

# 动态质量密度和声学超常介质\*

沈平<sup>1,†</sup> 梅军<sup>1</sup> 刘正猷<sup>2</sup> 温维佳<sup>1</sup>

(1 香港科技大学物理学系 香港 九龙清水湾)

(2 武汉大学物理科学与技术学院 武汉 430072)

**摘要** 复合介质的质量密度通常认为是组成它的各种成分的质量密度的体平均值. 体平均质量密度常常被用于计算在长波长极限下的声波速度, 在此极限下波长比复合介质中的特征尺度要大得多. 作者通过严格的数学推导证明, 计算(长波长极限下的)波速时所用到的动态质量密度与静态的体平均质量密度有显著的不同. 这一发现与最近的实验结果符合得非常好, 并且使得声学超常介质的实现成为可能. 这两种质量密度之所以不同的物理根源就在于, 在波场中复合介质中的各个成分之间有相对的运动. 也就是说, 隐含的假定——在长波长极限下复合介质中的各个成分必定会全体同相地运动——将不再正确, 尤其是当各个成分的声学阻抗之间较大的差异时. 实验和理论显示, 对于局域共振声学材料而言, 动态质量密度甚至还会变成是负的. 文章探讨了这一发现的物理意义, 以及它在声学超常介质领域的应用.

**关键词** 声学超常介质, 质量密度, 局域共振, 有效介质, 复合介质, 波的传播

## Dynamic mass density and acoustic metamaterials

SHEN Ping<sup>1,†</sup> MEI Jun<sup>1</sup> LIU Zheng-You<sup>2</sup> WEN Wei-Jia<sup>1</sup>

(1 Department of Physics, Hong Kong University of Science and Technology, Clear Water Bay, Kowloon, Hong Kong, China)

(2 Department of Physics, Wuhan University, Wuhan 430072, China)

**Abstract** The mass density of a composite is generally taken as the volume-averaged value of the components' densities. Moreover, the same volume-averaged mass density is usually used to calculate the wave speed in the long wavelength limit, i. e., where the wavelength is much larger than the size of the inhomogeneities. In this paper we show via rigorous derivation that the dynamic mass density used in the calculation of (long wavelength) wave speed can differ significantly from the static volume averaged value. This recognition is shown to yield an excellent explanation of some recent experimental data, providing a basis for the realization of acoustic metamaterials. The physical reason for the difference between the two mass densities is attributed to the relative motion between the components. That is, the implicit assumption—that all components in a composite must move uniformly in the long wavelength limit—can be violated in the limit of large acoustic impedance contrast between the components. The dynamic mass density can even be negative for the locally resonant sonic materials, as demonstrated both experimentally and theoretically. The implications of this finding, in the context of acoustic metamaterials, are discussed.

**Keywords** acoustic metamaterials, mass density, local resonance, effective medium, composites, wave propagation

## 1 引言

通常而言, 人们认为复合介质的质量密度必定

是组成它的各种成分的质量密度的体平均值. 举个例子, 对于含有二种成分的复合介质, 其质量密度为

2006-09-12 收到

通讯联系人. Email: sheng@ust.hk

$D_v = (1-f)D_1 + fD_2$ , 其中成分 1 是基体, 成分 2 是嵌入体,  $D_1$  和  $D_2$  分别是它们的质量密度, 而  $f$  则是成分 2 所占的填充率. 我们把上述的这种定义称之为体平均质量密度 (VAMD), 简记为  $D_v$ . 事实上, 静态的质量密度必定是体平均质量密度, 这很容易通过测量复合介质的重量以及它所占的体积而验证. 然而, 复合介质的质量密度的一个重要的应用就是预测在低频极限下声波的传播速度 (此时波长要比复合介质中的特征尺度大得多), 即  $V = \sqrt{M/\rho}$ , 其中  $M$  是复合介质的有效弹性模量, 而  $\rho$  就是复合介质的动态质量密度. 问题在于: 是否一定有  $\rho = D_v$ ? 就像下文中所解释的那样, 这个问题的答案与声学超常介质的实现有密切的关系.

