规范场理论和金融市场模型

李 华 钟

（中山大学高等学术研究中心　广州　510275）

摘　要　文章介绍近年理论物理在金融学市场建模中的应用的一个新方向，与一般的数学建模不同，它是应用几何结构的模型，建立在规范场的物理思想和纤维丛的几何结构的基础上．文章介绍了规范场的物理概念思想原则，也介绍纤维丛数学概念和几何结构，然后说明规范场理论与纤维丛理论的相结合，成为与金融市场概念和运作相匹配的市场模型，举出这一模型成功引导出金融市场产品定价的 Black－Scholes 方程和公式．文章对象以物理学者为主，对于理论经济学、金融理论和系统科学的读者来说可略去数学推导．

关键词　金融资产定价，规范对称，纤维丛应用

Gauge theory and financial market model

LI Hua-Zhong

（*Advanced Research Center*，*Zhongshan*（*Su－Yat－Sen*）*University*，*Guangzhou* 510275，*China*）

Abstract　An introduction to modelling of the financial market by applying the gauge theory of modern theoretical physics is presented. The relationships between physics concepts and financial concepts are first described，followed by an explanation of the ideas in gauge theory and fibre bundle mathematics. We demonstrate how the combined structure of gauge theory and fibre bundles provides a framework for financial market models. A simple model of the foreign currency market and the Black－Schales equation are described as interesting examples of the gauge model.

Keywords　financial assets pricing，gauge symmetry，fibre bundle application

1　导言

近年来在金融学的理论研究中，运用理论物理的思维方式和方法，建立金融市场的模型，金融资产价值的定价和市场演进的预测等，把传统均衡的模型发展为动态的模型，以至极端状态的市场出现的可能预测，应用统计物理学方法例如随机行走，临界动力学指标分析，混沌机制，分形，分岔等．近年来还有应用规范场理论建立金融市场运作的模型和规律．

本文只是在物理概念和金融市场的概念和原则作平行展开的类比，不涉及概率论、博奕论、随机微分方程等数学工具的运用和推演．同时，我们只是表达学院式的理论研究也不涉及金融实践家的成败经验．金融实践家——如银行家股票炒家和金融玩家的立场观点和方法不是我们要谈论的话题，可以说我们是纸上谈兵，脱离实际，书生之见，不过近十多年来不只是经济学界的学术圈子，华尔街和瑞士银行的大亨们对这些空论却感到兴趣．

在金融资本市场，市场交易者通过市场运作，卖出买入金融资产，籍以获得利润．在这领域，金融学的主要课题是：研究金融资产及其衍生资产的定价，投资组合技术，获利策略，公司金融政策，风险规避，进而对金融市场中演进短期预测．其中资产定价是市场运作的起点，这是经济数学应用最主要的领域，富有争议的市场预测也是数学应用的重要领域．

19 世纪到 20 世纪之初，旧金融学运用的工具

2005－12－12 收到，2006－03－08 修回

本文部分内容源自“非均衡金融定价规范建模研讨会”上的应邀专题报告，2005 年 11 月，上海

是会计学和统计，资料是市场公司的财政报表，数据分析，作出市场的短期预测.

20 世纪中期到现在，现代金融经济学运用数学建立市场模型，资产定价公式，不独运用数学建立数学模型，并且引入物理理论，建立模型和资产定价. 这就开始形成了现时称为金融物理，金融工程，金融数学等新学科.“资产定价”、“市场预测”是目前物理理论进入金融学的切入点. 理论物理应用到金融理论中的现状，已经有一般性的和较为专业性的导介文章. 本文不打算重复它们已介绍过的内容，有兴趣了解金融物理一般前沿状态的读者请参考文献[1—3]. 本文只是从规范场理论这一角度来看金融市场，这也是金融物理这个方向最近的前沿视角之一.

在参考文献[3]和[4]中我们已经讨论过金融市场作为物理系统的可能性，作为大数目自由度系统具有共通的要素，正是由于这些共同性，统计数学的模型和方法既可用于工程建模也可用于经济建模. 对市场中的不确定性和物理系统的不确定性，我们没有必要也不可能去追究它们的来源是自然界的或社会的，是物理的还是心理的，都只是用随机方法处理. 自然界的动物群体和社会的群性，即使有近代阶段之巨大差异和本质变异，但群体共性仍然存在. 市场建模并不只专注于市场的参与者的个别行为，模型代表的是市场整体行为，物理模型有个体行为也有整体行为，整体行为建立在互动的个体行为的基础上，有个体所没有的整体表现. 概率论的应用隐含假设在相同条件下可以重复大数目多次的实验操作，即物理学称之为统计系综的方法的基础. 统计力学就建筑在包含大数目的系统的系综上. 市场本来就是不可以在相同条件下重复实验，因而运用概率论方法只能是人为修饰的近似. 在这一点上数学建模方法同物理建模方法是同样的近似逼近. 事实上，现时经济学的许多数学模型，实际上也是物理模型，只不过是表述时采用数学语言，或是物理语言的形式概括力不同而已. 例如随机行走模型既可以看成一种数学模型，同时也可看成物理学的布朗运动模型，人们能接受经济学的数学模型，就同样应该可以接受物理模型. 随机行走在物理上看是一个无记忆的醉汉漫步，少数者胜的博奕模型也是两人博奕约定的物理模型，只不过这些模型的数字意义是一般常识可以接受的，物理的解释也是显而易见，亦为一般常识所接受. 我们在以后会谈到金融市场的规范场模型，纤维丛模型. 这些模型就与已往熟悉的数学模型不同了，它超出了一般常识认可的范畴，以致有的金融学者经济学者，甚至经济数学家视之为怪异.

