

# 时变分析的时间尺度谱方法

李 惕 碚

(清华大学物理系 清华大学天体物理中心 北京 100084)

(中国科学院高能物理研究所粒子天体物理中心 北京 100049)

**摘 要** 文章介绍时变分析的时间尺度谱方法及其在 X 射线天文学中的应用. 时间尺度谱方法包括时域功率谱、时域时延谱以及  $w$  谱等, 是一种直接应用在时域上的多尺度分析手段. 相对于传统方法, 时间尺度谱能更客观灵敏地反映物理实质, 有效地抑制噪声干扰, 在高背景低统计性的 X 射线天文观测中得到了很好的应用.

**关键词** X 射线天文学, 时间尺度谱, 功率谱, 时延  $\mu$  谱, 黑洞, 中子星

## Timescale spectral analysis

LI Ti-Pei

(Department of Physics, Tsinghua Center for Astrophysics, Tsinghua University, Beijing 100084, China)

(Key Laboratory of Particle Astrophysics Institute of High Energy Physics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China)

**Abstract** A review is presented of the timescale spectral analysis method proposed by Li et al. in recent years and its applications in X-ray astronomy. This is a multi-scale analysis technique in the time domain with a set of new definitions for the power spectrum and cross-correlation, and a novel  $w$  spectrum. Compared to traditional means, the technique is highly sensitive in reflecting the nature of physical processes, especially in X-ray astronomy where observations have poor statistics and a high background.

**Keywords** X-ray astronomy, timescale spectrum, power spectrum, time lag,  $w$  spectrum, black hole, neutron star

## 1 引言

时变分析是研究天体物理过程的重要途径. 不同的物理过程或者同样物理过程在不同环境中具有不同的特征时间尺度. 通过 X 射线观测, 人们已经发现黑洞、中子星等致密星体在不同时间尺度上存在形态复杂的非周期快速光变现象, 这些现象是理解天体高能辐射过程的重要途径, 某些特征时间尺度甚至跟致密星体的本征性质(例如星体质量)紧密相连.

应用最广泛的传统时间分析方法是傅里叶频谱分析. 对光变曲线  $x(t_k)$  ( $k = 0, 1, \dots, N$ ) 通过傅里叶变换

$$X(f_j) = \sum_{k=1}^N x(t_k) e^{-i2\pi f_j t_k} \quad (j = -N/2, \dots, N/2 - 1)$$

得到光变曲线的功率(密度)谱

$$P(f_j) = |X(f_j)|^2.$$

对不同能量的两条光变曲线, 由互谱

$$\alpha(f_j) = X_1^*(f_j) X_2(f_j)$$

得到时延谱, 描述不同能量光子发射时间差的分布

$$\mathfrak{X}(f_j) = \arg[\alpha(f_j)] / 2\pi f_j$$

以及用相干系数谱描述不同能量过程相关程度与时间尺度的关系

$$C(f_j) = \frac{|\alpha(f_j)|}{\sqrt{|X_1(f_j)|^2 |X_2(f_j)|^2}}.$$

用特定物理量研究不同时间尺度物理过程的性质, 需要知道各种时间尺度下该物理量的数值, 即需要得到时间尺度谱. 李惕碚等<sup>[1,2]</sup>建立了时变分析的时间尺度谱方法. 人们通常将傅里叶频率的倒数

