

几何量子计算^{*}

朱诗亮¹ 汪子丹^{2,3,†}

(1 华南师范大学物理与电信工程学院 广州 510631)

(2 香港大学物理系 香港)

(3 中国科学技术大学材料科学与工程系 合肥 230026)

摘要 实现可集成的量子计算的关键步骤是实现保真度足够高的一组普适量子逻辑门. 最近几年发展的几何量子计算使用几何位相来实现量子逻辑门,其特点是利用几何位相的整体几何性质来避免某些局域的无规噪声的影响,从而实现较高保真度的量子门. 文章先简要介绍常规几何量子逻辑门的概念,然后重点介绍最近提出的非常规几何量子计算. 量子计算中使用的逻辑门的总位相既包含有几何位相,又包含有动力学位相,但它仅依赖于一些几何特征. 而且,对于任意的量子位输入态,在量子门操作过程中积累的位相要么是零,要么是仅依赖几何特征的位相.

关键词 几何量子计算,量子门,几何位相,离子阱

Geometric quantum computation

ZHU Shi-Liang¹ WANG Zi-Dan^{2,3,†}

(1 School of Physics and Telecommunication Engineering, South China Normal University, Guangzhou 510631, China)

(2 Department of Physics, University of Hong Kong, Pokfulam Road, Hong Kong, China)

(3 Department of Materials Science and Engineering, University of Science and Technology of China, Hefei 230026, China)

Abstract The physical implementation of a universal set of high-fidelity quantum gates is a key step in quantum computation. Geometric quantum computation is a promising scenario to achieve high-fidelity quantum gates. In this scheme, quantum gates are realized based on geometric phases, which are dependent only on some global geometric features. In this Communication, we present an overview of geometric quantum computation, especially the unconventional geometric quantum computation recently proposed by us. In the latter scheme, the total phase accumulated in a gate operation consists of both geometric and dynamic components, but for any input state it still only depends on the global geometric features.

Key words geometric quantum computation, quantum gate, geometric phase, trapped ions

量子计算机已被证明可用来处理某些用经典计算机很难完成的任务,它的实现将引起信息技术新的革命. 量子计算机的实现原则上已不存在不可逾越的障碍,但技术上的实现仍有严重的困难,其中一个主要障碍是如何克服消相干的影响. 量子计算的优越性体现在它利用了量子系统与经典体系的两个本质差别:量子态的叠加及纠缠. 但是这两个性质都很脆弱,很容易被称为消相干的过程破坏掉. 如何克服消相干的影响已成为能否制造出真正实用的量子计算机的关键. 量子计算由量子逻辑门来操作. 最近

的估计表明^[1],如果每一个量子门的保真度能达到99.99%,则通过量子纠错编码方式,在存在消相干时仍可以实现大规模的量子计算. 但要达到如此高的保真度,量子门本身必须具有内在的容错(fault-tolerant)能力.

^{*} 香港RGC基金(批准号:HKU7114/02P)、香港大学CRGC基金、国家自然科学基金(批准号:10204008)和广东省自然科学基金(批准号:021088)资助项目

2003-12-03 收到

[†] 通讯联系人. E-mail: zzwang@hkuc.hku.hk

现在已经提出许多方案用来实现可容错的量子计算,每种方案都可克服某些消相干效应的影响,其中一种很有吸引力的方案是利用几何位相^[2-4]来实现量子门,而由这种逻辑门构成的量子计算被称为几何量子计算^[5-9].已经证明普适的量子计算可由一个非平庸的二量子比特逻辑门及两个非对易的单量子比特逻辑门实现^[10].在一个具体的量子体系中,设计合适的可容错的普适量子门是一个重要的步骤.可容错的普适量子门已被证明可用几何位相来实现.量子门可表示为么正算符 $U(\{\gamma\})$,其中 $\{\gamma\}$ 是一组在实现量子门操作中积累的位相.通常每一位相 γ 都同时含有几何与动力学部分.如果量子门 $U(\{\gamma\})$ 中的位相 γ 是纯几何位相(即动力学位相为零),则该量子门被称为几何量子门.由于几何量子门中的几何位相是一个整体的位相,某些局部的无规涨落的影响可被忽略,因此具有内在的容错优点而受到广泛的重视.几乎所有重要的潜在量子计算模型,如核磁共振、超导约瑟夫森结、离子阱及半导体量子点等体系,都在最近被仔细研究过是否适合用来做几何量子计算.