金融市场的规范场模型，其实同时也是一种数学模型，就是纤维丛模型，这一模型和现在流行的经济数学模型有特别不同之处：(1)它不是数量上的数学，它是几何结构的形态的数学，这是经济数学模型所稀见的更复杂的模型，这就不易为一向熟悉数量数学的学者们所接受. 一般来说熟悉的是概率论、随机微分方程等，对于微分几何、拓扑学在经济领域的应用比较陌生. (2)纤维丛所描述的物理是规范场论，它主要地不是局域的描述，它统辖大范围性质，物理系统的整体性视野，这也是与一般熟悉局域的描述接触作用近邻逐点传播的局域观念有很大不同. (3)作为模型的具体演绎推算，运用理论物理学的标准方法规程，更使人有一种印象：用物理方法去解决金融问题，显然，这好像有人会运用经济方法去解决物理问题同等的荒谬.

2 简史

应用规范场理论去构建金融市场模型的研究，始于 1997 年俄罗斯科学院圣彼得堡 Steklov 数学研究所的数学物理学博士 K. Ilinski. 他在取得博士学位后，赴英国伯明翰大学从事研究工作五年，在伯明翰认识了金融市场方面的友人，从中了解了市场的运作. Ilinski 认为规范理论可以应用到金融建模工作上.

1997 年，Ilinski 和合作者发表了一系列科学论文和研究报告[5—8]，阐述了他创立的金融物理，套利的规范理论，准有效金融市场的电动力学模型，以套利规范理论导出 Black - Scholes 方程等. 这一新的金融市场理论模型引起了回应讨论[9—12]，自此开辟了用物理理论研究金融市场的一条新途径. 当然，物理理论用于研究金融不是从规范场开始，早在 1900 年已有一开端，那是应用到随机行走数学的布朗运动[3]，1985 年后有很大的发展[2]，规范理论的应用到金融市场，也反映了 21 世纪物理学向社会科学渗透的趋势.

3 市场作为物理系统

要理解为什么规范理论可以用到金融市场，需要先回答两个问题：一是从一个理论物理的观点来看，金融市场能否作为一个物理系统来处理？二是从金融市场的角度来看，规范场理论框架能否容纳

金融市场包含的基本元素、概念和运作？这是一件事情的两个侧面，或者说物理系统与金融市场是否有共通之道，两者能否恰好匹配.

把市场作为一个物理系统用物理理论方法处理是否成立，这是一个仍在讨论和争论中的问题. 经济学者金融学者会认为这是一个假命题，理由一般来说是：第一，经济问题和物理问题是两种对象、性质和方式都不同的问题，不可以用物理方法去解决经济问题，犹如不可能用解决经济问题的办法去解决物理问题；第二，经济市场是人群所参与实践的，人是有个人意志的参与者，其参与过程中有策略、决策等理性的因素和心理等非理性因素，这些都不是物理方法所能涉及的；第三，经济市场不但受自然环境的影响还受政治的影响甚至支配，这些影响和支配作用在性质上不是物理的，也不可以量化的. 基于以上三点考虑，对于目前所谓"金融物理"，有一部分学者并不认同.

对于金融市场物理模型支持者来说，他们的理由之一是认为市场具有对称性，如同物理系统一样，因而能够探索市场的对称原则并根据这些原则推演一定的规律，本文所介绍的规范建模就是一项最近的发展，下一节我们先说物理对称性原理如何支配物理系统的行为.

4 对称原理支配系统行为

20 世纪物理学基础理论的最主要成就之一，就是对于物理世界对称性的认识，它始于 20 世纪之初爱因斯坦的狭义相对论，物理规律都必须遵从一定的时空对称，亦即是相对性原理，它表现为在均匀四维时空中的洛伦兹变换不变，这个相对论对称性限制了可能的可供选择的如哈密顿量，拉格朗日量必须满足相对论时空对称性，从这点出发再加入最小作用量原理的要求下，导出了系统的运动方程，从而建立力学系统的完整理论体系，但是应该注意到对称性原理给出了对可供物理系统应用的模型限制，但并未做到决定唯一的选择. 20 世纪中叶（1954 年），杨振宁－米尔斯的非亚贝尔规范理论发展定域对称性原理唯一地确定了非亚贝尔互作用[13,14]. 1967 年这个理论成为统一电磁和弱相互作用的框架，回头再看其实电磁场里相互作用本身就是由相对论对称性和定域规范对称决定的一种物质相互作用. 关于这个例子的详细演绎请参看本文附录："对称原理支配系统行为的一个例子：定域规范不变和相对论洛伦兹不变决定电子电磁作用".

金融市场如果可以作一个物理系统来看，它是一个很大自由度的系统，在这种系统中即使微观看来，单个的参与者有"自由意志"的行动，但就宏观整体来看，除非受到环境力场的统一指挥，这些行动表现也是随机性的，因而正像物理的统计力学系统，可以类似地处理，这种系统在一定时段或长或短会达到一定程度和时间的平衡和具有某些守恒量和守恒律，这些守恒量就反映了某些对称性. 正是在这个意义上对称起了支配作用，市场作为一个大数目自由度的系统在平衡或动力状态下的变化趋势和互相作用互动行动受到对称规律的支配. 本文所介绍的"规范建模"就是从这个观点出发，从规范对称的原则去演绎市场的行为. 作为物理学系统的一个范例就是电子与电磁场系统的相互作用，这在"附录"中看到电子作为系统行为的参与者，规范场中电磁场作为信息传递者，他们间的互动互作用被定域规范对称所支配决定. 在第 8 节将会举出一个简单例子，外汇市场的规范对称来解说上述的理念.

5 规范场的基本要素

从附录所举这个例子看到规范场理论的基本要素：

（1）系统有两种相互独立、但又处于相互关连的空间，即外空间，它就是通常的四维时空；内空间（内禀空间），它是系统本身固有的物理量构成；外空间（四维空间）的每一处都联结着一个内空间.

（2）每空间都有在它上面操作的对称变换，外空间存在着洛伦兹变换，内空间存在着规范变换. 物理上要求物理系统对于这些变换具有对称性，用作用量表达系统的力学结构，对称性原理就是作用量对于对称变换不变.