2006-04-06 收到

理解为时间尺度,从而借助(傅里叶)频谱进行时间尺度分析.虽然傅里叶分析在数学上是完备的,但是一般说来(傅里叶)谱并不能正确刻画复杂物理过程的时间尺度分布.例如,人们基于帕斯瓦定理采用(傅里叶)功率谱描述时变物理过程的功率密度分布.但是,帕斯瓦定理只是说(傅里叶)功率密度对频率的积分等于时域过程的总功率,并没有告诉我们(傅里叶)功率密度和实际物理过程功率密度分布的关系.对于一个随机过程(傅里叶)功率谱显著地低估了实际过程在小时间尺度(高频)区域的功率,而由时间尺度谱方法导出的时域谱能正确地描述随机过程的真实分布.对于 X 射线双星时域功率谱的研究发现,黑洞双星随机光变具有  $\sim 0.1$  s 的特征时间尺度,而中子星双星的特征时间尺度小于  $1\text{ms}^{[3]}$ .冯骅、李惕碛和张双南<sup>[4]</sup>导出了用于研究 X 射线跃发脉冲宽度的统计量  $w$  的时间尺度谱,发现黑洞和中子星双星 X 射线跃发截止时间尺度存在明显区别.傅里叶方法没有能力显示不同能道高频(小时间尺度)信号的时延,时间尺度谱方法可以灵敏地测量不同能道快速光变的时延,以及研究不同物理量(如流强和能谱硬度)在特定时间尺度上的相关<sup>[2,5-7]</sup>,为揭示快速变化过程的特性提供了有力的工具.

## 2 功率谱

时间步长为  $\Delta t$  的光子计数序列  $x(k)$  ( $k = 1, \dots, n$ ),其光变功率的定义为

$$P(\Delta t) = \frac{\text{Var}(x)}{(\Delta t)^2} = \frac{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (x(k) - \bar{x})^2}{(\Delta t)^2} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (x(k) - \bar{x})^2 \text{rms}^2. \quad (1)$$

由此可求出时间尺度  $\Delta t$  的功率密度

$$p(\Delta t) = \frac{dP(\Delta t)}{d\Delta t} \cong \frac{P(\Delta t_1) - P(\Delta t_2)}{\Delta t_2 - \Delta t_1} \text{rms}^2/\text{s}, \quad (2)$$

由(1)、(2)式可求出泊松噪音的功率密度

$$p_{\text{noise}}(\Delta t) \cong \frac{r}{\Delta t_1 - \Delta t_2} \text{rms}^2/\text{s}, \quad (3)$$

其中  $r$  为计数率.由(2)、(3)式可计算信号功率密度

$$p_{\text{signal}}(\Delta t) = p(\Delta t) - p_{\text{noise}}(\Delta t) \text{rms}^2/\text{s}. \quad (4)$$

图 1 上图为一随机脉冲序列,计数率为  $300\text{cts/s}$ ;中图为由脉冲序列的一个随机样本加上  $5000\text{cts/s}$  泊松噪音构成的模拟光变曲线;下图中的实线为脉

冲序列功率密度,十字为从模拟光变曲线用(4)式求得的信号功率密度谱,短划线为傅里叶功率密度谱.信号脉冲的指数上升与衰减的时间常数随机地从  $5\text{ms} - 0.2\text{s}$  区间中选取.

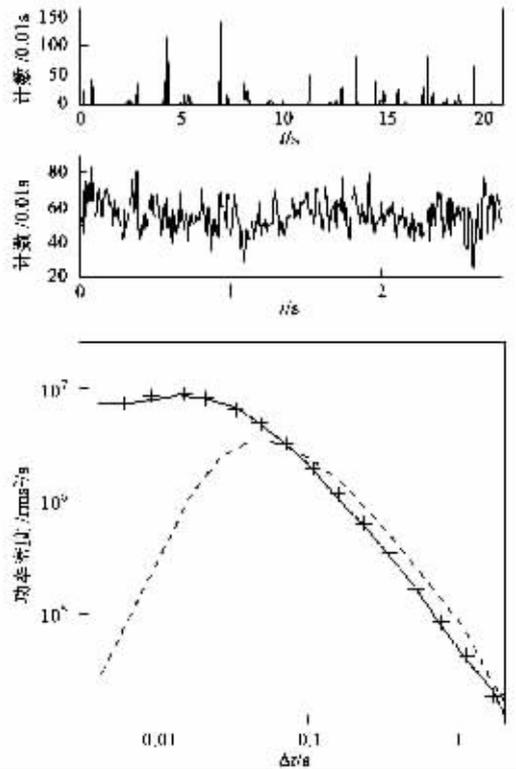


图 1 时域功率谱和傅立叶功率谱的对比(上图为模拟的脉冲信号,中图为加噪声后的信号,下图是纯信号的时域功率谱(实线)、带噪声信号的时域功率谱(十字)以及傅里叶功率谱)

