

“图解”数学物理方法的教学实践*

彭 芳 麟[†]

(北京师范大学物理系 北京 100875)

摘 要 《数学物理方法》虽然是数学课,但是它是介绍在物理中应用的数学.物理课程多媒体教学的经验启发我们,合理地选择《数学物理方法》课程中有物理背景的内容,恰当地使用可视化以展现数学公式的物理图像,就能提高教学效果.对一些随时间演变的方程,还可以用动画来表现.我们用两种方法实现可视化,一是用解析解作图,另一个是通过数值求解方程,再将数值计算结果作图.本文介绍我们在《数学物理方法》课开展可视化教学的实践.

关键词 数学物理方法 多媒体教学 数学软件 MATLAB

Multimedia applying in course of methods of mathematical physics

PENG Fang-Lin[†]

(Department of Physics, Beijing Normal University, Beijing 100875, China)

Abstract “Methods of mathematical physics” is a course which introduces the mathematics applied in physics. The experience from multimedia instruction in physics suggests that by appropriately selecting the content related to physics and the visualization that exhibits the physical picture of the mathematical formulae (including the use of movie to demonstrate time dependent processes), the effectiveness of the instruction may be improved. In our course, we have adopted two methods of visualization: one is to plot directly the analytical solution, the other is to first solve the equations numerically and then plot the resulting numerical solutions. Our practice and experience are presented in this article.

Keywords methods of mathematical physics, multimedia instruction, software MATLAB

1 前言

“图解”的方法,较早见于上海科学技术出版社1988年翻译出版《图解量子力学》.原书名为 *The Picture Book of Quantum Mechanics*,由 Springer-Verlag 出版,上海科学技术出版社翻译的是第一版,现在该书已经发行了第三版.类似的还有 Springer-Verlag 出版的 *Visual Quantum Mechanics*.这些书的特点是通过将理论物理与数值计算相结合实现可视化来讲解物理知识.这种做法在一些名教材也有反映,如 J. D. Jackson 的 *Classical Electrodynamics* 的第

三版就增加了数值计算的内容,其目的不仅是介绍一种新的解题方法,也是为了实现可视化.

国外对物理的可视化教学十分重视,早在1995-1996年间 Wiley 出版社出版了9本有关物理多媒体教学的丛书,是由大学高等物理软件联盟(The Consortium for Upper-Level Physics Software, CUPS)编写该丛书及其所用的教学软件,CUPS是由美国、澳大利亚、加拿大和英国的27位资深的物理学家与教授所组成.这项工作得到了美国国家科学基金、