我们先简单介绍几何位相.说明几何位相的最简单例子是随时间作周期性(周期为 τ)变化的外磁场 $B(t)$ 中的自旋 $1/2$ 粒子.如果 $B(t)$ 的变化足够缓慢,保证体系是绝热演化,即初态是能量本征态的态矢在演化中一直仍保持在与之对应的瞬时能量本征态中.当 $B(t)$ 循环一周时,Berry 证明了除熟知的动力学位相外,还存在一个非可积的几何相因子,它的值是 $\mp \Omega/2$,这里 Ω 是外磁场单位方向组成的轨迹所围的面积(或立体角), \mp 号由系统所处的能量本征态确定^[2].这个位相就是著名的(绝热)Berry 位相.在非绝热条件下,存在非绝热几何位相.如果态矢在 τ 时间时和初态仅相差一个位相,这叫循环演化.在循环演化中,几何位相有类似的结果,如也可写成 $\mp \Omega_p/2$,但 Ω_p 是定义在投影希尔伯特空间中由自旋极化矢量的演化轨迹所围的面积.循环但非绝热几何位相被称为 AA 位相,它在绝热条件满足时和 Berry 位相一致^[3,4].几何位相已被发现在许多物理领域中有重要应用.

现在我们用核磁共振体系来简单说明(几何)条件相移门的实现.考虑两比特核磁共振体系:控制比特 C 和目标比特 T.条件相移门是指在门操作中目标量子比特积累的位相依赖于控制比特的状态.假设每个比特可分别由磁场 B_C 和 B_T 控制,则体系的哈密顿量可写成

$$\hat{H} = -\frac{1}{2}B_C \cdot \sigma_C - \frac{1}{2}B_T \cdot \sigma_T + J\sigma_C^z\sigma_T^z, \quad (1)$$

这里 σ_C 和 σ_T 是控制比特 C 和目标比特 T 的 Pauli 算符, σ_C^z 和 σ_T^z 是 z 方向的 Pauli 算符, J 是两比特的耦合常数.明显地, T 比特感受到的有效磁场是 $B_T \pm 2Je_z$,这里 e_z 是 z 方向的单位矢量.如果 B_T 是旋转磁场,则 B_T 旋转一周时得到的绝热及非绝热位相及条件相移都可用图 1 形象地表示出来.如果能通过适当方法把门操作中的动力学位相消除后,就可以实现条件几何相移门.