在这个例子中,傅里叶功率谱大大低估了短时间尺度的物理过程,时域功率谱能更准确地反映物理实质.另外,图中带噪声信号与无噪声信号产生的时域功率谱的完好吻合表明了时域功率谱对噪声有很强的抑制作用,能够在实际低信噪比的 X 射线天文观测中得到良好的应用.

研究光变功率的时间尺度谱有助于揭示致密星附近物理过程的性质.我们<sup>[3]</sup>用 PCA/RXTE 卫星数据得到一组 X 射线双星光变功率的傅里叶谱(图 2 圆点)和时间尺度谱(图 2 十字).图 2 左边为黑洞双星,右边为中子星双星.5 个黑洞双星的傅里叶功率在小于约  $0.1$  s 的短时间尺度区间都显著地低于时间尺度谱,而对于中子星,在毫秒至秒的时间尺度范围两者基本一致.如果黑洞双星系统存在特征时间尺度约  $0.1$  s 的随机光变过程,而中子星随机光变过程的特征时间尺度远小于  $1\text{ms}$ ,则可以解释观测到的功率谱性质的差异.

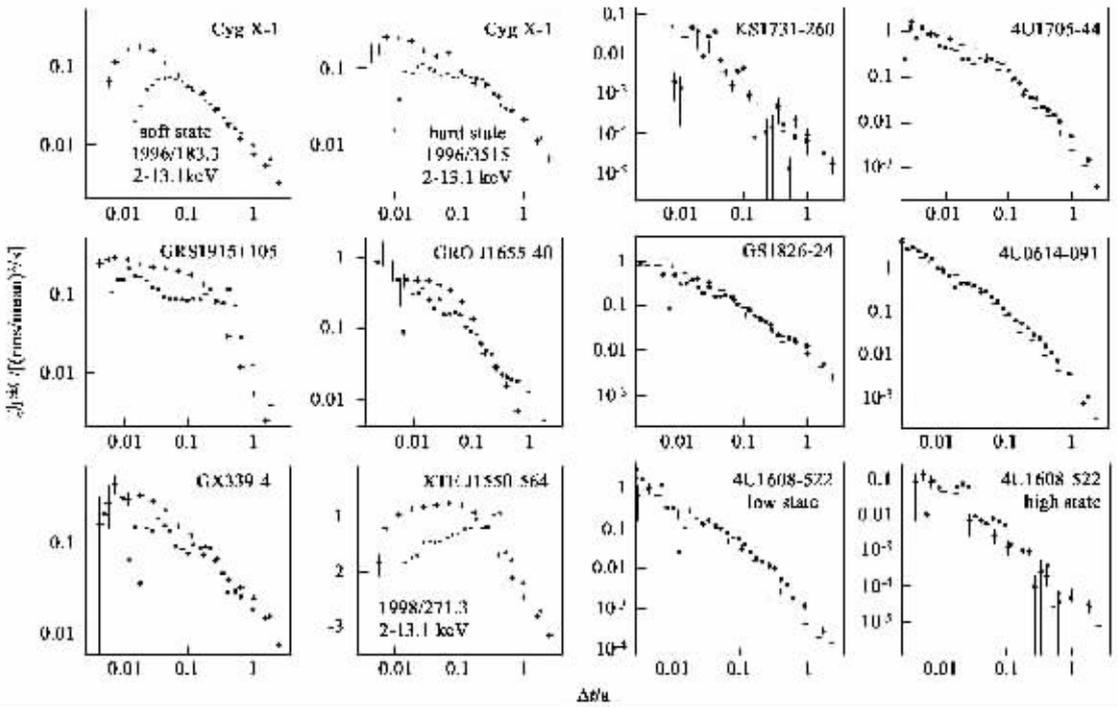


图 2 黑洞和中子星时域功率谱与傅里叶功率谱的比较 (左边为黑洞, 右边是中子星)