* 2005年国家精品课程和北京市精品课程《计算物理基础》支持项目
2005-02-22收到初稿 2005-12-13修回

[†] Email: pengfl@bnu.edu.cn

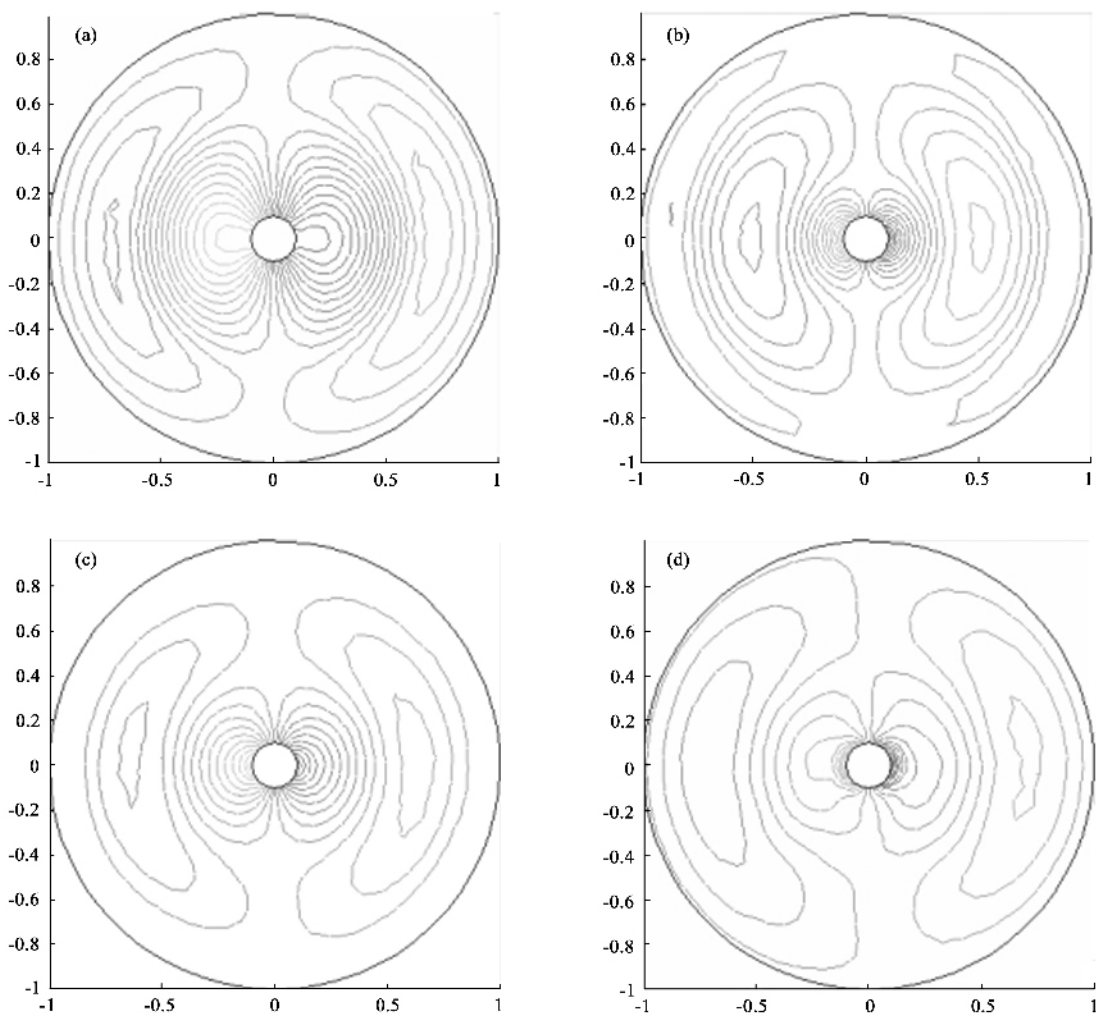


图1 振动的长圆柱面在空间形成的声场 (a)(b)(c)(d)是按时间先后排列

IBM 公司、苹果公司以及美国乔治·梅森大学的资助。丛书内容包括(1)Astrophysics,(2)Classical Mechanics,(3)Electricity & Magnetism,(4)Modern Physics,(5)Nuclear and Particle Physics,(6)Quantum Mechanics,(7)Solid State,(8)Thermal and Statistical,(9)Waves and Optics。由于编写时间较早,这些软件是在 DOS 环境下用 PASCAL 编写的。除此之外,许多国外大学的网页上也有可视化教学的内容。

理论物理数字化教学也强烈地吸引我们,我们在“数学物理方法”课程中进行了可视化教学的初步尝试。虽然“数学物理方法”不是物理课而是数学课,但课程主要讲解数学在物理中的应用,所以它兼有数学课与物理课的特点。作为数学课,其内容比较抽象,公式繁多,教学以数学推导为主,然而,作为数学在物理中的应用,它的内容又与物理紧密结合甚至有实验事实的背景。在教学中必须兼顾这两方面,

才能真正教好这门课。可是受课时限制,目前在教学上主要以数学推导为主而较少讲解物理图像,再加上课程使用的数学工具又是学生第一次接触的偏微分方程,所以有学生觉得难学也就不足为奇了。如果参照物理课程多媒体教学的经验,合理地选择“数学物理方法”课程中一些有物理背景的内容,恰当地使用可视化教学的手段以补充物理图像的讲解,就有可能提高教学效果^[1]。本文介绍我们在这方面进行的探索,期望抛砖引玉。