一直以来, 人们总是认为  $\rho = D_v$ . 直到二十年前, J. G. Berryman<sup>[1]</sup> 采用平均  $T$  矩阵方法推导出了另一个与之不同的动态质量密度的表达式, 用于预测 (基体是流体) 复合介质中长波长极限下的波动性质:

$$\frac{\rho - D_1}{(d-1)\rho + D_1} = f \frac{D_2 - D_1}{(d-1)D_2 + D_1}, \quad (1)$$

其中  $d$  表示空间的维度. Berryman 有效质量密度与直觉上正确的体平均质量密度有显著的不同. 从二十多年前被提出来一直到现在, Berryman 质量密度始终都没有引起足够的重视, 更谈不上被广泛的应用, 主要的原因是缺乏实验的验证, 当然另外一个原因是人们主观上宁愿相信符合直觉的体平均质量密度肯定是正确的, 否则就意味着人们必须承认一条根本性的原理: 复合介质的静态质量密度是不等同于它的动态质量密度的, 哪怕是在长波长的极限情况下二者也不相等. 此外, 由于 Berryman 仅仅通过平均的方式来处理多重散射现象, 数学上是不严格的, 因而也引起了不少的反对.

本文的宗旨在于阐释动态质量密度和静态质量密度之间的关系, 并且讨论这一发现的物理意义<sup>[2]</sup>. 在下文中我们将首先描述所用到的严格数学推导方法, 并将它用于解释最近的实验结果, 紧接着还讨论了两种质量密度  $\rho$  和  $D_v$  之间的区别及其物理原因. 我们还进一步展示, 对于局域共振声学材料而言, 动态质量密度  $\rho$  甚至有可能是负的<sup>[3]</sup>. 在文章的结尾, 我们讨论了声学超常介质在实验上的可能实现方法.

## 2 严格的推导方法

由于我们的目标是推导出复合介质的动态有效

质量密度的表达式, 我们的起点必定是弹性波波动方程. 复合介质通常包含有许多随机分布的细微结构, 波动方程是无法精确求解的. 于是用来推导所谓“有效介质”方程的传统方法免不了要采取一些近似, 例如“平均  $T$  矩阵近似”或者“相干势近似”. 通常这样的近似都是以一种“平均”的方式来处理发生在复合介质中的波的多重散射现象.

这里我们提出一种完全不同的、严格的方法来推导长波长极限下的有效介质方程. 为了具体起见, 我们以平行的无限长直圆柱体镶嵌于流体基体中的二维问题为例子来进行说明. 我们首先来处理周期性的微结构, 即这些圆柱体排列成二维周期性点阵. 由于周期性的存在, 波动方程的精确求解成为可能. 多重散射理论<sup>[4-6]</sup> (简称 MST) 就是这样的一种精确方法, 下文中我们将会详细描述. 有了多重散射理论之后, 我们总是可以通过使波的频率  $\omega \rightarrow 0$ , 在相关的方程之上来取得长波长的极限. 在此极限条件下 (周期性微结构中) 波的色散关系必定是线性的, 因为此时一个波长大大过许多个周期, 从而无法感觉到这些细微的结构, 于是波所看到的复合介质就是均匀的. 而这一线性色散关系的斜率就是我们所需要的有效波速.

但是怎样才能让这样一种方法对于随机排列的圆柱体而言仍然是正确的呢? 难道有效介质方程不依赖于圆柱体以何种周期性结构排列吗? 为了回答这样的问题, 我们应该知道, 系统的结构仅仅存在于  $ka$  的高阶展开项之中, 其中  $k$  是波矢,  $a$  是晶格常数. 换句话说, 在低阶展开项中, 线性色散关系的斜率与圆柱体是怎样排列的并没有关系, 而只与填充率  $f$  有关. 因此这些圆柱体是否作周期性排列并不重要. 通过在多重散射理论基础之上取长波长极限而得到的有效波速, 因而同样也能代表在随机结构中传播的波速! 通过这种方式, 我们就能够在有效介质的表达式中严格的计及波的所有多重散射效应.

当然, 这种方法也有它的局限性. 该方法只有在随机性并不会引入原系统中本不存在的新的统计关联性 (例如圆柱体之间的可连接性) 的前提下才有效.