（3）外空间各点上缔结的内空间对称变换是各自独立的，称为定域化内对称变换或内对称定域规范变换，内外空间的变换各自构成群，内对称变换群称为规范群（参看图 1）

（4）物理现象对以上变换不变，这个要求决定系统的动力学，内部互作用——对称性决定互作用，规范场就是内对称不变，所必须引入的媒介场（也叫"补偿场"、"相位场"）在外空间相邻两点间联络传递信息.

（5）上面所讲电磁场例子是亚贝尔规范场，它的规范群是 U（1）一维可交易群，导致的理论是线性的. 一般的有不可易的规范群，非亚贝尔规范群，

这种情形下的规范场有非线性的自作用.

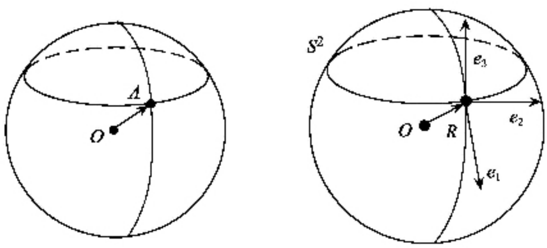


图1　在外空间球面上每一点都缔合一个三维标架定域内空间

从这里,我们可以设想规范场模型比较以往的数量经济学的模型主要不同在于,它包含不独是单一市场平台,它可以包含市场的互相独立同时又互相牵连的两个平台. 这种关系使描述的工具不单是数量,同时也运用几何的(形态的,结构的)工具. 因此当我们对于金融市场使用‘规范场’这一词的时候,应当在比物理学更为广泛的意义上去了解. 不应该严格依照物理理论所规定的定义,在这个方面参考文献[15—17]提供了一些想法.

规范场理论的数学结构是数学微分几何和拓朴学的一个分支——纤维丛. 下面简单介绍纤维丛的概念. 纤维丛是一种几何结构,简化地来说它的一个最简单的非平庸结构的形象就是通常所谓 Mobius 带,如图2所示,它是图2(a)的带状图形经过一个扭转操作,对边反贴成环状,图2(b)所示,带状无扭转成环状是一个平庸的结构,但经过扭转操的环,就是非平庸结构. 如图3所示,纤维丛的数学概念严格来说相当复杂,我们简化地介绍,它至少包含三个要素,这就是底空间、纤维、丛空间,简单的示意形象如图4,从纤维丛的结构性质,我们可以利用它的几何概念赋予物理的解释,如平庸与非平庸,定域与整体,平移,连通,曲面的指标,不变量等等. 这些数学概念和规范场物理理论概念恰恰完全有对应. 以下本文阐说这种对应关系套用到金融市场去建立模型.

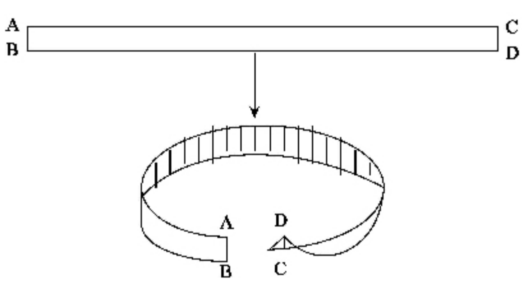


图2　Moebius 带(最简单的非平庸结构是 Mobius 带,将长条纸带扭转180°后,将对顶点 A 点与 D 点、B 点与 C 点粘结形成)

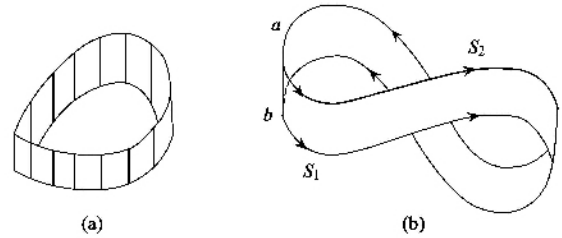


图3　(a)平庸拓扑;(b)非平庸拓扑

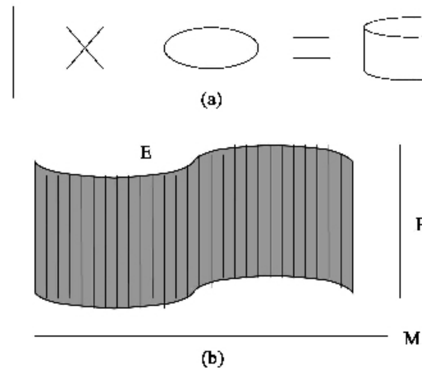


图4　(a)平庸的纤维丛是两空间的直乘;(b)纤维从由底空间 M,纤维 F 和从空间 E 构成

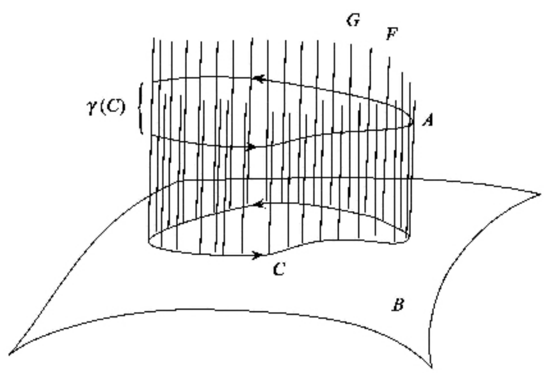


图5　纤维丛示意图

6　纤维丛的基本要素和规范场匹配的描述[18—21]

纤维丛是数学中一种几何的结构,它的构成主要因素从严格的数学观点来定义可以包括十几个条件之多,但我们从一个物理学者的应用观点来看它的结构最主要的是几个构件.

(1)底空间——纤维丛整体几何结构建筑在一个多维连续流形之上,底空间记为 M (base space).

