

# 固态量子比特的量子测量\*

李新奇<sup>†</sup>

(中国科学院半导体研究所 超晶格和微结构国家重点实验室 北京 100083)

**摘要** 文章介绍了作者用介观输运器件[如量子点接触(QPC)或单电子晶体管(SET)]测量固态量子比特的原理和特性,特别着重地介绍了作者最近在处理被测量子比特和介观测量仪器之间的关联方面的新进展.

**关键词** 固态量子比特 量子点接触 量子测量

## Quantum measurement of solid-state qubit

LI Xin-Qi<sup>†</sup>

(State Key Laboratory for Superlattices and Microstructures, Institute of Semiconductors, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100083, China)

**Abstract** This paper gives a brief introduction to the measurement of a solid state charge qubit by a mesoscopic detector such as quantum point contact (QPC) or single electron transistor (SET), and particular attention will be paid on the new understanding of the qubit-detector correlation.

**Keywords** solid-state qubit, quantum point contact, quantum measurement

在目前人们感兴趣的量子技术中,量子测量已从一个哲学问题变成了技术问题.特别是在固体系统中,单个量子态的直接测量才刚刚开始<sup>[1]</sup>.由于固体系统中的复杂噪声等实际因素,这些测量器件的工作特性还很不清楚,因而近年来已引起人们的极大关注,并从理论上做了深入的探讨<sup>[2-5]</sup>.一个典型的固态量子测量模型如图1所示.其中固态量子比特用一对耦合量子点表示.两个量子点中掺杂一个(额外)电子,电子处在不同的量子点中代表(两个)不同的逻辑状态.测量仪器是一个介观输运装置,它可以是量子点接触(QPC),也可以是单电子晶体管(SET).由于它们的测量原理很相近,本文将QPC为例做较详细的说明.直观地讲,QPC中的输运电流与耦合量子点中的电子处在哪个量子点中有关,因为电子在空间的不同位置将影响QPC中输运电子的隧穿系数.因此,QPC中的输运电流携带有量子比特的状态信息,由它可以“读取”量子比特的状态.另一方面,QPC中的输运电流(或隧穿电子)的涨落将对被测量子比特产生反作用(back-action),引起量子比特的退相干(dephasing)

和弛豫(relaxation).可见,在这个固态量子测量问题中,测量仪器和被测系统间存在复杂的相互关联.如何描述这种相互关联,正是近年来对该测量问题的理论研究要点<sup>[2-5]</sup>.

从微观多体波函数出发,再约化掉测量仪器的微观自由度,Gurvitz建立了一个Bloch方程方案,用来描述测量引起的量子比特的退相干和计算仪器中的测量电流以及噪声谱<sup>[2]</sup>.另一个能有效地描述该测量问题的理论方法,是由Korotkov和Averin等人在经典概率论的Bayes定理基础上建立的所谓Bayesian方案<sup>[4]</sup>.几乎同时,Milburn研究组发展了一个量子路径(quantum trajectory)方法,用来研究该固态测量问题<sup>[5]</sup>.但是,我们注意到,Gurvitz关于测量引起量子退相干的早期研究,导致了一个不合理的结果:当量子比特在测量影响下,充分退相干和弛豫后,达到的统计混合态概率分布不满足细致平

\* 国家自然科学基金(批准号:60376037),国家杰出青年科学基金(批准号:60425412)和中国科学院百人计划资助项目  
2005-04-04 收到初稿 2005-09-27 修回

<sup>†</sup> Email: xqli@red.semi.ac.cn

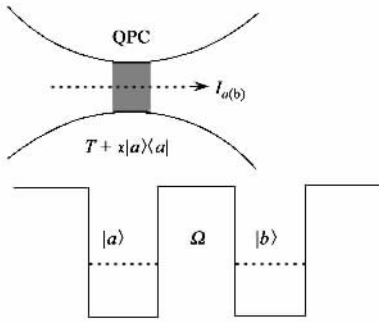


图1 用量子点接触(QPC)测量一个固态量子比特的示意图[ 其中的量子比特可以是一对耦合的量子点(装有一个多余电子),也可以是一个超导盒子(用其中是否有一对多余的 Cooper 对来标记逻辑态) ]