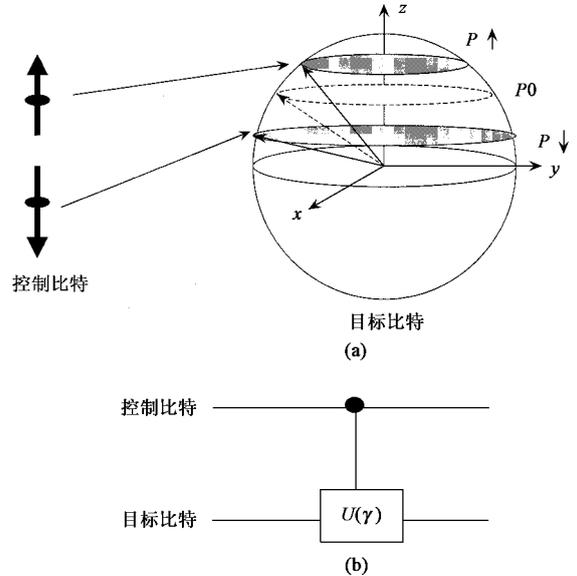


图 1 (a) 条件相移的实现示意图.当控制比特处于不同的态时,目标比特感受到的有效磁场不同,操作时积累的位相也就不同.在旋转磁场时(1)绝热条件下,图中的目标比特部分可看成是参数空间. P_0 是实际外加磁场的单位方向组成的轨迹, $P \uparrow$ ($P \downarrow$) 分别是控制比特处于 $|\uparrow\rangle$ ($|\downarrow\rangle$) 时目标比特实际感受到的磁场的单位方向组成的轨迹.(2)在非绝热条件下,图中的目标比特部分可看成是布洛赫球,是投影希尔伯特空间. P_0 是只考虑实际外加磁场时的自旋极化矢量演化轨迹,而 $P \uparrow$ 和 $P \downarrow$ 分别是控制比特处于 $|\uparrow\rangle$, $|\downarrow\rangle$ 时目标比特实际自旋极化矢量演化轨迹.在两种情况中,设 $P \uparrow$ 和 $P \downarrow$ 轨迹对应的立体角为 Ω_+ 和 Ω_- ,则 $\mp \Omega_{\pm}/2$ 是控制位处于 $|\uparrow\rangle$, $|\downarrow\rangle$ 时的几何位相.(b) 二比特条件相移门

按照传统的智慧,几何量子计算的关键应是如何去掉(或避免)动力学位相.一个简单的方法是选择暗态(能量为零的态)为量子比特,因此动力学位相自然总是零^[7].另外一种较普遍的方法是多回路方法^[6,8,9],即选择合适的哈密顿量,在该哈密顿量的控制下,体系沿几个特别的回路演化,使得动力学位相虽然在每个回路中可能都不为零(不平庸),但它们在不同回路中相互抵消,而几何位相相加成为

非平庸位相. 与用动力学位相做成的逻辑门相比, 上面的消去(避免)动力学相位的方法需要精确地选择哈密顿的控制参量, 或更多的操作, 因而可能引入一些额外误差.

其实, 几何量子计算的核心思想应是量子门中的位相具有整体几何性质. 因而, 我们自然要问是否可以在仍有非平庸动力学位相存在的情况下, 去实现或设计具有整体几何性质的量子门. 当然, 如果可以找到这类与前述几何量子门不一样的非常规逻辑门, 在实现可容错的量子计算中应有重要价值.

在最近的工作中, 我们回答了上述重要问题, 且提出一类新的被称为非常规几何量子逻辑门的方案^[11]. 这类几何量子门的奇特之处在于总位相中既包含有几何位相, 又包含有动力学位相, 但它的确仅依赖于一些几何特征. 我们的关键设想在于注意到下述事实: 如果动力学位相 γ^d 和几何位相 γ^g 成比例, 即

$$\gamma^d = \eta\gamma^g \quad (\eta \neq 0, -1), \quad (2)$$

η 是一个至少不依赖于部分参数的比例常数, 则明显的, 即使仍有非平庸的动力学位相存在, 总位相仍仅依赖于整体几何性质. 在这里 $\eta = 0$ 时, 总位相是常规几何位相, 而 $\eta = -1$ 时是平庸的. 假设在量子门中的位相满足(2)式的总位相 $\gamma = (1 + \eta)\gamma^g$, 则该量子门也具有整体几何性质. 对比于前述文献[5—9]中提出的已清除(避免)了动力学位相的量子门, 这种新提出的几何量子门可被称为非常规几何量子门. 这类量子门拥有常规几何量子门的优点, 但比起常规几何量子门, 我们这里提出的逻辑门因不需要消除动力学位相, 在某些系统中就可以简化实验操作. 下面, 我们用实际的物理系统具体讨论非常规几何量子门的实现.

离子阱中囚禁的超冷离子是最早提议用来做量子计算的体系之一^[12]. 在这种体系中, 离子被限制在谐振子势中, 并可用激光进行操纵来进行量子计算. 这种体系用离子的两个不同状态 $|\uparrow\rangle$ 和 $|\downarrow\rangle$ 表示量子比特. 我们可讨论仅有两个量子比特的情况. 当合适地选择激光时, 可以在离子处于 $|\downarrow\uparrow\rangle$ 或 $|\uparrow\downarrow\rangle$ 时激发离子的相对运动态, 使系统的有效哈密顿量可近似为 $\hat{H}(t) = i\Omega_D(a^+ e^{-i\delta t + i\phi_L} - a e^{i\delta t - i\phi_L})$. 但当离子处于 $|\downarrow\downarrow\rangle$ 或 $|\uparrow\uparrow\rangle$ 时, 不激发, 系统的有效哈密顿量为零^[13]. 这里 a 和 a^+ 是表示相对运动态的谐振子的消灭和产生算符, δ 是激光的失谐, ϕ 是驱动场的相位及 $\Omega_D = -(F_{0\downarrow} - F_{0\uparrow})z_{0s}/2z_{0s}$ 是谐振子基态波函数的宽度. $F_{0\downarrow}$ ($F_{0\uparrow}$) 是作用到

