的是 $1/4$ 幂律。这个规律反映了砖块或陶瓷在吸收水分子后,水分子在材料内部是通过原子尺度的路径在进行扩散。对于在砖土结构的建筑工程方面,这个新发现的幂函数规律将可以让设计者们清楚地了解砖块在经受住一个世纪或更长长时间后受潮膨胀的情况,同时还能发现其他导致砖块出现裂缝等的原因。幂函数规律也有利于考古学家们推算砖块或陶瓷的制造年代,也就是说,考古学家可以测量一小块陶瓷片的尺寸,然后烘干所有从烧制后吸收的水分,再根据烘烤后陶瓷片收缩后的尺寸来确定陶瓷片的制造年代。

(云中客 摘自 Physical Review Letters , 28 March , 2003)

血管网络 (Blood vessel networks)

最近意大利若干研究所的科学家们联合提出了一个新的数学模型,其目的是描述与研究血管形成的机制。以A. de Candia教授为首的研究组细致地模拟在一个凝胶基底上无序地散布着一群细胞,在一些作了标记的化学诱导细胞的作用下,细胞将在培育的溶剂中移动并相互聚集成团。当溶液中的细胞密度低于某一临界值时,数学模拟以及在试管中进行的试验都显示出存在着一些分离的细胞团簇。但在临界密度以上时,分离很远的细胞团簇就会在大尺度范围内发生连接,这个临界密度的数值是根据逾渗极限给出的。当细胞密度正好等于逾渗阈值时,细胞团簇形成的网络是一个分形,其分形维数为1.9。

除此之外,实验结果与理论模型都发现,如果对细胞用不同的尺寸去观察时,细胞网络的分维数是不同的,例如用0.8 mm以下的尺寸观察时,细胞网络的分维数将降低成1.5左右。科学家们由此推测,这种分维数的改变可能标志着在初始阶段时细胞网络形成的动力学发展过程。由于数学模型与在凝胶溶液中的试管实验结果的一致性,使我们可以期望下一步可以将这些结果应用到生命体内血管网络的形成上,从而能对血管网络的形成机理有更为深入的理解,另一方面,还能对伴随着癌变或其他疾病发生时,从病理学角度上来研究对血管网络形成的影响。

(云中客 摘自 Physical Review Letters , 21 March , 2003)