衡,具体表现为,电子在能量不同的高低能级上占据几率完全相同!这一奇怪现象更明显地出现在 Gurvitz 的另一篇论文中<sup>[6]</sup>. 该文讨论了一个无序系统在 QPC 测量下退相干引起的退局域化,发现退相干后,能量无序的各个能级上的占据几率也完全相同. 我们还注意到,可以证明,上面提到的 Bayesian 方案和量子路径理论,与 Gurvitz 的 Bloch 方程方案完全等价<sup>[5,7]</sup>. 因此,这三个目前最典型的关于固态量子比特的测量理论,都暗含了不满足细致平衡这一根本缺点. 我们的研究发现<sup>[8]</sup>,导致该困难的根源在于,当考虑被测量子比特和测量仪器 QPC 之间的相互关联时,没有很好地处理两者间的能量交换,QPC 中的电子隧穿都被认为是弹性过程,非弹性隧穿事件被完全忽略了. 这一近似只在大电压极限下合理. 因此,从另一角度说,上述测量理论都只在大电压极限下成立. 下面简要介绍我们发展的测量理论,重点说明如何处理量子比特和 QPC 之间的能量交换,以及它对测量描述的显著影响.

对于图 1 所示的量子测量问题,测量仪器 QPC 相当于一个耗散环境,当约化掉测量仪器的微观自由度后,得到描述量子比特的约化密度矩阵  $\rho$ ,它满足量子主方程  $\dot{\rho} = -iL\rho - R\rho$ . 其中第一项描述量子比特在自己的哈密顿量  $H_{qu}$  驱使下的量子演化. 刘维算符的含义是  $L\rho = [H_{qu}, \rho]$ . 第二项描述测量引起的退相干和弛豫. 超算符  $R$  的定义如下:  $R\rho = [Q, \tilde{Q}\rho - \rho\tilde{Q}^+]$ .  $Q$  是被观察(测量)量,它与仪器的耦合可以形式地描述为  $H' = QF$ . 在图 1 所示的装置中, $Q$  是量子比特的状态投影算符, $F$  是 QPC 的电子隧穿算符.  $\tilde{Q}$  定义为,  $\tilde{Q} = \alpha(L)Q$ ,其中刘维算符函数  $\alpha(L)$  是隧穿算符  $F$  的时间关联函数  $\alpha(t) = F(t)F(0)$  的傅里叶变换. 我们发现<sup>[8]</sup>,  $\alpha(L)$  中

的刘维算符“ $L$ ”在这里有非常重要的作用,它恰当地描述了量子比特和测量仪器 QPC 之间的非弹性能量交换,保证了量子比特弛豫后在不同的能量本征态上占据几率很不相同,它们将严格满足细致平衡条件. 文献[8]还讨论了这种能量交换对量子比特的退相干行为的影响,得到了有趣的结论.

量子测量理论的另一个重要方面是描述测量仪器中的读出(readout)特征. 显然,上面的量子主方程不能完成这个任务,因为它完全忽略了测量仪器状态,不携带任何测量信息. 因此,我们引入条件密度矩阵  $\rho^{(n)}(t)$ ,它表示到“ $t$ ”时刻,在有“ $n$ ”个电子隧穿过 QPC 的条件下量子比特的状态. 它所满足的运动方程,可以通过对 QPC 的微观状态分类,再对各类状态求平均而得到<sup>[9]</sup>.  $\rho^{(n)}(t)$  含有丰富的测量信息. 例如,对量子比特的状态求迹(trace),我们得到分布函数  $P(n,t)$ ,即  $P(n,t) = Tr[\rho^{(n)}(t)]$ ,它描述到“ $t$ ”时刻有“ $n$ ”个电子隧穿过 QPC 的几率. 利用  $P(n,t)$ ,可以研究测量下的波包塌缩,计算 QPC 中的测量电流及噪声谱. 下面我们简要介绍计算噪声谱的思想和得到的主要结果及其讨论.

