

# 在腔耦合的超导量子比特中实现几何量子信息处理\*

朱诗亮<sup>1</sup> 汪子丹<sup>2,3</sup>

(1 华南师范大学物理与电信工程学院 广州 510631)

(2 香港大学物理系 香港)

(3 南京大学固体微结构物理国家重点实验室 南京 210093)

**摘要** 用量子空腔耦合的超导电荷比特器件被认为是实现量子信息处理的相当有希望的体系之一. 如何在这种可集成的量子体系中实现高保真度的操作是量子信息处理领域的重要课题. 文章介绍作者最近提出的在量子腔耦合的超导量子比特中用具有内禀容错功能的几何操作来实现普适量子逻辑门, 产生多比特量子纠缠及实现量子纠错编码的一个可行方案.

**关键词** 超导量子比特, 几何量子信息处理, 多比特量子纠缠

## Geometric quantum information processing with superconducting qubits inside a cavity

ZHU Shi-Liang<sup>1</sup> WANG Zi-Dan<sup>2,3</sup>

(1 School of Physics and Electronic Communication Engineering, South China Normal University, Guangzhou 510631, China)

(2 Department of Physics, University of Hong Kong, Pokfulam Road, Hong Kong, China)

(3 National Laboratory of Solid State Microstructures, Nanjing University, Nanjing 210093, China)

**Abstract** Devices based on superconducting-qubits coupled through a microwave cavity show certain promise for quantum information processing. The development of an experimentally feasible approach to achieve high fidelity operation in this scalable system is very important. We introduce here a feasible scheme that can implement a universal set of quantum gates and produce multiqubit entanglement as well as construct quantum error-correcting codes based on the same set of fault-tolerant geometric quantum operations.

**Keywords** superconducting qubit, geometric quantum information processing, multiqubit entanglement

可以用来做量子信息处理的物理体系有很多, 其中超导量子比特由于其原则上具有可扩展(集成)性受到广泛的重视<sup>[1]</sup>. 不过, 由于固态体系的退相干时间普遍很短, 实验研究目前还主要集中在一或二量子比特体系中. 在该体系中实现一套普适量子逻辑门, 产生多比特量子纠缠, 实现量子纠错编码等重要的量子信息处理对量子信息的研究具有重要的意义.

量子空腔耦合的超导量子比特被认为是用来做量子计算的最有希望的体系之一<sup>[2-7]</sup>. 超导比特和量子空腔的强耦合已在实验中被观察到<sup>[2]</sup>. 这些研究打开了一扇新的研究物质和光的基本相互作用的大门. 与离子阱(或量子腔中的原子)相比, 超导量

子比特起相当于离子(原子)的作用. 因此, 在离子阱或量子腔量子计算模型中的一些好的方案可以被借用到量子空腔耦合的超导量子计算体系中来. 在研究离子阱量子计算模型中, Molmer 和 Sorensen 提出了一个优美的方案来实现任意量子比特的 Greenberger-Horne-Zeilinger (GHZ)形式的纠缠态<sup>[8,9]</sup>. 本文将介绍如何在量子空腔耦合的超导量子比特系统中实现类似的多比特量子纠缠的方案. 进而, 我们会说明用同一方法可实现普适量子计算和构造量子

\* 国家自然科学基金(批准号:10204008,10429401,10334090), 教育部“新世纪优秀人才支持计划”和香港 RGC 基金(批准号: HKU7114/02P)资助项目

2005-05-17 收到

纠错编码<sup>[7]</sup>. 希望我们的方法可以引起这方面的实验研究兴趣.