## 3 多重散射理论

多重散射理论充分地计及了任意两个散射体之间的多重散射效应以及弹性波的矢量特性而没有任何近似. 为了便于同金属圆柱体置于空气中的实验结果相比较, 我们来考虑固体圆柱体置于流体基体

中的情况. 对于这种二维问题, 根据该理论, 在极坐标系中, 入射到第  $i$  个散射体上的入射波和该散射体的散射波的位移矢量  $u$  分别是

$$\begin{aligned} u_i^{\text{in}}(\boldsymbol{\rho}_i) &= \sum_n a_n^i J_n^i(\boldsymbol{\rho}_i), \\ u_i^{\text{sc}}(\boldsymbol{\rho}_i) &= \sum_n b_n^i H_n^i(\boldsymbol{\rho}_i), \end{aligned} \quad (2)$$

其中矢量函数  $J_n(\boldsymbol{\rho})$  和  $H_n(\boldsymbol{\rho})$  定义如下

$$\begin{aligned} J_n(\boldsymbol{\rho}) &= \nabla [ J_n(\alpha_1 \rho) e^{i n \varphi} ], \\ H_n(\boldsymbol{\rho}) &= \nabla [ H_n(\alpha_1 \rho) e^{i n \varphi} ], \end{aligned} \quad (3)$$

其中  $\alpha_1$  是流体基体中的波数  $\boldsymbol{\rho} = (\rho, \varphi)$  表示极坐标, 方程 (3) 等号右边的  $J_n(x)$  和  $H_n(x)$  分别表示  $n$  阶贝塞尔函数和  $n$  阶第一类汉克尔函数. 由于入射到第  $i$  个散射体上的入射波来自于所有其他散射体的散射波, 我们有

$$u_i^{\text{in}}(\boldsymbol{\rho}_i) = \sum_{j \neq i} \sum_{n'} b_{n'}^j H_{n'}^j(\boldsymbol{\rho}_j). \quad (4)$$

根据加法定理, 我们可以证明

$$H_n^j(\boldsymbol{\rho}_j) = \sum_{n'} G_{nn'}^{ij} J_{n'}^i(\boldsymbol{\rho}_i), \quad (5)$$

其中  $G_{nn'}^{ij} = G_{nn'}(\mathbf{R}_j - \mathbf{R}_i)$  代表 (从第  $i$  个散射体到第  $j$  个散射体) 的平移系数, 而  $\mathbf{R}_{(j)}$  则表示第  $(j)$  个散射体的位置.  $G_{nn'}(\mathbf{R})$  的精确定义请参见文献 [6]. 对于一个给定的散射体, 散射场由入射场和散射矩阵完全确定, 而散射矩阵则是根据边值问题而确定. 在展开系数  $A = \{a_n\}$  和  $B = \{b_n\}$  之间有如下关系:

$$b_n = \sum_{n'} T_{nn'} a_{n'}, \quad (6)$$

上式中  $T = \{T_{nn'}\}$  是单个散射体的 Mie 散射矩阵. 将方程 (2), (5) 和 (6) 带入到 (4) 式中, 我们得到

$$\sum_{j \neq i} (\delta_{ij} \delta_{nn'} - \sum_{n''} G_{nn''}^{ij} T_{n''n'}) a_{n''}^j = 0. \quad (7)$$

对于一个周期性的系统, 它的色散关系可以通过求解以下的久期方程而得到:

$$\det | T_{nn'}^{-1} - G_{nn'}(\mathbf{k}) | = 0, \quad (8)$$

其中  $G_{nn'}(\mathbf{k}) = \sum_{\mathbf{R} \neq 0} G_{nn'}(-\mathbf{R}) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R})$ .

## 4 长波长极限下的多重散射理论

在严格的多重散射理论基础之上取长波长极限的过程是冗长而繁琐的, 我们将在其他地方再详细介绍. 通过使  $\alpha_1 \rightarrow 0$  并且保留  $T^{-1} - G$  矩阵中最低阶的项, 描述色散关系的久期方程简化为一个  $3 \times 3$  的矩阵方程:

$$\det \begin{vmatrix} \frac{D_1 + D_2}{D_1 - D_2} + \frac{x^2 f}{1 - x^2} & \frac{ixf}{1 - x^2} & -\frac{f}{1 - x^2} \\ -\frac{ixf}{1 - x^2} & \frac{B_2}{B_2 - B_1} + \frac{x^2 f}{1 - x^2} & \frac{ixf}{1 - x^2} \\ -\frac{f}{1 - x^2} & -\frac{ixf}{1 - x^2} & \frac{D_1 + D_2}{D_1 - D_2} + \frac{x^2 f}{1 - x^2} \end{vmatrix} = 0, \quad (9)$$