### 3 时延谱

同一时段不同能道两光变曲线  $x_1(k)$   $x_2(k)$  间的相对时延  $\Delta$  是研究辐射过程的重要参量. 借助相关分析方法可以由两光变曲线求得一个时延值  $\Delta$ ; 但仅仅一个时延值是不够的, 了解一个复杂过程需要知道不同时间尺度的时延, 即时延的时间尺度谱  $\Lambda(\Delta t)$ . 传统相关分析方法还无法求出小于时间道宽  $(\Delta t)$  的时延. 用傅里叶分析可以得到一个时延谱. 由于傅里叶方法的时延是通过相位差间接求得的, 但相位有一个  $2\pi$  的周期, 一旦相位超过  $2\pi$  就会归 0, 称为相位卷绕. 理论上傅里叶分析可以通过解卷绕的方法求出大于  $2\pi$  相位所对应的时延, 但是实际问题中由于噪声的干扰, 解卷绕在低信噪比情况下很难得到应用, 因此会错误低估时延.

利用改进的相关分析方法可以求出时延的时间尺度谱<sup>[15]</sup>. 对于时间步长为  $\Delta t$  的两光变曲线  $x_1(k)$   $x_2(k)$  和任意  $\tau$  值, 定义相关函数

$$\alpha(\tau; \Delta t) = \sum_k v_1(k\Delta t)v_2(k\Delta t + \tau) / (\sigma(v_1)\sigma(v_2)), \quad (5)$$

式中  $v_i(t) = x_i(t) - \bar{x}$ ,  $\sigma^2(v) = \sum v^2$ ,  $x_i(t)$  是时间区间  $(t, t + \Delta t)$  中的光子计数. 对于不同时间尺度

$\Delta t$ , 求出令相关函数  $\alpha(\tau; \Delta t)$  极大的  $\tau$  值, 即可得时延谱  $\Lambda(\Delta t)$ .

为了比较求时延的时间尺度谱和傅里叶谱两种方法, 我们构造了两条模拟光变曲线, 每条光变曲线由快慢两种随机脉冲组成. 两条光变曲线脉冲时标 1ms 的快成分间时延 5ms, 时标 0.01s 的慢成分间时延 0.02s. 图 3 十字和虚线为用时谱方法对模拟数据

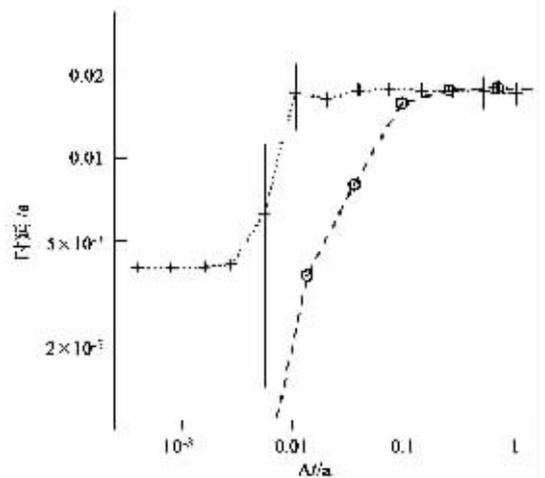


图 3 具有两种成分不同延迟的光变曲线时延谱 (时标 1ms 的快成分间时延 5ms, 时标 0.01s 的慢成分间时延 0.02s; 十字为时域时延谱, 圆圈是傅里叶时延谱)