$|\uparrow\rangle$ ($|\downarrow\rangle$) 态的偶极矩力. 如果选择 $\{|\downarrow\downarrow\rangle, |\downarrow\uparrow\rangle, |\uparrow\downarrow\rangle, |\uparrow\uparrow\rangle\}$ 为基, 在循环演化时, 得到 4×4 矩阵形式的相位门: $U(\gamma) = \text{diag}(1, e^{i\gamma_{\downarrow\downarrow\uparrow}}, e^{i\gamma_{\uparrow\downarrow\uparrow}}, 1)$, 其中 $\gamma_{\downarrow\downarrow\uparrow} = \gamma_{\uparrow\downarrow\uparrow} = \gamma$. 这个相位门在 $\gamma \neq n\pi$ (n 是整数) 时是非平庸两比特量子门^[10]. 这个体系的演化产生的位相可以解析求出^[11]. 当量子体系在时间 $[0, t]$ 中演化时, 如果写成 $U(t)|\Psi(0)\rangle = |\Psi(t)\rangle = \exp(i\gamma)|\Psi(0)\rangle$, γ 即是 $|\Psi(t)\rangle$ 和 $|\Psi(0)\rangle$ 之间的总位相差. 几何位相 γ^g (可是非绝热非循环的) 可被定义为总位相 γ 和动力学位相 γ^d 之差. 在现在讨论的系统中, t 时间的波函数 $|\Psi(t)\rangle$ 可以表示为 $|\Psi(t)\rangle = U_t|\Psi(0)\rangle$, 并且演化算符 U_t 可以解析求出. 因此, 根据 γ^d 和 γ^g 的定义和表达式, 可以求出在任意时间内有

$$\gamma^d(t) = -2\gamma^g(t) = 2\gamma(t) = 2\Phi(t), \quad (3)$$

这里 $\Phi(t) = (\Omega_D/\delta)[\sin(\delta t) - \delta t]$.

对(3)式给出的结果, 我们给出如下几点评述: (1) 当演化形成一闭合路径时, $\delta t = 2\pi$, $\Phi = -2\pi(\Omega_D/\delta)^2$. 则选择合适的参数 Ω_D 和 δ , 可以得到非平庸的两量子比特门. 如选择 $|\Omega_D/\delta| = 1/2$, 可得到非平庸的相位门 $U(\pi/2)$. 在对 $|\uparrow\rangle$ 态作单比特 $-\pi/2$ 旋转后, 即是普适的控制 π 相位门. (2) 值得指出的是, 这个系统中非平庸的二量子常规几何位相门是实现不了的. 因为当动力学位相是平庸时 ($\gamma^d = 2\pi \times \text{整数}$), $\gamma^g = \pm\pi$. 但 $U(\pm\pi)$ 是一个平庸的量子门. (3) 最值得注意的是, 这个体系中所有能实现的非平庸二量子相位门 $U(\gamma)$ 都可以看作是 $\eta = -2$ 的非常规几何量子门. 而且, 这里的比例常数 η 的确不依赖于系统的参数, 如门的操作速度、激光的失谐量、位相及强度等. 所以, 相位门 $U(\gamma)$ 中的位相 γ 虽然包含有非平庸的动力学位相, 但它的确只依赖于几何特征. (4) 同样有趣的是, 常规的几何量子门并未在现有的实验中实现, 但这里讨论的非常规的几何量子门已经在实验中实现^[13], 并且实验所得到的高保真度和该相位门仅由整体几何性质决定有密切关系. 如该位相仅由路径所围的面积确定, 而不依赖于初态、路径形状及完成循环演化的速率. 这些整体性质都是原来吸引我们研究常规几何量子计算所认为应具有的优点. (5) 尤其要说明的是, 在我们给出的这个非常规几何量子门的例子中, 位相不依赖于谐振子的初态. 另外, 对于任意的量子位输入态, 在量子门操作过程中积累的位相要么为零, 要么是仅依赖几何特征的位相, 因此是一个完全几何的量子门. 而在常规几何量子门操作中, 仅有某些确定的