2 “图解”法在教学中的效果

在教学中,“图解”法加强了对物理图像的讲解,有助于提高教学效率,激发学生的学习兴趣。

2.1 图解了数学公式 展示了数学公式中的物理图像

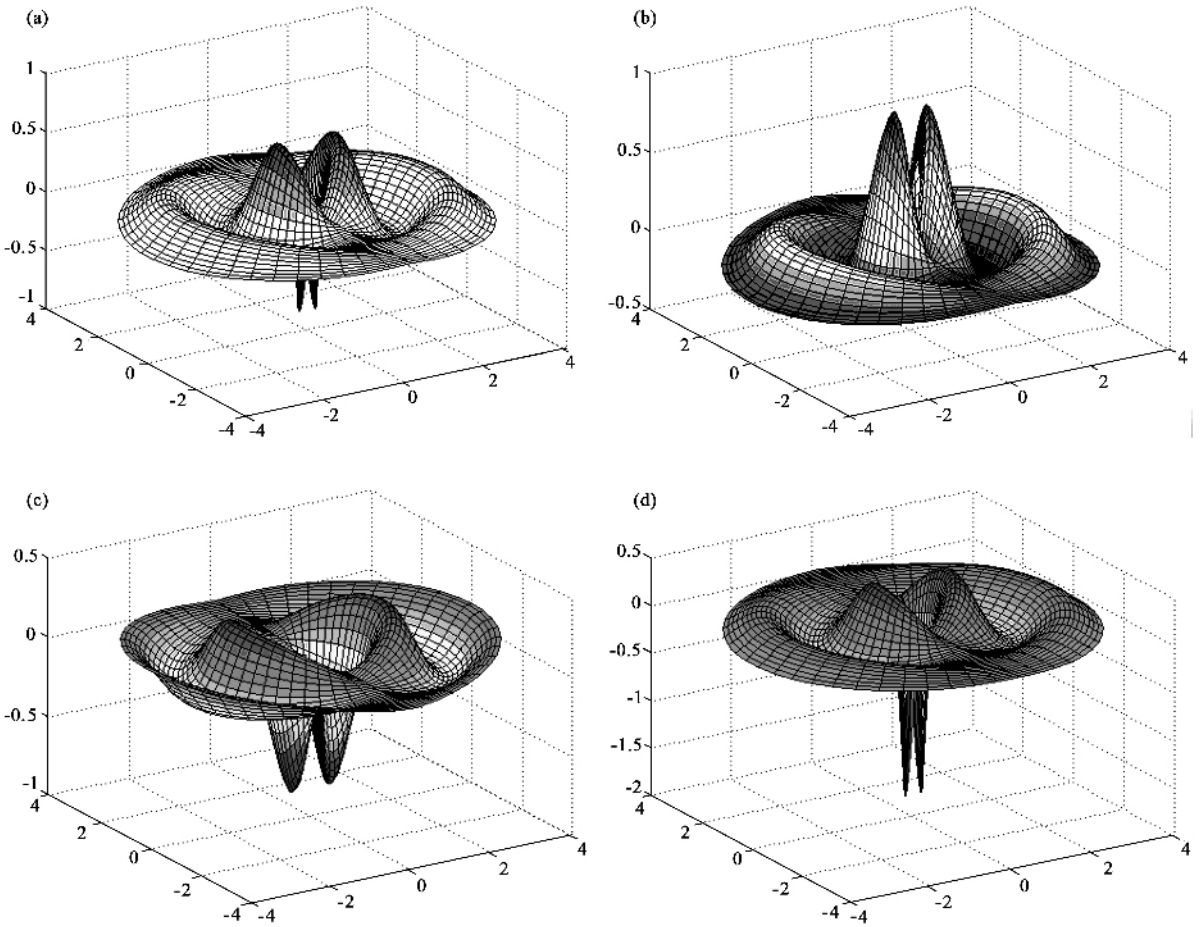


图2 偶极声场 (a)(b)(c)(d)是按时间先后排列

“图解”其实就是我们常说的可视化.在数学物理方法课程中实现可视化基本上有两条途径,一是直接利用解析解作图,另一个是通过数值求解方程,再将数值计算结果作图.其中涉及最多的是解偏微分方程和计算特殊函数的值.另外,为了可视化,往往要作出空间物理场有时是矢量场的图像,在有对称性的情况下,可以降低维数,如将三维空间图形画成二维图形.对于含时的偏微分方程,使用动画能更好地表现随时间演化的过程.根据我们的经验,恰当地运用数学软件不失为一种好的选择,如计算软件MATLAB就可以用来解决这些问题^[2].