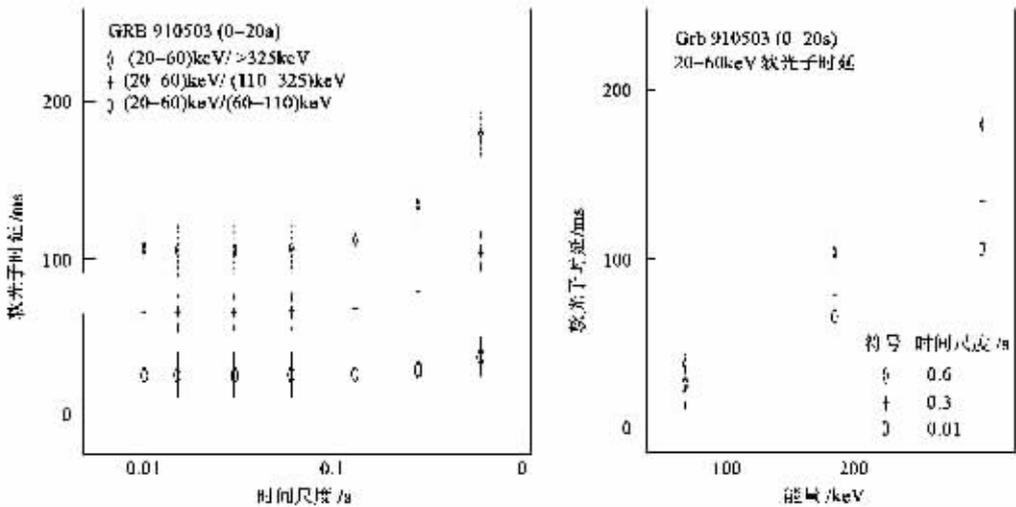


图4 GRB 910503 的时延谱

求得的时延谱,圆圈和短划线为傅里叶谱.从图3可以看出,时间尺度谱正确地表达了实际过程的时延分布,而傅里叶分析无力检测出短时间尺度过程的时延.

时延的时谱分析方法是揭示辐射过程特性的有力工具.我们用 PCA/RXTE 的数据,第一次得到了在短时间尺度区域 (<0.01s) Cyg X-1 硬 X 射线光子的时延谱,从而可以判断不同的辐射模型<sup>[2]</sup>;我们还得到 BATSE/CGRO 发现的地球  $\gamma$  闪烁 TGFs (terrestrial gamma-ray flashes) 低能光子的时延性质,有力地证实了 TGF 产生的放电机制<sup>[5]</sup>.我们正在应用时谱方法研究  $\gamma$  射线暴的时延性质.图4是从 BATSE 探测到的  $\gamma$  暴 GRB910503 数据得到的低能光子时延的时间尺度谱(左图)以及特定时间尺度下时延与能区间隔的关系(右图).可以期待,更多  $\gamma$  暴时延性质的分析结果将推进对  $\gamma$  暴产生机制的了解.

#### 4 w 谱

时域谱分析的思路即在时域上取定一时间尺度,求出此尺度下的某物理量大小,然后改变尺度获得不同尺度下的物理量.这个物理量既可以是已知的物理量如功率、时延等,也可以是自定义的物理量,当然定义必须客观反映物理过程.假设仪器所观测纪录的原始光变曲线为  $\{x(j\delta t)\}$ ,即时间分辨率(最小时间道宽)为  $\delta t$ ,在  $[j\delta t, (j+1)\delta t]$  ( $j=0, 1, 2, \dots$ ) 时间内的光子计数率(cts/s).为了研究时间尺度  $\Delta t = M\delta t$  ( $M$  为整数)的过程,我们需要将原

始光变曲线进行并道,即将原来  $M$  个连续时间道通过求平均合并成一个,形成新的光变曲线:

$$x_m(i; \Delta t) = \frac{1}{M} \sum_{j=iM+m}^{(i+1)M+m-1} x(j; \delta t) \text{ cts/s},$$

其中  $m$  是光变曲线的离散相位.新的光变曲线不包含任何时间尺度小于  $\Delta t$  的变化过程.定义光变曲线的平均绝对差分为:

$$W(\Delta t) = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} \left( \frac{1}{N-1} \sum_{i=0}^{N-2} \frac{|x_m(i+1; \Delta t) - x_m(i; \Delta t)|}{\Delta t} \right),$$