其中  $x = V_{\text{eff}}/V_1$  就是我们要求的常数,  $V_1$  是基体中的波数, 而  $f$  则是圆柱体的填充率. 这里  $B_1 = \lambda_1$  和  $B_2 = \lambda_2 + (2/d)\mu_2$  分别是液体基体和固体圆柱体的弹性模量, 而  $\lambda$  和  $\mu$  是拉姆常数,  $d$  代表空间维度. 很容易证实方程 (9) 是关于  $x^2$  的一元二次方程, 在丢掉平庸解  $x^2 = 1$  之后, 我们得到以下的根:

$$x^2 = \frac{(D_2 + D_1) - (D_2 - D_1)f}{(D_2 + D_1) + (D_2 - D_1)f} \cdot \frac{B_2}{fB_1 + (1-f)B_2}. \quad (10)$$

根据关系式  $V_{\text{eff}} = \sqrt{B_{\text{eff}}/\rho}$ , 我们得到

$$\frac{1}{B_{\text{eff}}} = \frac{1-f}{B_1} + \frac{f}{B_2}, \quad (11)$$

以及 Berryman 动态质量密度表达式 (即 (1) 式), 注意其中的维度  $d = 2$ . 方程 (10) 对于正方形点阵和六角形点阵都是成立的, 就像我们所期待的那样: 它与散射体如何排列无关. 因而 Berryman 动态质量密度对于各向同性复合介质都是成立的. 同时, 我们的推导也验证了有效弹性模量公式, 即方程 (11) 的正确性. 其实, 这个有效弹性模量的表达式对于由固体嵌入体和流体基体组成的各向同性复合介质而言的确是成立的<sup>[7]</sup>.

既然方程 (10) 同时包含了有效弹性模量和动态质量密度的表达式, 也许有人会问怎么能够从一个方程, 即方程 (10), 中推导出两个独立的方程, 即方程 (11) 和方程 (1) 来? 在这一点上, 我们应该注意到有效弹性模量的表达式, 即方程 (11), 它曾经被平均  $T$  近似<sup>[1]</sup> 和相干势近似<sup>[7]</sup> 这两种方法分别推导出来, 现在又被长波长极限下的多重散射理论所证实, 代表了低频极限下  $m = 0$  的角动量散射通道, 而动态质量密度  $\rho$  则表示低频极限下  $m = 1$  的通道. 因此, 即使在更加一般的情况下, 方程 (1) 和方程 (11) 都是正确的, 因为它们同时代表了相互独立的、并行的散射通道.

## 5 与实验结果的比较: 证实了 $\rho \neq D_V$

F. Cervera 等人最近所作的实验<sup>[8]</sup> 测量了由

平行的无限长铝圆柱体以规则点阵排列在空气中所构成的二维声子晶体中的声波速度,证实了在低频率(长波长)区域,声波是以亚音速传播的.由于波长至少是晶格常数的9倍多,该实验显然是在长波长区域完成的,那么有效介质理论应该是成立的.在图1中,我们将实验结果与通常的有效介质理论(简称EMT)的预测进行了对比,注意此处有效介质理论用到的是体平均质量密度表达式和有效弹性模量方程(11).很显然,此时的计算结果与实验数据有巨大的差距.作为对照,用动态质量密度表达式和有效弹性模量方程(11)计算出来的结果以实心三角形记号标记于图1中.可以看到,与实验数据符合得非常好.需要注意的是,很容易证明体平均质量密度 $D_V$ 是动态质量密度 $\rho$ 的上限,即总有 $\rho < D_V$ .因此采用 $D_V$ 模型算出来的波速比实验测量值要小也就不足为奇了.