(2)纤维——在底空间的每一点上固连一个线性空间,它称为纤维 F(fibre). 最简单的纤维是一维向量空间,底空间和在其上的纤维全体构成了丛空

表1　规范场、纤维丛和金融市场的已知构成量的对应关系

物理术语	数学(几何学)术语	规范理论术语	金融学术语
物质		物资场	资产
电流		源场流	货币流
正电荷		场源(正源)	现金
负电荷		场阱(真源)	债务
电磁势	联络的分量	规范势(场)	价格,贴现,利率,汇率
电磁场	曲率张量	规范场强	套利,超额收益
运动方程	矢量平行移动	平行移动	净产值,贴现过程
波函数	截面	定域规范场变换	货币单位汇率的变换
波函数相位变换	矢量方向改变	定域规范变换	
量子起伏,不定值		量子起伏,不定值	价格,利率,汇率等的不定
纯电磁场		纯规范场	均衡市场
标度变换		Weyl 标度规范	外汇市场
电动力学 (电子电磁场互作用)		有场流场源的规范场	动态市场 (有资金流)

间,可以形象地说,在底空间每一点上粘上了一支纤维. 这构成了丛空间 B(bundle space).

(3)丛空间与底空间的点存在对应的连续映射关系 p: B→M 称为投射(projection),这一投射关系规定了丛空间与底空间的关系,构造了一个整体的几何结构.

参考文献[21]中列举了纤维丛的结构因子达10项之多,对于我们一般地以上三项的理解也就可以了,但是为了与规范场理论配合,还需在上列因素之外加入:

(4)在纤维上操作的群,群的元素作用在纤维上,称为结构群 G.

几何学讲形态和结构,这是整体的视野,纤维丛是整体性的数学,非平庸的纤维丛是不可以由单纯的局部直乘直和或简单粘贴而成,不可以简单因子化而不介入另外的操作.

物理学的规范场恰当的数学描述是纤维丛. 规范场的要素中包括两种空间,内外空间,在外空间每一点上缔合一内空间,这正好与纤维丛的底空间上粘合纤维相对应,纤维上的结构群就对应着内空间上的规范群.

纤维丛数学是 S. S. Chern(陈省身)于1944年引入,现代的规范场理论是1954年 C. N. Yang(杨振宁)和 R. L. Mills 引入,数学和物理两学科两项创意重要贡献原来是互不相通的,二十余年后,才悟到两者竟可以是一回事的各自表述. 规范场的纤维丛表述是杨振宁和吴大峻(T. T. Wu)于1975年阐明的,而规范场与纤维丛的对应关系也在同时为陆启铿所认识[22]. 我们在本文表1中列举了规范场理论的物理量与纤维丛数学中的几何量对应关系.

纤维丛是其包含的多个要素按照一定法则构造成的几何结构体,它的重要在于它的整体性,这个几何结构的整体用于描述物理现象时,它可以表述一些较为复杂的现象,例如非亚贝尔规范场,即杨-米尔斯场. 现在有人试图把它用于描述金融市场,初看起来有点匪夷所思,但是我们知道金融市场的复杂性和整体性需要一种数学描述超出了以往常规的应用数学. 例如外汇市场,它包含了几个外汇货币区,每一个货币区就有它本身各种货币的兑换率,而金融资产对于各种货币变换,虽则表面价格改变,资产价值不变. 由于某地区兑换率的改变,使总体的市场失去均衡,出现了套利的机会,就会引起资金的流动,市场交易者得以从中获利,这种活动的结果市场又再达到新的平衡. 这样的机制看来适合于纤维丛的语言去描述,因为它包含两种金融活动,货币区的货币流通和货币兑换活动,货币区的全体构成底空间,货币兑换构成纤维,兑换率表徵了结构群,由于某个货币区兑换率的改变使资金从一个货币区到另一不同兑换率货币区的流动. 这一活动由丛空间投射到底空间,套利活动就成为底空间的一条闭合路径. 这些考虑,使我们觉得以纤维丛代表金融外汇市场有它的合理思维.

建立金融外汇市场的纤维丛模型还需考虑市场的动态演化,这就需要引入物理思维,纤维丛同样是

描述规范场的合适的工具. 由此,市场的规范场模型是合理的一步. 为了实现这一步骤,我们把纤维丛、规范场和金融市场三者已知的构成量的对应关系假设如表 1.

Ilinski 作出了下面的假设:实际资产价值对于货币单位的定域标度改变的对称性是金融市场规范建模的规范对称. 金融环境的一切可观察性质(特别是动力过程的规律)不依赖于资产单位的选择. 这就是金融市场规范模型的立足点,但我们应该注意到:

(1) Ilinski 所用的规范场模型不是现代物理学中常用的规范场模型:

(ⅰ)它的规范场不是通常物理学所说的 U(1),SU(2),SU(3)等规范群,它用的是标度变换(涨缩 Dilatation)群.

(ⅱ)这个群是线性实数不是含复数的操作,所以不能是物理学意义上的量子效应,它所说的量子电动力学模型是形式类比,它没有量子的算子力学量和几率波概念.

(ⅲ)它的不定值不是量子的不定值是人为加入的概率分布.

(ⅳ)物理学现在用到规范场是由规范对称原理和相对论对称原理,几乎唯一地确定的互作用理论. Ilinski 的金融市场规范场模型要加入他所谓' 第一原理 '很多假设.

(2) Ilinski 的规范建模是应用了物理理论的一般指导的思想路线:

(ⅰ)对称性→拉格朗日作用量→最小作用原理→运动方程.

(ⅱ)为从对称性构造作用量,先建造一个几何的模型,从几何的量中选取作用量的构件,用这些几何量构成满足对称性的作用量.

(ⅲ)用这些几何构件代表了金融市场的基本量,对几何量赋予相应的市场释义,几何学上这些几何量的运作过程描述市场的运作.

纤维丛基础上建模

物理模型　　金融模型

↓　　　　　↓

规范场　→　金融市场

↖　　　　↗

纤维丛

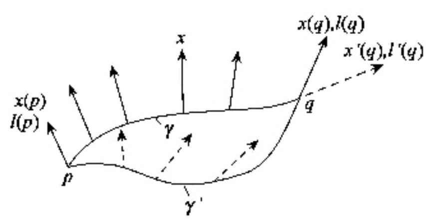
正是这一标准物理路线的套用,使人们认为这一模型太过于' 物理化 '了,有以物理方法解决经济问题的印象.