我们先简要介绍 Molmer - Sorensen 的产生多粒子纠缠态的方案<sup>[8,9]</sup>. 置放于离子阱中的  $N$  个离子在特定条件下可被看成是自旋为  $1/2$  的量子比特和谐振子相互作用的系统. 图 1 是当  $N = 2$  时系统的能级示意图, 这里  $\hbar\omega_0$  是二能级粒子的能级分裂,  $\omega_c/2\pi$  是某个离子集体运动模的频率. 先利用激光冷却和光学抽运技术使粒子和集体运动模都处于基态, 即  $|\psi(0)\rangle = |00\dots 0\rangle$  态, 这里最后一位表示集体运动模的态, 其他表示离子的态. 给全部离子同时照射两束频率分别为  $\omega_0 \pm \delta$  的光, 这里  $\delta$  是光相对于集体运动模的失谐, 它的值接近但不等于  $\omega_c$ . Molmer - Sorensen 证明在旋转波和 Lamb - Dicke 近似下描写该体系的演化算符可写成  $U(\gamma) = \exp(i\gamma J_x^2)$ , 这里  $\gamma = 4\chi t/\hbar^2$ ,  $J_x = \sum_j \sigma_x^j$ ,  $\chi = \eta^2 \Omega^2 \omega_c / 2(\omega_c^2 - \delta^2)$ ,  $\eta$  是 Lamb - Dicke 参数,  $\Omega$  是 Rabi 频率. 当  $N$  是偶数时,  $U(\pi/2)|\psi(0)\rangle$  可直接产生被称为 GHZ 态的  $N$  粒子最大纠缠态,

$$|\psi_{\text{GHZ}}\rangle = \frac{1}{2} [ e^{i\pi/4} |00\dots 0\rangle + e^{i\pi(-1/4+N/2)} |11\dots 1\rangle ] \quad (1)$$

如  $N$  是奇数, 则在使用  $U(\pi/2)$  之前, 之中或之后使用一附加操作  $\exp(-i\pi J_x/2)$ , 则类似(1)式描述的 GHZ 量子态也可以产生. 这个方法的突出优点是不用单独操纵每个粒子, 多粒子纠缠态可在一步操作中产生. 另外, 如图 1 所示的各种中间态的占据可以被忽略, 同时要生成的纠缠态和集体运动模的初态无关. 因此, 集体运动模不是必须冷却到基态(但要求 Lamb - Dicke 近似成立). 这个方法被成功地用来在实验中实现 4 粒子纠缠<sup>[10]</sup>. 不过, 该方法要在离子阱中实验实现  $N \neq 2, 4$  的量子纠缠有很大困难. 这是因为与所有离子耦合系数相同的集体运动模的存在在该方法中是极为关键的, 而在离子阱中满足该条件的集体运动模只有对任意  $N$  存在的质心运动模和仅在 4 粒子时存在的某一相对运动模. 而质心运动模由于很容易受热扰动而在实验中并不适合用来实现多粒子的纠缠. 这就是为什么多粒子纠缠极其重要, 但目前仍只是在实验中实现了 4 粒子纠缠的主要原因.

将上述方案在超导量子计算模型中具体实现并非是一个平庸的推广. 首先要找到一个合适的集体运动模. 另外, 现在文献中常讨论的的超导量子比特不一定满足该方法中的一些特定的要求. 最后, 两种

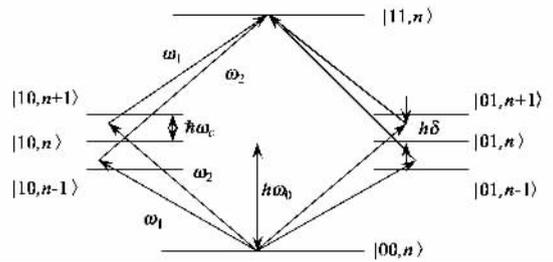


图 1 实现 2 比特量子纠缠的能级示意图. 在正文中描述的演化算符作用下, 初态是  $|00, n\rangle$  的态有一半几率演化成  $|11, n\rangle$ , 一半仍在  $|00, n\rangle$  态, 因而形成 GHZ 形式的最大纠缠态

计算机模型中的操作手段也不一样. 下面叙述作者最近提出的一个原则上可行的方案.