测量量子比特的相干 Rabi 振荡,是一个十分基本和重要的问题. 用通常的强投影测量,需要多次测量,再做系综平均,不是特别有效. 一个有趣的观察是,在连续弱测量所得到的噪声谱中,含有相干 Rabi 振荡信息. 在我们的方案中,利用分布函数  $P(n,t)$ ,可以计算隧穿电子数的涨落,  $\delta n^2(t) = n^2(t) - n(t)^2$ ,其中  $n^2(t) = \sum_n n^2 P(n,t)$ . 再利用 MacDolnald 公式,  $S(\omega) = 2\omega \int_0^\infty dt \sin\omega t [ \delta n^2(t) ] / dt$ ,可以方便地计算出电流噪声谱. 图 2 中的电流噪声谱表明,当测量引起的退相干较弱时(小  $\Gamma_d$ ),在量子比特的 Rabi 频率( $\Delta$ )附近有一个尖峰,它反映了量子比特处在相干状态,在做频率为  $\Delta$  的 Rabi 振荡<sup>[4,5,7,9]</sup>. 相反,当退相干较强时(大  $\Gamma_d$ ), $\omega = \Delta$  处的尖峰消失,在  $\omega = 0$  附近演化出一个(大的)电流噪声谱. 这表明量子比特中的电子已从相干的 Rabi 振荡转变为在  $|a\rangle$  和  $|b\rangle$  之间的无规跳跃运动. 该位相非相干区称为 Zeno 区(Zeno regime). 图 2(a)表明,测量过程中量子比特和 QPC 间的能量交换效应,表现为电流噪声谱的整体降低. 在文献[10]中,Gurvitz 等人为了引入弛豫机制,研究了测量过程中量子比特与外部耗散源(thermal bath)耦合的效应. 他们的结果也表

明,弛豫将引起噪声谱的降低,和图2(a)基本相似。但也有定性的差别,表现为从相干区到非相干区的转变行为不同,以及在强耗散区,电流噪声消失,无 Zeno 效应<sup>[10]</sup>。

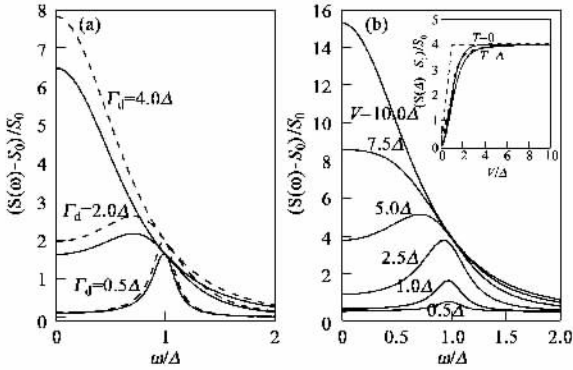


图2 (a)非弹性能量交换对噪声谱的影响;(b)测量电压对信噪比上限的改变

图2(b)显示了测量电压对噪声谱的影响。我们发现,在大电压区,信噪比( $\omega = \Delta$ 处的相干振荡信号和背景噪声的比值)存在一个数值为“4”的普适上限,正如Averin和Korotkov几年前所预言和强调的那样<sup>[4]</sup>。但在小电压情况下,图2(b)表明,这个上限“4”并不普适,它与测量电压有关。图3进一步显示了电压效应。这里的一个主要新结果是,对于对称量子比特( $\theta = \pi/2$ ,  $|a\rangle$ 态和 $|b\rangle$ 态能量相等),在小电压( $V < \Delta$ )和零温度情况下,噪声谱仍然有结构,即 $\omega = \Delta$ 处的尖峰并不完全消失。这是一个新颖而有点奇怪的结果。最近,有两个研究小组也探讨了小电压下的测量特征<sup>[11,12]</sup>。剑桥大学的Stace等人认为,QPC中输运电子的非弹性隧穿,将完全破坏量子比特中电子的相干振荡,因而噪声谱中不会出现 $\omega = \Delta$ 处的尖峰这样的相干振荡信号。事实上,他们的计算表明,在 $V < 10\Delta$ 这样大的范围内,噪声谱都没有结构<sup>[12]</sup>。这一结果最近引起了Averin和Korotkov的质疑<sup>[13]</sup>。另一个小组在早些时候发现<sup>[11]</sup>,在 $V > \Delta$ 区,噪声谱在 $\omega = \Delta$ 处有尖峰结构,但在 $V < \Delta$ 区,尖峰结构将突然消失。理由是,量子比特在测量影响下将完全弛豫到基态,在零温度和小电压情况,不能被重新激发。怎样理解我们在小电压区的结果呢?我们知道,噪声谱刻画了隧穿电子的涨落。在小电压和零温度情况下,量子比特完全弛豫后到达基态。以此为量子比特状态的初始条件,即 $\rho^{(0)}(t=0) = |g\rangle\langle g|$ (其中 $|g\rangle$ 是量子比特的基态),容易发现 $\rho^{(n)}(t)$ 不是稳态,将随时间不停地变化(涨落),