(3) Ilinski 采用的亚贝尔规范群,不含非线性作用,也许金融市场具有的非线性性质需要的是非线性的非亚贝尔规范场.

7　纤维丛空间的几何操作——矢量平行移动

从上节看到我们已经建立起初步的结构概念,在纤维丛、范场和金融市场三个方面有了对应的联系. 我们以曲面上的矢量平行移动为例,说明纤维丛有曲率的空间中矢量的平行移动的几何性质,用它代表金融市场的相应的运作.

矢量在一曲面上沿曲面上一条曲线移动(如图 6),在移动过程中,矢量相对于曲面的法线没有转动. 矢量的根端沿曲线上一点,这称为矢量无局域转动. 但如曲线是一闭合路线,矢量回到原来起始位置时,它的方向相对于起点处法线有了一转角,这称为整体的改变. 无局域改变而有整体改变,矢量的移动为平行移动. 为了比较空间两点上两根矢量,需要把它们移到同一点上比较,这就需要平行移动. 为比较相邻两点矢量需要联结两点的联络,这联络决定于空间的曲率.



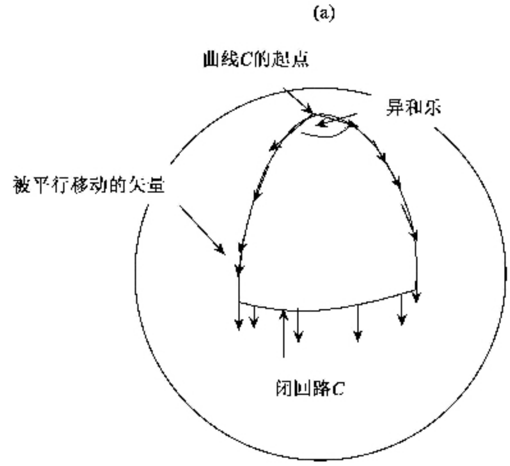


图 6　(a)矢量沿曲面上曲线的平行移动;(b)矢量在球面上的平行移动

金融市场规范建模中应用几何概念平行移动的例子如下.

(1)计算资产净现值(NPV)方法

由于不同时间资产值不同,需要比较不同时间的价值而求得资产的净现时价值,不同时间价值通过贴现(discounting)过程出现,这比较就应用矢量平行移动.为此,用曲面上的连络时间分量表示贴现率.

(2)外汇市场的套利(arbitrage)

套利——利润从无中生有,一顿免费午餐,无风险超额获利大于银行无风险存款利息,为比较这两者收益,以平行移动过程中曲面的曲率,张量表达这收益差额.

8 简单金融市场的规范模型例子

1997 年,俄罗斯理论物理学 Illinski 和 Kalinin 作出了金融市场的规范场模型,K. Young(杨纲凯)[9] 作出一简单的外汇市场模型.取美元、日元和马克三种货币外汇市场为例:设以二维平面格点阵底空间,这是一分立的点的空间.令 i = 空间格点上的格点位置,世界的货币为若干个区,每一区占据一个格点 i;ϕ_i 是某种世界通用商品在货币区 i 的价格,以该区货币为单位;U_{ij} 是货币 i,j 之间的汇率,货币 i 一个单位可兑换 j 货币 单位,如 i 为美元 US \$,j 为日元(Yen),当时市价 1 美元可兑换 128 日元,则 $U_{ij}=128$. 略去兑换买卖差额:$U_{ij}=(U_{ij})^{-1}$,定义 $U_{ij}=e^{qA_{ij}}$,q 为常数,注意此处无$\sqrt{-1}$因子,.在某货币区内的货币单位是一种习惯的约定,改变单位对经济金融没有实际影响,不同货币的单位可以各自独立改变习惯约定.这种改变表现为:$\phi_i \to \phi'_i = e^{\theta_i}\phi_i$,注意此处也没有$\sqrt{-1}$因子.此种变换成群 $GL^+(1,R)$ 一维实广义线性群(one dimensional real general linear group with positive determinants).

由此可见一个简单的外汇市场存在以下几个因素:

(1)存在有一种约定习惯——各种货币可以改变的单位——规范变换;

(2)这单位可以在不同地点各自独立地改变——定域化变换;

(3)真正的价值对这些改变是不会改变的——规范不变性(规范对称性).

设想全球经济分成三种货币区,美元,马克,日元,每个货币区有它自己规定的货币单位和兑换率,令 ϕ_i 代表某一种通用的货物在货币区 i 的价格,以该区的货币单位表达,兑换率 U_{ij} 是指一个 i 种货币单位兑换 U_{ij} 个单位的 j 种货币,把 U_{ij} 个单位的 j 货币,把 U_{ij} 写出 $U_{ij}=e^{qA_{ij}}$. q 为常数,如果把货币 i 的单位改变,ϕ_i 的表面值也改变

$$\phi_i \to \phi'_i = e^{\theta_i}\phi_i.$$

这表示单位的涨缩,这一组变换构成一个群——一维广义线性变换群,行列式为正.货币单位的改变使汇率改变

$$U_{ij} \to U'_{ij} = e^{(\theta_j-\theta_i)}U_{ij}.$$

这些改变都只是名义上的改变,并不引起货物价值的改变:

依赖约定习惯——依赖规范

不依习惯改变——规范不变.

套利过程表示为 $F(\Gamma)$,$F=\prod_{\Gamma}U_{i_i i_{n+1}}$,$\Gamma$ 为一闭合的回路;当 $F=1$ 时无套利机会;$F\neq 1$ 有套利机会.这是最简单的外汇市场规范模型.