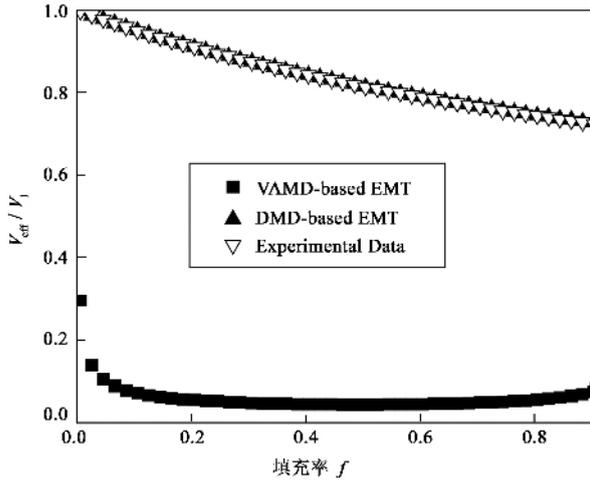


图1 采用了体平均质量密度模型的有效介质理论所计算出的声波速度(VAMD-based EMT),采用了动态质量密度模型的有效介质理论所计算出的声波速度(DMD-based EMT),以及实验测得的声波速度(Experimental Data).所测样品为金属铝圆柱体以六角形点阵排列在空气中所形成的二维声子晶体.横坐标 $f$ 是铝圆柱体的填充率,纵坐标中 $V_1$ 表示空气中的声速.这里声波的频率是600Hz,铝圆柱体的最大直径是3.175cm,六角形阵列的晶格常数是6.35cm.空气中的声波波长是57cm,远大于铝柱的直径和晶格常数.铝中的纵波波长是10.68m,横波波长是5.19m.很明显,采用了体平均质量密度模型的有效介质理论与实验结果有很大的差异<sup>[2]</sup>

静态和动态质量密度之间的差别的物理根源是什么?答案在于体平均质量密度的模型有一个隐含的假定:它假定在长波长极限下波场强度的分布是均匀的.事实上,这一假定即使在长波长极限下也不一定是正确的,尤其是当复合介质的各个成分之间

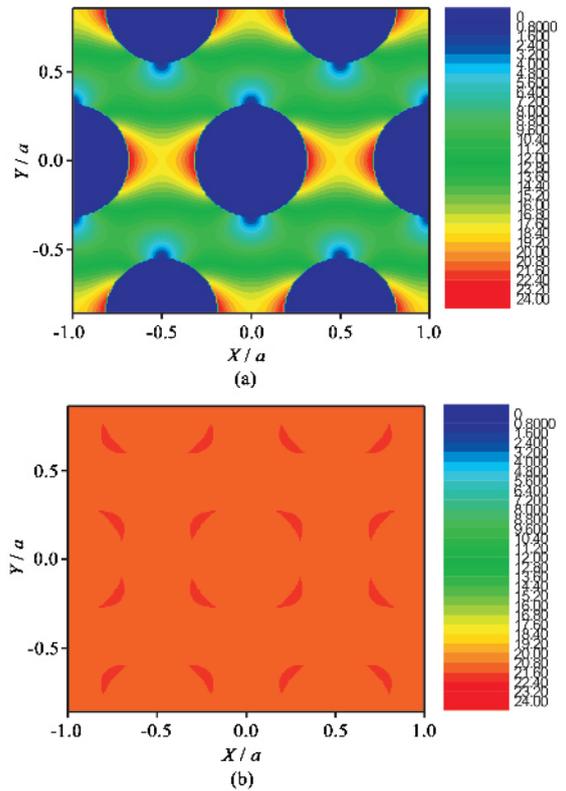


图2 (a)用多重散射方法计算得到的,铝圆柱体以0.36的填充率以六角形点阵排列于空气中所形成的声子晶体中的位移场强度.蓝色表示低强度,红色表示高强度.波沿 $y$ 方向, $a$ 是晶格常数.可以看到在铝柱体内,波场强度几乎为零.进一步降低频率也不会改变这一事实.(b)与(a)一样,只不过声子晶体换成了PMMA柱体以六角形排列在水中.此时的波场强度的分布要比(a)中的均匀得多<sup>[2]</sup>

的声学阻抗不匹配的时候,就像F. Cervera等人所测的实验样品一样<sup>[8]</sup>.在图2(a)中,我们画出了在实验条件下的波场强度分布.值得注意的是,在铝柱体的内部,波场强度几乎为零.因此,体平均质量密度的关于波场强度均匀分布的假定,在这里根本就是不可能实现的.而实验所观测到的声波波速会随着铝圆柱体填充率的增加而下降的现象,可以归咎于此时声波的传播路径的弯曲程度会随着填充率的增加而增加.也就是说,空气会在铝圆柱体之间来回流动,而不会影响到铝圆柱体的内部.然而,当两个成分的声学阻抗相差不是太大时,比如说质量密度差不多时,Berryman有效质量密度就会蜕变成体平均质量密度.PMMA圆柱体置于水基体中就属于这样的情况.为了方便与图2(a)相比较,我们在图2(b)中画出了PMMA—水声子晶体中的位移场强度,值得注意的是,图2(b)中波场强度的均匀分布特性表现得非常明显.由于我们的推导是在严格的