举一个振动声场的例子,半径为 ρ_0 的长圆柱面,其径向速度分布为 $v_0 \cos\varphi \cos\omega t$,求振动在空间形成的声场.由数学物理方程的解法知^[3],它在空中辐射的声场的速度势为

$$u = -i \frac{\pi v_0 \omega \rho_0^2}{2a} H_0^{(1)} \left(\frac{\omega}{a} \rho \right) \cos\varphi e^{i\omega t}.$$

这个结果里用到了汉克尔函数 $H_0^{(1)}$,这是一个特殊

函数,公式所包含的物理图像是难以从表达式中看出来的,画出 u 的等值线随时间变化的动画就能表现声波向外传播的过程,图1就是其中的几个画面.

再以偶极声场为例,半径为 r_0 的球面,径向速度分布为 $v_0 \cos\varphi \cos\omega t$,则它在空间的声场的速度势为^[3]

$$u = \frac{v_0 r_0^3}{2} \left(-\frac{1}{r^2} + i \frac{\omega}{ar} \right) p_1(\cos\theta) e^{i\frac{\omega}{a}(r-at)}.$$

这里用到了勒让德多项式,这也是特殊函数.图2是动画中几个画面,声场的偶极特性十分突出.这里是用表面图表示,也可以用等值线图来表现.

2.2 对不同解法或不同问题进行对比

可视化展示了结果的物理图像,所以同一个问题的不同解法所得的结果是否相同,可以用可视化所表现的物理图像是否相同来检验;另一方面,如果不同问题的解经过可视化所表现的物理图像有相似之处,我们也可以思考一下其中的原因何在.

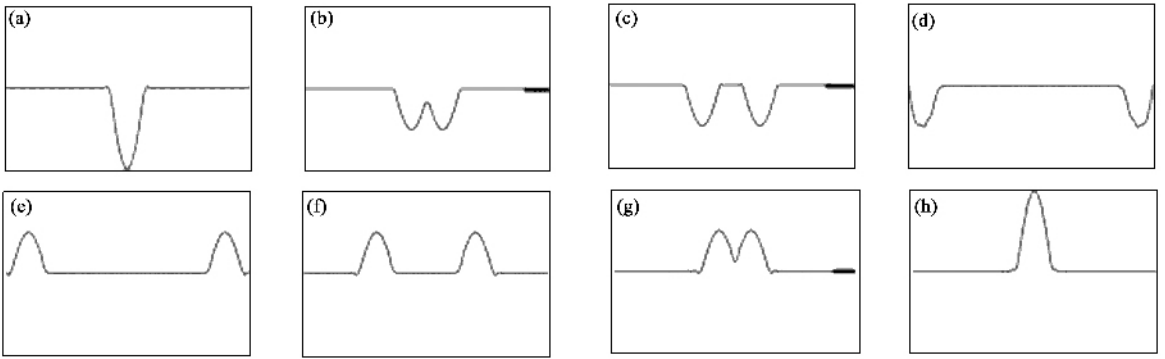


图3 初位移不为零而初速为零的有界弦的振动,画面按时间顺序排列

例如我们来对比一下无界弦和有界弦的振动,这是边界条件不同的两个问题. 给定初位移与初速度的无界弦的行波解是达朗贝尔公式,它是一个积分形式的解. 而给定初位移与初速度的有界弦的振动可以用级数解来表示. 那么当两个问题的初位移与初速度相同时,这两个解会有什么联系呢? 实际上,无界问题是有界问题在特殊情况下的一种近似,当边界的影响没有到达所研究的区域时,有界弦可以当成无界弦来研究. 换言之,在边界影响的作用还没有到达时,级数解和积分形式的达朗贝尔公式会有相同的图像. 图3就是两端固定的有界弦问题中用分离变量法求得的级数解画出的动画,所对应的初始条件是初位移不为零初速度为零,这里用的是在级数项中取50项所得的结果. 可以看到,开始时位于弦中央的初始位移分成两半,向两端运动,到达边界以后,发生有半波损失的反射,然后又向中央运动. 其中前4幅图是边界影响还没有产生作用的情形,按照上面的分析,在相同的初始条件下,由达朗贝尔公式画出无界弦的运动图像应该与前4幅图像一样,事实正是如此,如果用达朗贝尔公式画图,也会得到这个结果.