Ilinski, Kalinin 假设,没有资金流的金融市场规范理论模型是纯规范场,从这一理论应用本文第 4 节和附录的方法在经典近似下导出鞍点方程

从连续时间下的作用量(action)给出的方程,可导出 Black - Scholes 方程

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{\sigma}{2}S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}+rS\frac{\partial\sigma}{\partial S}-rV=0,$$

这是著名的关于股票期权价格的 Black - Scholes 偏微方程,这公式的导出被认为是金融理论的重大突破.这方程式在统计物理中是 Fokker - Planck 方程.式中的金融变量意义如下:$V(S,t)$——某股票期权价格;S_t——股票在时间 t 时的价格.

B - S 方程的解要根据不同类型股票制订不同的边界条件.由此又可导出金融资产价格的公式:Black - Scholes 公式

$$S_\tau = S_0\exp[\alpha B_\tau + (\gamma - (\alpha^2)/2)\mu],$$

其中,S = 股票价格,τ = 到期时间,σ = 股息波动率(常数),μ = 股息漂移率(常数),γ = 无风险利率(常数),B = 布朗运动的价格变化分布.投资组合 α 股价格为 S_τ 之股票,现金 b 美元,投资额 $H=\alpha S_0+b$. B - S 方程在世界金融理论中通行三十年,1997 年 Scholes, Merton 获得诺贝尔经济奖.导出这些公式是规范建模理论被视为有吸引力可能成功的原因.

金融市场的规范建模的目的还在于建立非均衡非完全有效的市场模型,有资本流情况下的市场是非均衡状态,如上面简单外汇市场的例子所示.由于市场运作中某个环节偏离均衡,导致市场产生了有序的变化,资金有一定流向,规范建模中(表 1 所

示)把市场模型比作为电动力学,将资金流认同作为电子流,现金与债务作为符号相反的电荷. 由于汇率失衡,发生突然的变化,引起投资者向有利的市场交换聚集,资金向有利兑换率货币投资,资金流发出的信息媒介称为套利场,也就被认作为规范场. 这引起总兑换率的继续变化,直至无利可图,市场再度达到均衡. 这好像电子从高电位向低电位流动,直到电势平衡. 由于有电子流的电动力学的规范场理论,一开始就引入电子波函数,它是因为量子力学中力学量有本身内禀的不确定性,即量子起伏,而 Ilinski 的金融市场的规范场模型只是经典非量子的实数操作,没有不确定量和测不准关系. 为了计及市场的起伏,Ilinski 引入了随机量去描述非均衡状态下的兑换率起伏,另一方面 Ilinski 又像模仿量子电动力学的虚过程(virtual process)的概念,引入虚套利场的概念,电动力学在极短时间过程中虚光子引起电子部分的互相作用,电子电荷质量的重整效应,类似的观念下,虚套利场引起市场量的一些"量子修正"效应. Ilinski 及其合作者从无资金流的纯规范场模型,演算推导出资金价格定价的 Black - Schole 公式,在有资金流的市场的"类电动力学"(electrodynamics - like)模型推演出对于 Black - Schole 公式的修正,对股价变化概率函数的正态分布的修正(肥尾效应)等等.

模型的建造有四个部分:一是建立市场与规范场纤维丛的对应,由此取得可以运用的数学概念和关系作为模型的构件和工具;二是从物理学的对称性原则出发以处理力学系统的标准方式,先构筑代表市场作用量(action),然后按照最小作用原理,推导运动方程;三是由于市场不完全相同于物理的力学系统,只是对称原则不足以确定市场演化运作,因而需要根据市场的经济金融等要求加入若干假设,Ilinski 称之为"第一原理"(The first principles),才能给出一定情况市场的解答;四是根据各种具体市场的特点,设定若干边界条件、初始条件以选出特定的解.

要构造代表市场系统的作用量,除要遵从规范对称原理外,纤维丛数学模型只能用尝试的方法,构建的构件自然取自纤维丛的数学工具. 例如:曲率联络等等和与以相应的规范场各种量,如源场函数、源流、规范势等等,构成标度不变的作用量.

Ilinski 及其合作者进一步对有资金流的动态市场作规范建模,他们称为金融市场的量子电动力学模型. 本文不可能详述这个模型,因为它比较复杂,需要很多的证明,并且,我们已经在前面说到,它不是真正的"量子"模型,也不是电动力学的规范不变性,仅仅是形式上的类比,不过它毕竟是一项有创意的尝试.

9 对规范建模的评议

对于 Illinski 金融市场的规范建模理论的评价,目前公开的文献资料和网上的评论并不多,特别是最近三年以来,见到资料甚少,我们无从评述国际范围内对这个方向的毁誉成败. 这类以物理,特别是量子物理方法去讨论金融市场的论述专著却出版了好几本,它们有路径积分方法的,有混沌机理的,当然有规范场论的,总的趋势是理论物理思想与方法渗入到金融经济领域,在这一个趋势来说,我们认为不可忽视,就这些形形色色的具体方法理论来说,我们不妨走着瞧. 就 Ilinski 的规范建模来说,到目前它的最主要的成就是从它的思想和方法导出金融衍生工具,期权定价的 Black - Scholes - Merton 公式和宣称得到了不完全有效市场对 BSM 公式的修正,解释了实际数据表现价格起伏对高斯(正态)分布的偏离,比原来的公式有了一大进展. 这个结果是令人鼓舞的,但是有严肃的评论指出[10],Illinski 这个结果并不能表示证明了他的理论的正确性,因为还有其他的方法也可以同样得到相同的结果. Illinski 理论并未能说明规范原则为何能挑选出某种处理的运作作为正确的选择.

在物理学,用纤维丛数学描述的物理是非亚贝尔规范场,即杨 - 米尔斯(Yang - Mills)场,它的代表是非平庸的纤维丛它的底空间结构需是流形,本身具有叠置的局部结构,它给出了新的物理的描述,例如磁单极,Ilinski 用于构建金融市场模型的是电动力学的规范场即亚贝尔规范场,纤维丛理论用于这类型规范场没有给出新的物理描述. 包含磁单极的系统才需要真正纤维丛的描述,因此我们没有看到金融市场非要有纤维丛结构的必要. 我们不能排除这种可能性:用纤维丛去表述金融市场结构纯属牵强附会,也许近年人们说及金融市场的非线性性质,会需要非亚贝尔规范场的非线性描述. 不过,这只是个人的纯属猜想,并未有根据.