它的值代表了某种物理量在时间尺度  $\geq \Delta t$  上的总和.因此,在时间尺度  $\Delta t$  上此种物理量的值,可以通过求导获得:

$$u(\Delta t) = - \frac{dW(\Delta t)}{d\Delta t}.$$

实际问题中,信号总是伴随着噪声一起出现的.为了有效地提取信号,我们必须准确地估计出噪声成分并从中减去.对天体物理过程而言,噪声都是泊松噪声.假设两个独立的随机变量  $X_1$  和  $X_2$  都服从相同的泊松分布,即拥有同样的平均值,那么它们差的绝对值的期望值为:

$$E(|X_1 - X_2|) = 2e^{-2\bar{x}} \sum_{n=0}^{\infty} n I_n(2\bar{x})$$

其中  $I_n$  为  $n$  阶变形 Bessel 函数.通过  $w$  谱的定义,我们可以得到噪声的贡献

$$W_{\text{noise}}(\Delta t) = \frac{E(|X_1 - X_2|) \gamma \Delta t}{\Delta t} = \frac{2e^{-2\bar{x}\Delta t} \sum_{n=0}^{\infty} n I_n(2\bar{x}\Delta t)}{\Delta t^2},$$

$$w_{\text{noise}}(\Delta t) = \frac{dW_{\text{noise}}(\Delta t)}{d\Delta t},$$

其中  $\bar{x}$  为光变曲线的平均值. 最后, 光变曲线信号成分的  $w$  谱为

$$w_s(\Delta t) = u(\Delta t) - w_{\text{noise}}(\Delta t)$$

$w$  谱可以灵敏地探测光变曲线中最小的时间尺度. 图 5 给出了两种方波脉冲序列  $w$  谱, 脉冲宽度为 0.1s, 脉冲发生时间或者是周期的或者是随机的. 我们可以发现两者的  $w$  谱都在 0.1s 处有个明显的截止, 表明系统主要的变化过程都大于等于 0.1s. 另外, 随机脉冲在 0.1s 以下还有少量幅度, 从光变曲线上可以看到某些脉冲的间隔小于 0.1s. 周期脉冲在 0.5s 处的  $w$  谱比随机脉冲幅度略高, 恰好是周期变化的体现(时间尺度为半周期时具有最大变化量).

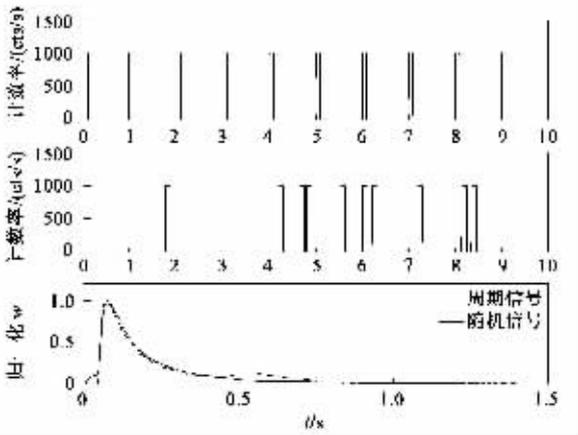


图 5 脉冲序列的  $w$  谱(脉冲宽度 0.1s, 脉冲发生时间是周期的(上图)或者随机的(中图), 两者的  $w$  谱为下图)

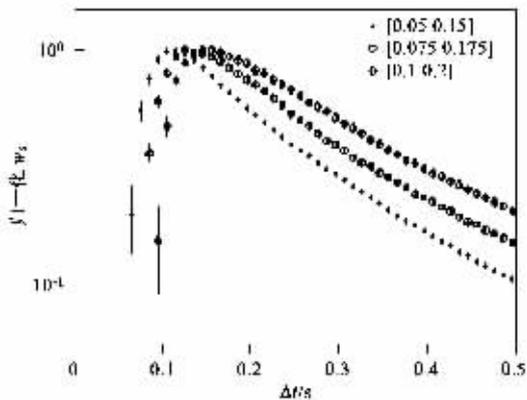


图 6 随机脉冲的  $w$  谱(脉冲宽度均匀分布在图例所示范围中)

如果我们设定脉冲的宽度也随机改变, 均匀分布在某一区域中, 如图 6 所示, 我们发现  $w$  谱可以非常灵敏的探测最小的宽度值.