计算环形电流的磁场也是一个有趣的例子. 该题可以用三种不同方法计算,所得结果分别是用连带勒让德函数的级数表示,用椭圆函数的积分表示或者直接用数值积分表示,那么这些数学形式不同的结果是一致的吗? 它跟实验的结果相同吗? 下面来看看用可视化表现的物理图像^[4].

环形电流在空间 $r(r, \theta, \varphi)$ 形成矢势 A 和磁感应强度 B 分别为

$$A = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_l \frac{dl'}{|r - r'|},$$

$$B = \nabla \times A,$$

其中 $r'(r', \theta', \varphi')$ 是圆环 l 上的变点 ($r' = a, \theta' =$

$\pi/2$) Idl' 是圆环上的电流弧元,由此计算出的结果用勒让德函数表示是

$$B_r = -\frac{\mu_0 I}{2r} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^{2l+1} P_{2l+1}^1(0) P_{2l+1}(\cos\theta) \quad (r < a),$$

$$B_r = -\frac{\mu_0 I}{2r} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^{2l+2} P_{2l+1}^1(0) P_{2l+1}(\cos\theta) \quad (r > a),$$

$$B_\theta = -\frac{\mu_0 I}{2r} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{2l+1} \left(\frac{r}{a}\right)^{2l+1} P_{2l+1}^1(0) P_{2l+1}^1(\cos\theta) \quad (r < a),$$

$$B_\theta = \frac{\mu_0 I}{2r} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{2l+2} \left(\frac{a}{r}\right)^{2l+2} P_{2l+1}^1(0) P_{2l+1}^1(\cos\theta) \quad (r > a),$$

$$B_\varphi = 0.$$

图4是根据上式画出的图形.

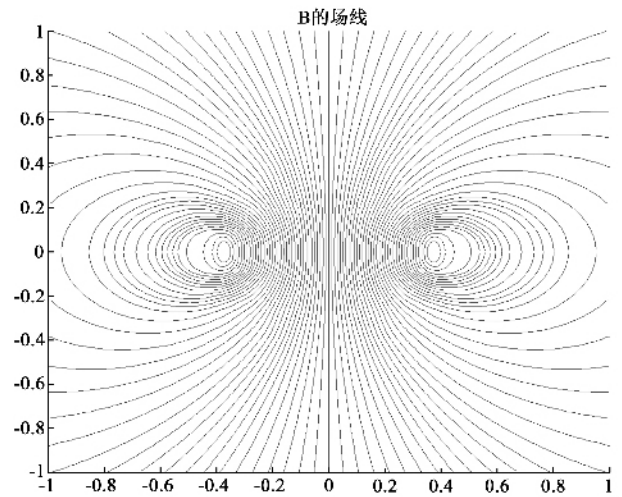


图4 勒让德函数表示的环形电流的磁场

用毕奥-萨伐尔定律计算磁感应强度可得到下面用椭圆函数表示的积分式,

$$B_x = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{2\cos\theta}{\sin\theta \sqrt{a^2 + r^2 + 2arsin\theta}} \left[\frac{a^2 + r^2}{a^2 + r^2 - 2arsin\theta} E - K \right],$$

$$B_y = 0,$$

$$B_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{2}{\sqrt{a^2 + r^2 + 2arsin\theta}} \left[\frac{a^2 - r^2}{a^2 + r^2 - 2arsin\theta} E + K \right],$$

式中有

$$E = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 x} dx = \frac{\pi}{2}$$

$$\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 - \left(\frac{1}{2} \frac{3}{4}\right)^2 \frac{k^4}{3} - \left(\frac{1}{2} \frac{3}{4} \frac{5}{6}\right)^2 \frac{k^6}{5} - \dots \right],$$

$$K = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 x}} = \frac{\pi}{2}$$

$$\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 - \left(\frac{1}{2} \frac{3}{4}\right)^2 k^4 + \left(\frac{1}{2} \frac{3}{4} \frac{5}{6}\right)^2 k^6 - \dots \right],$$

$$k^2 = \frac{4arsin\theta}{a^2 + r^2 + 2arsin\theta}.$$

由上式画成的图形如图 5 所示.