多重散射理论上取长波长极限而得到的,毫不奇怪,我们的公式从本质上就已经考虑到了波场的不均匀性,而这种不均匀性确实是现实世界中必定存在的。从以上的比较中我们得出结论,复合介质中各成分之间的相对运动,或者说在长波长极限下波场强度的不均匀性,是  $\rho$  和  $D_V$  这两种质量密度不相同的内在原因。

这样的物理解释同时也意味着,在有限大小的频率时,我们必须防止武断地采用  $\rho$  而不是  $D_V$ 。因为流体通常会有一定的粘滞性  $\eta$ ,而且流体的剪切模量会有一个跟  $\omega\eta$  成正比的虚部。对于一种足够粘滞的流体而言,流体和固体之间的相对运动变得不太可能,从而就有  $\rho \approx D_V$ 。事实上,当基体材料有非零的剪切模量时,对多重散射理论取长波长极限会产生  $\rho = D_V$ 。

值得注意的是,我们的观点与半个多世纪之前提出的 Biot 慢波<sup>[9]</sup>之间有某种相似性。Biot 慢波存在于多孔的固态介质之中,在低频区域,孔洞中的流体相对固态基体有相对的运动。Biot 慢波之后为实验所证实<sup>[10]</sup>,由此我们可以推定:由于分量之间的相对运动而导致的  $\rho$  和  $D_V$  之间的差距,不仅是可能的,而且是完全合理的。

## 6 动态质量密度有可能是负的吗?

在麦克斯韦方程组中有两个物质参数,介电常数  $\varepsilon$  和磁导率  $\mu$ 。折射率定义为  $n = \sqrt{\varepsilon\mu}$ 。几十年前 Veselago 指出<sup>[11]</sup>,如果  $\varepsilon$  和  $\mu$  同时是负的,那么折射率  $n$  必定也是负的,这是考虑到在复平面上取平方根时  $\varepsilon$  和  $\mu$  必须有正的虚部。最近,通过在同一频率范围内同时实现电场和磁场的共振, $\varepsilon$  和  $\mu$  同时变成负值(由于共振响应函数  $1/(\omega_0^2 - \omega^2)$  当  $\omega > \omega_0$  时是负的),负折射率  $n$  不仅在实验上得到了实现<sup>[12]</sup>,而且在理论也已经被数值模拟出来。既然电磁波和弹性波是两种最常见的经典波,一个有趣的问题就是,是否存在与电磁波超常介质(即折射率  $n$  为负的介质)相对应的声波超常介质?在弹性波中对应于  $\varepsilon$  和  $\mu$  的物理量是动态质量密度和体弹性模量(对于纵弹性波)。由于体平均质量密度  $D_V$  不可能是负的,如果动态质量密度  $\rho = D_V$ ,那么在两种经典波超常介质之间永远都不存在一一对应的关系。在下文中我们显示,一种不同于体平均质量密度的动态质量密度的存在,是使得两类超常介质之间

有一一对应关系的关键。

如果在角动量  $m = 1$  通道存在着共振,方程(1)则可以推广为

$$\frac{\rho - D_1}{\rho + D_1} = \frac{4f}{i\pi(\alpha_1 R)^2} S_1, \quad (12)$$

其中  $S_1 = T_{11} = -$

$\frac{F_1 \times [J_1(\alpha_1 R) - \alpha_1 R J_2(\alpha_1 R)]}{F_2 \times [H_1(\alpha_1 R) - \alpha_1 R H_2(\alpha_1 R)]} - \frac{F_2 \times [4J_2(\alpha_2 R) - \alpha_1 R J_3(\alpha_1 R)]}{F_1 \times [4H_2(\alpha_2 R) - \alpha_1 R H_3(\alpha_1 R)]}$   
就是半径为  $R$  的单个圆柱体的角动量  $m = 1$  通道的 Mie 散射系数,而  $F_1$  和  $F_2$  则是参数  $R, \alpha_1, \alpha_2$  和  $\beta_2$  的函数,其中  $\alpha_1, \alpha_2$  和  $\beta_2$  分别是液体基体中的纵波波数,固体圆柱体中的纵波和横波波数。从方程(12)中很容易看出,只要条件  $|S_1| > \frac{\pi(\alpha_1/R)^2}{4f}$