通过对  $w$  谱的模拟分析表明,  $w$  谱可以反映随机脉冲序列的时间尺度分布(约等于脉冲宽度分布), 对脉冲的幅度、形状、在时间轴上的分布不敏感, 但对脉冲宽度分布的前沿, 即最小脉冲宽度很敏感, 可量化求得. 图 7 给出了黑洞和中子星  $w$  的谱, 在选定的时间尺度上, 黑洞的  $w$  谱出现了明显的截止, 而中子星的  $w$  谱却没有.

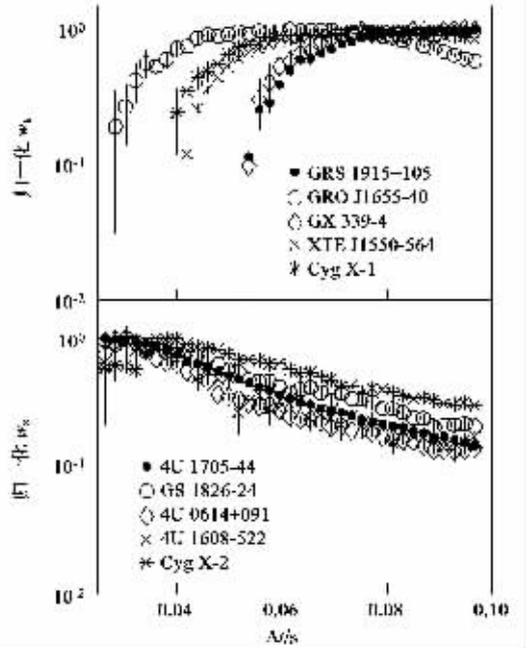


图 7 黑洞(上图)和中子星(下图)的  $w$  谱

中子星和黑洞在  $w$  谱上的表现是和功率谱的结果一致的, 都表明中子星具有更小的光变尺度. 这个和吸积盘的辐射区域有关. 吸积盘的最小辐射区域来自最小稳定轨道处, 它的半径和致密星体的质量成正比. 中子星质量小, 另外中子星还有部分辐射来自尺度更小的星体表面, 因此中子星具有比黑洞小得多的辐射时间尺度. 进一步研究黑洞截止时间尺度随能量的变化(图 8), 我们<sup>[4]</sup>发现了三个不同成分(1)低能端时间尺度随能量(2)高能端时间尺度随能量上升(3)6—7 keV 时间尺度偏高. 这三个不同趋势的变化暗示三个成分分别来自吸积盘、热冕和铁  $K\alpha$  线辐射. 此外, 通过对黑洞 Cyg X-1 不同能态的  $w$  分析, 我们发现了在低能区黑洞低硬态的截止时间尺度小, 高软态的截止时间尺度大, 而在高能区各个能态的截止时间尺度几乎相等<sup>[8]</sup>.

## 4 总结

除了本文所介绍的求功率谱、时延谱和  $w$  谱的

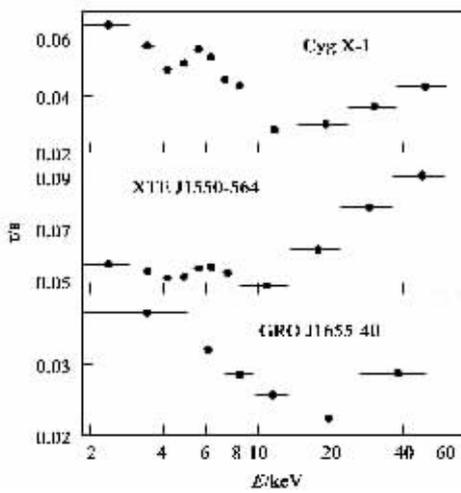


图 8 黑洞的截止时间尺度随能量的变化

方法外,我们还提出了求相干系数、能谱硬度和各种物理量间相关系数的时间尺度谱的方法,以及如何分别研究时变的脉冲成分和连续成分的办法,从而建立了直接在时域上进行时变分析的一套方法<sup>[1]</sup>同频谱分析比较,时谱分析的结果可以更正确地反映真实物理过程的时间尺度分布.时谱分析还能更