我们在本文第 6 节曾经指出,Illinski 理论采用的标度变换是全实数的广义线性变换,它不是我们通常意义下的规范变换(相位复数变换). 它不是我们所说的量子物理,他运用的对称性支配互作用的

规范原理也是不完整的物理原理，他还必须加入许多来自市场的他称之为的"第一原理".虽然存在着疑问和缺漏，但毕竟这个理论开创了以几何的形式和构造去描述复杂的金融市场，包括不只一个的并行的市场，把对称性原则提到金融市场面前，所以或许它的发展会给我们开辟一个新的领域.

从本文的叙说看到金融市场规范建模研究实质上是启发探索了一些可能性：

(1)对称性支配的原理在金融经济领域的运用的可能性；

(2)纤维丛的复杂的几何结构用于描述金融经济市场复杂系统的可能性；

(3)超出了量化经济学的范畴，探索市场形态结构的几何化表述的可能性.

本文作者并不认为目前的"规范建模"一定是正确或成功的，它存在很多基本的问题，不论观念上和演算上都有不少的漏洞，但它至少向我们提供了探索上述的一些具有根本意义的问题，还是一句老话：它未必成功，但不可忽视潜在的势能.

参 考 文 献

[1] 张建玮，王正行. 经济物理学一瞥. 赵凯华，秦克诚主编. 物理学照亮世界. 北京：北京大学出版社，2005. 144—167

[2] 李平，汪秉宏，全宏俊. 物理，2004，33：28

[3] 李华钟. 科技中国，2005(10)：18

[4] 李华钟. 给中山大学物理系理论物理专业研究生的报告，2005，10.28

[5] Ilinski K. Finanical Physics——Gauge modeling in non-equilibrium Pricing. John-Wiley & Son. 2001；中译本：殷剑峰，李彦译. 金融物理，机械工业出版社，2003

[6] Ilinski K. arxiv：hep-th1971048vl，1997

[7] Ilinski K，Stepanenko A S. arxiv：cond-mat/9806138VI，1998

[8] Ilinski K，Kalinin G. arxiv：hep-th/9712034V2，1998

[9] Young K. Amer. J. Phys.，1999，67：862

[10] D. Sornette. Int. J. Mod. Phys.，1998，C9：505

[11] Dunbar N. Market Forces，http://web.lexis-nexis.com

[12] "非均衡金融市场定价的规范建模研讨会"专题报告. 上海：中科院系统科学研究所-上海理工大学：上海系统科学研究院主办，2005，11，11

[13] 李华钟. 物理，2004，33：137

[14] 李华钟. 物理，2005，34：548

[15] Mack G.. Gauge theory of things alive and universal dynamics，1994，DESY94-184，http://xxx.lanl.gov/abs/hep-let/9411059

[16] Ed. Shapere A，Wilczek F. Geometric Phases in Physics，1989

[17] 李华钟. 简单物理系统的整体性. 上海：上海科技出版社，1998

[18] 李华钟. 简单物理系统的整体性，附录I. 上海：上海科技出版社，1998

[19] Isham C J. Modern Differential Geomertry for Physicists. World Scientific，1989

[20] Nash C，Sen S. Topology and Geometry for Physicists. Academic Press，1983

[21] Thomas G H. Introductory Lectures on Fibre Bundles and Topology for Physicists ANL-HEP-PR-78-23，1978

[22] 李华钟. 物理，2002，21：249(此文被转截于"全球华人专业人士网"http://www.network.chinese.com，2003，4)

附录

1 定域规范不变和相对论洛伦兹不变决定电子电磁作用

我们将以电子电磁作用为例演示对称性决定互作用这一原理，同时显示定域规范对称要求需要有规范场的出现，规范场在电子之间传递信息(互作用)，物理学中处理力学系统动力问题的普适规则是根据物理系统的动力学原理——最小作用量原理. 系统的动力学行为由拉格朗日函数(Lagrangian function)所支配，力学系统在 t_1 时刻的广义坐标：$q_i(t_1)$，$i=1,2,3\cdots n$，t_2时刻的广义坐标：$q_i(t_2)$ Lagrangian 记为 $L(q,\dot{q};t)$，$q=\{q_i\}$.

定义作用量(action)：

$$S=\int_{t_1}^{t_2}L(q,\dot{q};t)\,\mathrm{d}t,$$

此式表示从时间 t_1 到 t_2，坐标 $q_i(t_1)$ 到 $q_i(t_2)$ 之间可以有很多可能的路径，真实发生的运动所沿的路径 $q_{icl}(t)$ 使作用量 S 最值最小——哈密顿最小作用原理：

$$\delta S[q_i]\mid q_i(t)=q_{cli}l(t)=0.$$

从物理系统的对称性给予制约 L 相应的对称限制条件，对称变换下的不变性规定了 L 所可能的函数形式. 最小作用原理使给定了 L 后，可导出系统的运动方程(拉格朗日方程，哈密顿方程以至牛顿方程). 再根据 Noether 定理从 L 的对称性导出系统的守恒量，守恒律.

理论物理常用到拉格朗日密度 $\mathscr{L}(\dot{q},t)$，定义为

$$L=\int\mathscr{L}\mathrm{d}q.$$

最小作用原理给出拉格朗日方程

$$\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial q_i}-\frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{q}_i}\right)=0,$$

因此力学系统的问题，归结为先找出拉氏密度，现在以单个自由电子为例，说明构造拉氏密度，导出运动方程.