其中含有量子比特的相干振荡信息。我们认为,正是这种运动,导致了QPC中隧穿电子数的涨落,使噪声谱不消失。对应着 $\rho^{(n)}(t)$ 不为零的非对角元,噪声谱中将仍然有相干结构信号。

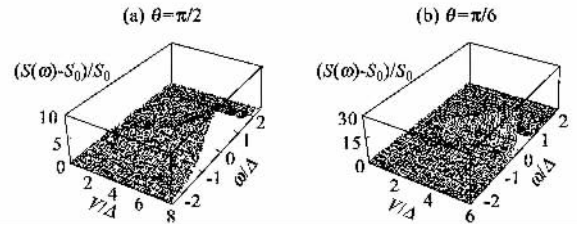


图3 不同测量电压下的噪声谱 (a)和(b)分别对应对称和非对称量子比特

需要指出,在本项研究中建立 $\rho^{(n)}(t)$ 的运动方程的方法,还可以用于量子输运问题<sup>[14]</sup>。我们的理论方案中包含的能量交换效应,对未来探讨固态量子信息中的量子反馈控制问题也可能产生影响,因为在现有的量子反馈控制理论中,对测量的描述都基于Lindblad方程,而我们的研究表明,Lindblad方程不能很好地描述QPC的测量问题。

### 参考文献

[1] Buks E *et al.* Nature, 1998, 391: 871; Elzerman J M *et al.* Nature, 2004, 430: 431; Xiao M *et al.* Nature, 2004, 430: 435; Rugar D *et al.* Nature, 2004, 430: 329  
 [2] Gurvitz S A. Phys. Rev. B, 1997, 56: 15215  
 [3] Aleiner I L *et al.* Phys. Rev. Lett., 1997, 79: 3740; Shnirman A, Schon G. Phys. Rev. B, 1998, 57: 15400; Pilgram S, Buttiker M. Phys. Rev. Lett., 2002, 89: 200401; Clerk A A *et al.* Phys. Rev. Lett., 2002, 89: 176804  
 [4] Korotkov A N. Phys. Rev. B, 2001, 63: 085312; Korotkov A N, Averin D V. Phys. Rev. B, 2001, 64: 165310; R. Ruskov R, Korotkov A N. Phys. Rev. B, 2003, 67: 075303  
 [5] Goan H S, Milburn M J *et al.* Phys. Rev. B, 2001, 63: 125326  
 [6] Gurvitz S A. Phys. Rev. Lett., 2000, 85: 812  
 [7] Korotkov A N. cond-mat/0209629  
 [8] Li X Q *et al.* Phys. Rev. B, 2004, 69: 085315  
 [9] Li X Q, Cui P, Yan Y J. Phys. Rev. Lett., 2005, 94: 066803  
 [10] Gurvitz S A *et al.* Phys. Rev. Lett., 2003, 91: 066801  
 [11] Shnirman A *et al.* cond-mat/0211618  
 [12] Stace T M, Barrett S D. Phys. Rev. Lett., 2004, 92: 136802  
 [13] Averin D V, Korotkov A N. Phys. Rev. Lett., 2005, 94: 069701; Stace T M, Barrett S D. Phys. Rev. Lett., 2005, 94: 069702  
 [14] Li X Q *et al.* Phys. Rev. B, 2005, 71: 205304