灵敏地揭示短时间尺度(高频)区域的时变性质,是研究快速时变过程的有力工具.迄今为止,对 X 射线双星的各种观测数据所进行的傅里叶分析,都未能在约 100Hz 以上的高频区观测到硬 X 射线光子的时延.这是傅里叶分析方法本身固有的局限.如果不发展新的分析方法,即使具有更高探测灵敏度的下一代 X 射线天文卫星,也仍然观测不到高频时延.而用时谱分析,从现有数据就可以可靠地导出短时间尺度的时延谱.可以预期,时谱分析将成为推进天体高能辐射过程研究的重要手段.

参 考 文 献

[ 1 ] Li T P, Chin. J. Astron. Astrophys. ,2001( 1 ) 313  
 [ 2 ] Li T P, Qu J L, Feng H *et al.* Chin. J. Astron. Astrophys. , 2004( 4 ) 583  
 [ 3 ] Li T P, Muraki M. Astrophys. J. ,2002 578 374  
 [ 4 ] Feng H, Li T P, Zhang S N. Astrophys. J. ,2004 606 :424  
 [ 5 ] Feng H, Li T P, Wu M *et al.* Geophys. Res. Lett. ,2002 , 29 :28  
 [ 6 ] Liu C Z, Li T P. Astrophys. J. ,2004 611 :1084  
 [ 7 ] Li T P, Feng Y X, Chen L. Astrophys. J. , 2001 521 789  
 [ 8 ] Feng H, Zhang S N, Li T P. Astrophys. J. ,2004 612 :L45

世界图书出版公司北京公司影印物理类新书推荐

编号	英文书名	作者	定价
wb7247	The Feynman Lectures on Physics Vol. 1	Feynman	95
wb7248	The Feynman Lectures on Physics Vol. 2	Feynman	98
wb7249	The Feynman Lectures on Physics Vol. 3	Feynman	78
wb7257	Solid - State Laser Engineering 5th ed.	W. Koehler	98
wb7258	Monte Carlo Strategies in Scientific Computing	J. S. Liu	48
wb7259	Fundamentals of Semiconductors 3rd ed.	P. Y. Yu	89
wb7263	Quantum Mechanics : A Introduction 4th ed.	W. Greiner	108
wb7266	Classical Electrodynamics	W. Greiner	89
wb7270	Nonlinear Waves , Solitons and Chaos 2nd ed.	Infeld	68
wb7271	Chaos in Dynamical Systems 2nd ed.	Ott	99
wb7272	Bose - Einstein Condensation in Dilute Gases	Pethick	68
wb7273	Electrodynamics of Solids	Dressel	78
wb7274	Liquid Crystals 2nd ed.	Chandrasekhar	69
wb7275	Newton to Einstein : The Trail of Light	Baierlein	59
wb7289	Introduction to Electrodynamics 3rd ed.	D. J. Griffiths	39
wb7314	Modern Quantum Mechanics	J. J. Sakurai	36

( 未完待续 )

查询以上图书或世图其它影印图书的详细信息,请登陆网站 [www.wpcbj.com.cn](http://www.wpcbj.com.cn), 邮购方式见网站首页下方的“读者服务”中的“购书指南”.联系方式如下:

电话 010 - 64038347( 兼传真 ) 010 - 64015659 电子信箱 [kjsk@vip.sina.com](mailto:kjsk@vip.sina.com)

通讯地址 北京朝内大街 137 号世图北京公司科技部 邮编 100010