通常讨论的超导电荷比特如图 2(a) (b) 所示<sup>[11]</sup>. 图 2(a) 是最简单的电荷比特示意图. 它的主要部件是一个超导孤岛, 孤岛中相对其平衡态之外有  $n$  个库珀对. 孤岛通过一个耦合能是  $E_J$ , 电容是  $C_J$  的 Josephson 结连在一超导电极上. 同时它通过电容  $C_g$  和门电压  $V_g$  相连. 如果超导能隙  $\Delta$ , 充电能  $E_{\text{ch}} = 2e^2/(C_g + C_J)$ , 温度  $T$  及  $E_J$  满足如下关系:  $\Delta \gg E_{\text{ch}} \gg E_J \gg k_B T$ , 则在  $n_g = C_g V_g / 2e \sim 1/2$  时, 孤岛中库珀对数目是 0 或 1 的状态可被看成是一个二能级系统, 并可当成量子信息中的基本单元——量子比特. 用自旋算符表示, 该体系的有效哈密顿量为  $H = E_{\text{ch}}(n_g - 1/2)\sigma_z - E_J\sigma_x$ . 可明显看出, 量子比特的状态可由实验中可控制的门电压来操作. 不过, 在该有效哈密顿量中  $\sigma_x$  项不可调节, 而在量子信息处理中是希望能实现完全可实验控制的哈密顿量. 达到此目的常见改进设计如图 2(b) 所示. 它是在图 2(a) 所示的量子比特的基础上, 单个 Josephson 结被一个由两个 Josephson 结组成的中心可穿过磁通的 SQUID 代替. 这种设计导致哈密顿量中  $\sigma_x$  项更改为  $-E_J \cos(\pi\phi/\phi_0)\sigma_x$ , 这里  $\phi$  是穿过 SQUID 的磁通,  $\phi_0$  是磁通量子. 因此, 调节磁通的值可以控制哈密顿量中的  $\sigma_x$  项, 调节门电压可控制  $\sigma_z$  项, 从而实现了完全可控制的超导电荷比特. 这种设计是许多超导量子计算模型中的基本单元.

为了实现 Molmer - Sorensen 方案中所需要的集体运动模, 我们把超导量子比特置放于单模量子空腔中<sup>[2-7]</sup>. 整个体系可看成为  $N$  个二能级体系和谐振子相互作用的体系. 这里的单模可以说是理想的集体运动模: 实验中能实现的量子腔中的微波光子的寿命约比超导量子比特长几个量级, 在这种意义上, 它是我们需要的较理想元件; 而对于离子阱模

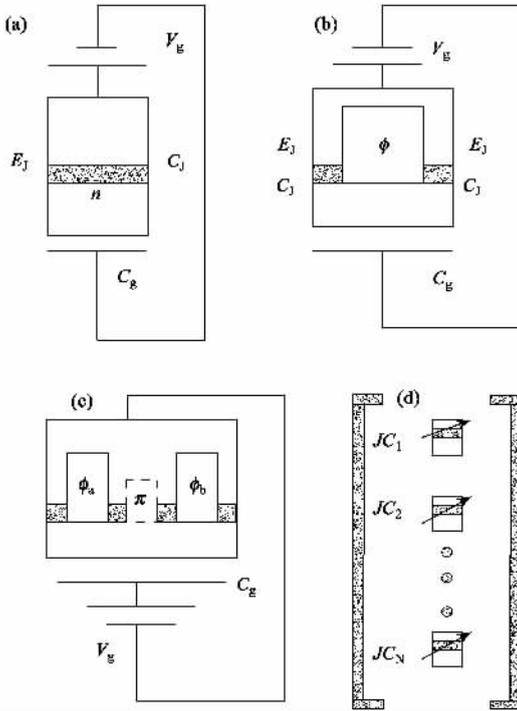


图2 超导电荷比特及其置放于量子空腔中。(a)最简单的电荷比特 (b)常见的电荷比特 (c)我们讨论的电荷比特 (d)置放于量子空腔中的电荷比特

型除4粒子之外,实验上并没有一个合适的集体运动模.为了在腔耦合的超导量子比特中实现前面介绍的 Molmer - Sorensen 方案,我们新设计了一种超导电荷比特器件<sup>[7]</sup>.我们设计的单个超导量子比特如图2(c)所示.它由4个 Josephson 结组成的2个 SQUIDs 构成. SQUIDs 之间是一个  $\pi$  位相结.每个 Josephson 结的耦合能是  $E_J$ ,每个 SQUID 分别穿过磁通  $\phi_a$  或  $\phi_b$ .在这个系统中,超导孤岛的状态可通过门电压、磁通  $\phi_a$  或  $\phi_b$  方便地控制.如把  $N$  个相同的量子比特放入量子空腔中,则磁通  $\phi_a$  ( $\phi_b$ )由外加入的磁通  $\phi_a^e$  ( $\phi_b^e$ )及量子空腔产生的有效磁通  $g$  ( $a + a^+$ )两部分组成,这里  $a$  是量子空腔中频率为  $\omega_c$  的单模消灭算符.当外加磁通随时间按下述方式变化  $\phi_a^e = \omega t - \beta_0$  和  $\phi_b^e = \omega t - \beta_0 - 2k\pi$  ( $k$  是整数),这两个磁通的功能相当于 Molmer - Sorensen 方案中的两束光,但这里的频率可以一致.在 Lamb - Dicke 极限和旋转波近似下,且当量子比特是处于退化态时 ( $n_g = 1/2$ ),相互作用表象中的哈密顿量可写成如下形式:

$$H^{x,y} = gE_J ( a^+ e^{i\delta t + i\beta_0} + H. c. ) J_{x,y}, \quad (2)$$

这里  $\delta = \omega_c - \omega$ .当  $k=0, 1$  时,分别取  $J_x, J_y$ .体系在这个哈密顿量控制下从时间0演化到时间  $t = 2m\pi/$

$\alpha$  ( $m$  是整数)时,得到如下重要的演化算符:

$$U_{x,y}(\gamma) = \exp(i\gamma J_{x,y}^2). \quad (3)$$

这正是在 Molmer - Sorensen 方案中起最关键作用的演化算符.下面,我们利用(3)式来讨论如何实现普适量子逻辑门,产生多比特量子纠缠及实现量子纠错编码的方案<sup>[7]</sup>.

产生多比特量子纠缠.根据前面对 Molmer - Sorensen 方案的介绍,我们知道,只要先把偶数个量子比特制备成直积态  $|00\dots 0\rangle$ ,再让体系按算符(3)式演化,则在  $\gamma = \pi/2$  时即可产生著名的 GHZ 纠缠态.在奇数  $N$  时,还要附加一操作  $\exp(i\gamma' J_x)$ ,该算符可由选定的门电压及磁通来方便地实现.

实现普适量子逻辑门.任意量子计算都可以分解成一套普适逻辑门的组合来实现.由两个非对易的单量子逻辑门及一个非平庸的二比特门就可构成所需要的一套普适逻辑门.非平庸的二比特门指可把直积态转换成纠缠态的逻辑门.可以很容易地证明(3)式本身即是一个满足要求的二比特逻辑门.因为如仅考虑二量子比特,最大纠缠态  $(|00\rangle - i|11\rangle)/\sqrt{2}$  可以直接从直积态  $|00\rangle$  通过  $U_x(\pi/2)$  产生.如果利用附加的量子比特,操作(3)式也可以用来构造非对易的单比特逻辑门.仍考虑二量子比特,我们想在其中一个比特中实现任意的单比特旋转,另一比特用来辅助实现这种操作.用  $|\psi_{\pm}^{x,y}\rangle_a$  表示作用在辅助比特中的 Pauli 算符  $\sigma_{x,y}$  的本征值是  $\pm 1$  的本征函数,同时选择初态是其中的一个本征态,那么用  $U_{x,y}(\gamma)$  作用在该初态后有

$$U_{x,y}(\gamma) |\psi_{\pm}^{x,y}\rangle_a = e^{2i\gamma} [ e^{\pm 2i\gamma \sigma_{x,y}} |\psi_{\pm}^{x,y}\rangle_a ], \quad (4)$$

从(4)式可明显地看出,在丢弃辅助比特后,我们得到了单比特算符  $U_{x,y}^{(1)}(\gamma) = \exp(\pm i\gamma \sigma_{x,y})$  和一无关紧要的整体位相).这里所需要的初态,由于是在取特定的门电压及磁通时的哈密顿量的本征态,故在实验中很容易实现.明显地,  $u_x^{(1)}$  和  $u_y^{(1)}$  互不对易,是一对众所周知的普适单逻辑门.

实现量子纠错编码.著名的 Shor 编码

$$\alpha \frac{1}{\sqrt{2}} ( |000\rangle - |111\rangle )^{\otimes 3} + \beta \frac{1}{\sqrt{2}} ( |000\rangle + |111\rangle )^{\otimes 3} \quad (5)$$

也已被证明可以用演化算子(3)式及单量子比特测量或(3)式和  $\sigma_x \sigma_x$  型耦合构造出来.  $\sigma_x \sigma_x$  耦合可以通过超导比特与比特之间的电容耦合产生.具体的