设想只有一个自由电子的系统，首先构造自由电子的拉格朗日密度，$\mathscr{L}$. 自由电子质量为 m，动量为 p_μ，波函数记为 $\psi(x)$. 在洛伦兹不变的要求下，可以运用的量是 $\bar{\psi}(x)$，$\psi(x)$，γ_μ，m，p_μ. 由他们构成的相对论不变量为

$$\mathscr{L}(x)=-\bar{\psi}(x)(\gamma_\mu\partial_\mu+m)\psi(x),$$

其中 γ_μ 是 4×4 常数矩阵，$p_\mu=-\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial x^\mu}$，$\partial_\mu$ 是$\frac{\partial}{\partial x^\mu}$的记号，$\mu$

$=0,1,2,3$. 假定这是自由电子的拉格朗日密度，由拉格朗日方程

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \psi_\sigma}-\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial\left(\frac{\partial \psi_\sigma}{\partial x_\mu}\right)}\right)=0$$

得 $\quad (\gamma_\mu \partial_\partial + m)\psi(x) = 0$，

这就是 Dirac 自由电子相对论运动方程. 这个方程对于下列变换不变

$$\psi(x) \to \psi'(x) = e^{i\alpha}\psi(x),$$

α 为一常数，这个变换叫做第一类规范变换，是 1929 年 Weyl 提出的，又叫做一体的规范变换（global gauge transformation），α 是对全时空一样的常数. 在这种规范变换下，$\mathscr{L}'=\mathscr{L}$ 由于这种不变性，可由 Noether 定理导出

$$\partial_\mu j_\mu(x) = 0$$

$$j_\mu(x) = -i\alpha\bar{\psi}\gamma_\mu\psi,$$

其中 $Q=-i\int j_4(x)\,d^3x$，取 $\alpha=e$，则 Q 为电荷，$j_\mu(x)$，$\mu=1,2,3$ 为电流强度，$\partial_\mu j_\mu(x)=0$ 为电荷－电流守恒，即一体规范不变性导致电荷守恒.

现在将变换 $\psi'(x)=e^{i\alpha}\psi(x)$ 定域化（localize），即 α 不是常数而是按不同 x 而不同，$\alpha\to\alpha(x)$，定域规范变换 $\psi'(x)=e^{i\alpha(x)}\psi(x)$.

可以验证，这时 $\mathscr{L}(x)$ 对于定域规范变换不是不变了，在定域规范变换下

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}' = \bar{\psi}'(x)\left[\gamma_\mu(\partial_\mu - i\partial_\mu\alpha(x)) + m\right]\psi'.$$

如果要求拉氏密度在定域规范变换下不变，就必须在 $\mathscr{L}$ 中多加一项以抵消 $\alpha(x)$ 的贡献，即

$$\mathscr{L} = -\psi(x)\left[\gamma_\mu(\partial_\mu - ieA_\mu(x)) + m\right]\psi(x).$$

这 $\mathscr{L}$ 对于下列变换不变——定域规范变换：

$$\psi(x)\to\psi'(x)=\psi e^{i\alpha(x)},$$

$$A_\mu(x)\to A'_\mu(x)=A_\mu(x)+\frac{1}{e}\partial_\mu\alpha(x),$$

使 $\quad \mathscr{L}\to\mathscr{L}'=\mathscr{L}$.

所以定域规范不变要求存在有 $A_\mu(x)$ 这种量，这 $A_\mu(x)$ 正是电磁矢量势 $A_\mu(x)$——又称规范势，规范场.

定域规范不变性给定了电子和电磁场的互作用，为

$$-ie(\psi\gamma_\mu\psi)A_\mu = j_\nu A_\mu,$$

$$j_\mu = -ie\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x),$$

这是电子流（电流）与规范势（电磁势）作用.

令电磁场强张量 $F_{\mu\nu}=\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu$，

则纯电磁场的拉氏密度为

$$\mathscr{L}_{\mathscr{A}} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}$$

（电子＋电磁场）系统的总拉氏密度为

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \bar{\psi}(x)\gamma_\mu(\partial_\mu + m)\psi(x) + ie\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x)A_\mu(x)$$

＝电磁场＋自由电子＋电流与电磁场互作用.

$\mathscr{L}$ 对于定域规范变换不变，完全描述了电子电磁场系统. 定域规范变换 $\psi'(x)=e^{i\alpha(x)}\psi(x)$，看成是 U(1) 群的元素，规范变换构成 U(1) 变换群，称为定域规范群.

从以上例子看到相对论对称原理作为构造拉氏密度的出发点，最小作用原理是导出系统的动力方程的出发点，定域规范对称性原理是构造完美的电子电磁作用的出发点，它导致规范场的自动自然的出现，成为电子互作用的媒介，信息使者.

2 国外近年关于规范场理论的一些评述

[1] Chen T P（郑大培），Li LF（李灵峰）. Am. J. Phys.，1988，56(7)

[2] Ed. Taylor J C. Gauge Theories in the Twentieth Century. Imperial College Press，2001

[3] O'Raifeartaigh L，Straumann N. Rev. Mod. Phys.，2000，72：1

[4] O'Raifeartaigh L. AAPPS Bullein，1996，6(2)

[5] Jackson J D，Okun L. Rev. Mod. Phys.，2001，73：663

[6] Wu A C T（吴期泰），Yang C N. Evolution of the Concept of the Vector Potential in the Description of Fundamental interactions，(to be published in Rev. Mod. Phys)

[7] O'Raifeartaigh L. The Dawning of Gauge Theory. Princeton University Press，1997

3 一组以国内大学教师和研究生为对象的，关于规范场基本概念的文章

[1] 李华钟. 物理，2001，30：668

[2] Li H Z. Modern Phys. Lett. A，2002，17：1995

[3] 李华钟. 物理，2004，33：861

[4] 李华钟. 物理，2003，32：192

[5] 李华钟. 杨振宁学术成就－－三大贡献之外. 庆祝杨振宁教授八十华诞学术论坛学术报告"三会文集"，全国高校量子力学研讨会，2003. 17

[6] 李华钟. 物理学进展，2004，24：458

[7] 李华钟. 物理，2006，35：340

[8] Li H Z. Gauge transformation and non-integrable phase factors. In：Proc. International conference on non－perturbative methods in quantum field Dec. 2004，Guangzhou，World Scientific Pub.，to be published