得到满足,动态质量密度就会变成负的。事实上,只要在  $m = 1$  通道存在着共振,复散射振幅  $S_1$  的模就会变得非常大,于是动态质量密度  $\rho$  就会变成是负的了。这一现象在文献[13]首先被指出来,然而在该文献中并没有讨论到动态质量密度的问题。下文中我们展示,一种新近发明的名为局域共振声学材料(简称 LRSM)的新材料,确实能够实现负的动态质量密度。

## 7 局域共振声学材料和负的动态质量密度

在一篇稍早的文献[3]中提到,存在着一类三分量的弹性复合介质(不一定是周期性的),其中的一个结构单元如图3所示,它会在某些频率范围内展现负响应函数(即负的弹性模量或负的质量密度)。这种行为是可以理解的,因为每个单元是由一个相对较重的核心包裹上一层非常软的材料,比如硅胶,然后再将包裹后的颗粒镶嵌于一种相对较硬的基体材料之中而构成的。对于这样的微结构,低频的局域共振是非常可能的:其中较重的核心颗粒充当振子的质量,而较软的包裹层则充当振子的弹簧。局域共振这个名称是为了将它区别于全局性的结构共振,后者在任何弹性结构中都会存在。在局域共振频率附近,振子的响应会变成是负的(因为共振响应函数是  $1/(\omega_0^2 - \omega^2)$ )。如果这种带包裹层的颗粒的填充率足够高,那么整个样品的响应就由单个振子的响应所决定。这种行为的一个直接的结果就是在负响应频率附近波以指数形式衰减,因为波可以写成  $\exp(inkx)$  的形式,其中  $k$  是波数,  $x$  是沿波的

传播方向的空间坐标. 既然  $n$  正比于响应函数的平方根, 一个负响应则意味着  $n$  是纯虚数, 于是导致指数衰减 (指数增长是不可能的因为这会违反能量守恒). 这样的现象已经为实验所证实<sup>[3]</sup>, 从而打破了低频声波传播的质量定律. 所谓质量定律是指声波的衰减只与样品的厚度、频率和密度的乘积成反比, 然而对于局域共振声学材料, 波的衰减却是样品厚度的指数函数(在共振频率附近). 局域共振声学材料从而能够在更薄的样品上使低频声波更加有效的衰减, 甚至都不需要这些共振微结构作周期性的排列.

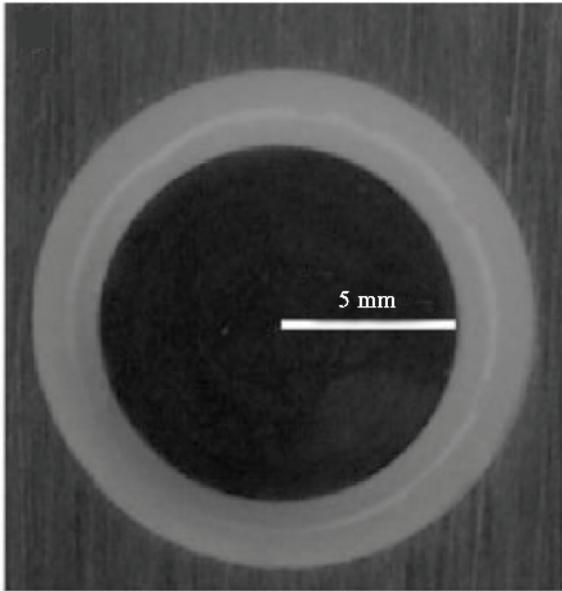


图3 局域共振声学材料中的一个结构单元. 这里核心层是一个铅球, 包裹上一层硅胶. 作为一个振子, 核心层充当振子的质量而包裹层则充当振子的弹簧. 许多这样的共振单元置于一种比核心层要稍微轻一些的基体材料中, 就会在共振频率附近实现负的动态质量密度. 对于如图所示的结构单元, 共振频率大约是400Hz左右