输入态,其积累的位相才具有几何特征;而在不是以暗态为量子比特的系统中,在门操作后积累的位相对任意初态都完全是常规几何位相的量子门到现在也还没找到。(6)另外的一个特点是(3)式在任意演化时间都成立,这导致实现的相位门对小的非循环因素(如循环时间没有控制好等)不敏感。详细的计算表明,如时间的控制有 $\Delta\tau$ 的不确定性,则相位的偏离正比于 $(\Delta\tau/\tau)^3$,是一个可忽略的高阶小量。

另外值得指出的是(2)式还可进一步推广为 $\gamma^d = \alpha^g + \eta\gamma^g$,其中 α^g 是一个仅依赖于演化路径几何特征的系数。当 $\alpha^g \neq 0$ 时, η 可以是任意常数;当 $\alpha^g = 0$ 时, $\eta \neq 0, -1$ 。这一类推广的非常规的几何位相门,亦可在实际的物理系统中实现,如NMR,在此就不赘述了。

总之,在我们提出的非常规几何量子计算方案中,逻辑门的总位相同时包含有几何位相和动力学位相,但它的确仅依赖于一些几何特征,并可在实际的物理系统中实现。另外,除了本文介绍的例子外,可验证还有其他一些实现量子门的方案^[14-16]可归类于非常规几何量子计算。显然,非常规几何量子计

算方案为实现高保真度的量子门提供了新思路,对进一步促进有关的理论研究,特别是激发实验的兴趣,起相当积极作用。

参 考 文 献

- [1] Steane A M. Phys. Rev. A, 2003, 68 :042322
- [2] Berry M V. Proc. R. Soc. London Ser. A, 1984, 392 : 45
- [3] Aharonov Y, Anandan J. Phys. Rev. Lett. , 1987, 58 :1593
- [4] Zhu S L, Wang Z D. Phys. Rev. Lett. , 2000, 85 : 1076
- [5] Zanardi P, Rasetti M. Phys. Lett. A, 1999, 264 : 94
- [6] Jones J A *et al.* Nature, 2000, 403 : 869
- [7] Duan L M, Cirac J I, Zoller P. Science, 2001, 292 : 1695
- [8] Zhu S L, Wang Z D. Phys. Rev. Lett. , 2002, 89 : 097902
- [9] Zhu S L, Wang Z D. Phys. Rev. A, 2003, 67 : 022319
- [10] Lloyd S, Phys. Rev. Lett. , 1995, 75 : 346
- [11] Zhu S L, Wang Z D. Phys. Rev. Lett. , 2003, 91 : 187902
- [12] Cirac J I, Zoller P. Phys. Rev. Lett. , 1995, 74 : 4091
- [13] Leibfried D *et al.* Nature, 2003, 422 : 412
- [14] Sorensen A, Molmer K. Phys. Rev. A, 2000, 62 : 022311
- [15] Milburn G J, Schneider S, James D F V. Fortschr. Phys. , 2000, 48 : 801
- [16] Zheng S B. Phys. Rev. Lett. , 2003, 90 : 217901



无锡市苏威试验设备有限公司

WUXI SUWEI TESTING EQUIPMENT CO., LTD.

苏威公司是一家集科研、设计及制造各类模拟气候环境试验设备的专业性企业。本公司现已通过 ISO 9001:2000 质量管理体系认证。产品有：适于作步入式恒温、高低温、高低温湿热、高低温交变湿热、恒定湿热、高温恒温、盐雾腐蚀、滴水淋雨、紫外灯(氙灯)耐气候、砂尘、霉菌、振动、跌落等各种试验的试验设备。

<http://www.wxsuwei.com>



GDJS-系列

高低温交变湿热试验箱 高低温交变湿热试验箱



GDJS-系列

高低温交变湿热试验箱



GDJS-系列

高低温交变湿热试验箱



YWX/Q-系列

盐雾腐蚀试验箱

地址：无锡市山北双河大庄1号

电话：0510-3019806(总机)

邮编：214037

销售热线：0510-3725132 3723557

传真：0510-3739455

手机：0-1390619778

北京办事处：010-68633994 13671120840

广州办事处：020-86259303 13672423931

西安办事处：029-87441566 13689268474