构造方法在文献 [11] 中有详细的说明。

这个方案的一个重要特点是实验中可实现高保真度的演化算符(3)式。这种高保真特性来源于操作(3)式中的位相  $\gamma$  是非常规几何位相<sup>[12,13]</sup>, 并且在离子阱量子计算中被实验证实<sup>[14]</sup>。 $\gamma$  已被证明正比于相空间中相干态演化所围的面积。用计算 Aharonov - Anandan(AA)位相的标准方法<sup>[15]</sup>可以发现它和 AA 位相的值相等,但符号相反,因此被称为非常规几何位相<sup>[12,13]</sup>。在这种含义上,本文叙述的量子信息处理方式可称为非常规几何量子信息处理。

在量子纠错编码研究中,非常引人注目的是关于量子计算阈值的预言:如果单个量子逻辑门操作的错误率小于某阈值,则任意规模的量子计算都可以有效地实现。一般文献中常引用的阈值是 0.0001。要达到量子计算的阈值,量子门操作及量子纠错编码等重要的步骤应该有内禀的容错功能。虽然我们提出的方案似乎不可能达到量子计算的阈值,但是由于实现普适量子逻辑门,产生多比特量子纠缠及实现量子纠错编码等三种重要的量子信息处理都可以用同一套具有内禀容错功能的几何操作<sup>[7,12-16]</sup>来完成。因此用来实验实现数个超导电荷比特量子信息处理,去验证一些量子计算的原理方面应是有吸引力的方案。具体到实验实现,我们认为

下面的改进可能是有益的。上面叙述的方案中,超导电荷比特和微波光子是通过磁场来耦合,这种耦合方式的强度比较弱。如何在实验<sup>[2]</sup>中利用已实现的超导电荷比特和微波光子通过电场来耦合的方式来实现我们这里提出的方案,是值得研究的方向。

### 参 考 文 献

- [ 1 ] Makhlin Y, Schon G, Shnirman. Rev. Mod. Phys., 2001, 73 :357
- [ 2 ] Wallraff A *et al.* Nature, 2004, 431 :162
- [ 3 ] Yang C P, Chu S I, Han S. Phys. Rev. A, 2003, 67 :042311
- [ 4 ] Zhu S L, Wang Z D, Yang K. Phys. Rev. A, 2003, 68 :034303
- [ 5 ] You J Q, Nori F. Phys. Rev B, 2003, 68 :064509
- [ 6 ] Gao Y B, Wang Y D, Sun C P. Phys. Rev. A, 2005, 71 :032302
- [ 7 ] Zhu S L, Wang Z D, Zanardi P. Phys. Rev. Lett., 2005, 94 :100502
- [ 8 ] Sorensen A, Molmer K. Phys. Rev. A, 2000, 62 :022311
- [ 9 ] Molmer K, Sorensen A. Phys. Rev. Lett., 1999, 82 :1835
- [ 10 ] Sackett C A *et al.* Nature, 2000, 404 :256
- [ 11 ] Zeng B, Zhou D L, Xu Z *et al.* Phys. Rev. A, 2005, 71 :022309
- [ 12 ] Zhu S L, Wang Z D. Phys. Rev. Lett., 2003, 91 :187902
- [ 13 ] 朱诗亮, 汪子丹. 物理, 2004, 33 :242 [ Zhu S L, Wang Z D. Wuli(Physics) 2004, 33 :242 (in Chinese) ]
- [ 14 ] Leibfried D *et al.* Nature, 2003, 422 :412
- [ 15 ] Aharonov Y, Anandan J. Phys. Rev. Lett., 1987, 58 :1593
- [ 16 ] Zhu S L, Wang Z D. Phys. Rev. Lett., 2002, 89 :097902

### · 招生招聘 ·



# Rensselaer

## 美国伦斯勒理工学院招生信息

Troy, New York, U. S. A.

November, 2005

JOIN OUR GRADUATE SCHOOL IN PHYSICS

Ph. D. in Department of Physics, Applied Physics, and Astronomy

Areas of research : Terahertz Imaging and spectroscopy, Terascale Electronics, Photonic bandgap structures, nanoelectronic quantum structures, Bio-physics, Origins of Life, Astronomy, Elementary Particles Physics. Teaching, research assistantships, and fellowships are available.

**Application** <http://www.rpi.edu/dept/grad-services/>

**Information** <http://www.rpi.edu/dept/phys/>

**Email** [gradphysics@rpi.edu](mailto:gradphysics@rpi.edu)