随后, 文献[14]提出了一个解析的模型, 该模型显示, 局域共振声学材料的负响应函数来自于负的动态质量密度. 确实如此, 因为局域共振本质上起源于  $m=1$  的角动量通道, 最明显的事实是(在低频共振区域)核心颗粒的位移场分布是各向异性的且具有  $m=1$  的对称性. 在把基体当做刚体处理后, 这个解析的模型得到了整个体系的动态质量密度的表达式, 它是核心层和包裹层的波速、填充率、以及核心层、包裹层和基体的质量密度的函数. 其实, 即使在缺乏严格的数学证明的情况下, 从直觉上来说, 只要带有包裹层的共振颗粒足够重, 并且核心层的密度比基体的密度要高, 那么在负响应的频率区域, 整

个样品的平均质量将会相对于基体中传播的波而言反相地运动, 从而导致负的动态质量密度. 这里核心颗粒与基体反相地运动意味着各个成分之间有相对的运动, 这一现象我们前面在分析  $\rho \neq D_V$  的原因时已经指出来了. 只不过在这里, 共振所隐含的相对运动会导致负的  $\rho$ . 然而, 我们必须小心谨慎, 不能直接地把前面推导的长波长极限下的公式拿过来用于局域共振声学材料, 原因在于长波长极限意味着  $\lambda \gg$  特征尺度这一关系式在样品的任何地方都成立, 但是在局域共振声学材料里, 在软的包裹层(比如硅胶)中波长是可以和特征尺度相比拟的. 因此为了证实我们的预测, 精确的数值计算是必不可少的. 这个工作已经在文献[3]中完成了, 其结果与实验符合得非常好.

## 8 声学超常介质

到此为止我们的讨论已经毫无争议地显示: (1) 动态质量密度和静态质量密度有显著的不同; (2) 局域共振声学材料能够实现负的动态质量密度. 最近, 借助于亥姆霍兹共振器, 伯克利的一个科研小组在  $m=0$  通道上实现了负的体弹性模量<sup>[15]</sup>. 因而通过将负的质量密度和负的弹性模量这两者合而为一来实现声学超常介质是非常可能的.

### 参 考 文 献

- [ 1 ] Berryman J G. J. Acoust. Soc. Am. ,1980 , 68 :1809 ; J. Acoust. Soc. Am. ,1980 68 :1820
- [ 2 ] Mei J , Liu Z , Wen W *et al.* Phys. Rev. Lett. ,2006 ,96 : 024301
- [ 3 ] Liu Z , Zhang X , Mao Y *et al.* Science 2000 289 :1734
- [ 4 ] Psarobas I E , Stefanou N , Modinos A. Phys. Rev. B 2000 , 62 :278 ; Psarobas I E , Stefanou N , Modinos A. Phys. Rev. B 2000 62 :5536
- [ 5 ] Liu Z , Chan C T , Sheng P *et al.* Phys. Rev. B 2000 62 :2446
- [ 6 ] Mei J , Liu Z , Shi J *et al.* Phys. Rev. B 2003 67 :245107
- [ 7 ] Sheng P. Introduction to Wave Scattering , Localization and Mesoscopic Phenomena( 2nd Edit ). Berlin , Springer - Verlag , 2006 , Chap. 4
- [ 8 ] Cervera F *et al.* Phys. Rev. Lett. 2002 , 88 :023902
- [ 9 ] Biot M A. J. Acoust. Soc. Am. ,1956 ,28 :168 ; J. Acoust. Soc. Am. ,1956 28 :179
- [ 10 ] Plona T J. Appl. Phys. Lett. ,1980 , 36 :259
- [ 11 ] Vesalago V G. Soviet Physics Uspekhi ,1968 ,10 :509
- [ 12 ] Smith D R , Padilla W J , Vier D C *et al.* Phys. Rev. Lett. , 2000 84 :4184 ; Shelby R , Smith D R , Schultz S. Science , 2001 , 292 :77
- [ 13 ] Li J , Chan C T. Phys. Rev. E 2004 70 :055602
- [ 14 ] Liu Z , Chan C T , Sheng P. Phys. Rev. B 2005 71 :014103
- [ 15 ] Fang N , Xi D , Xu J *et al.* Nature Materials 2006 5 :452