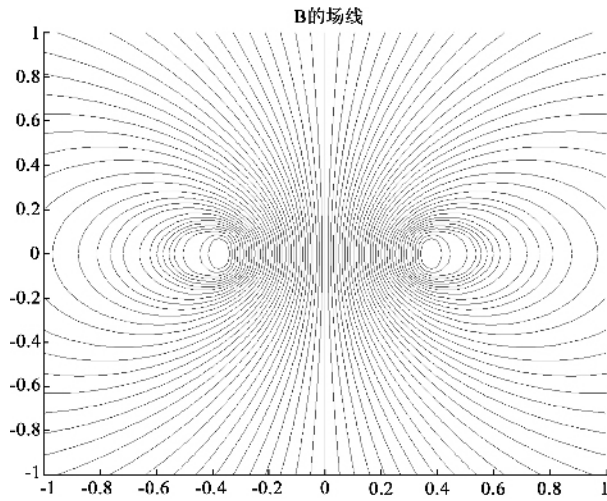


图 5 由椭圆函数表示的环形电流的磁场

由毕奥 - 萨伐尔定律直接作数值积分可得到磁感应强度的各个分量, 然后画成图形如图 6 所示, 其中图 6(a) 是二维的, 图 6(b) 是三维的.

可见, 三种不同的计算虽然数学表示形式不同, 可视化的效果表明, 它们所代表的物理图像是相同的.

2.3 深化、充实了教学内容, 扩充了教材中知识范围, 改变了旧教材的一些教学方式.

可视化并不是简单的再现教材中的内容, 它必然会深化教学内容, 扩充学生的知识面. 例如计算特殊函数现在可以用数学软件 MATLAB, 自然就会要求学生去掌握这种方法而不会再去使用过去的教材中介绍的查表法和近似公式法.

再以勒让德函数的学习为例, 教材中提供的勒让德函数图形都是以 $x (= \cos \theta)$ 为变量的图形, 这

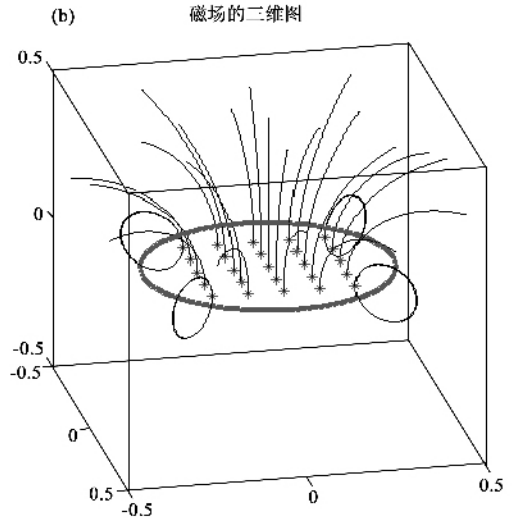
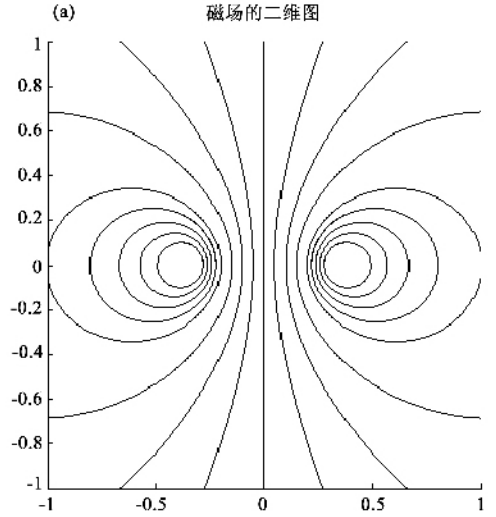


图 6 由毕奥 - 萨伐尔定律作数值积分所得的环形电流的磁场

对解释勒让德函数的对称性, 奇偶性, 边界值以及本征值很方便. 而在实际运用中, 勒让德函数是以 θ 为变量, 也就是应该以用极坐标变量画图, 才能表现勒让德函数的极性分布. 补充这个图像, 能让学生理解多极子场等的极性分布现象, 如前面所介绍的偶极声场的极性就是由勒让德函数描述的. 虽然这只是一个小小的变化, 教学效果却有不同. 教材受篇幅所限, 不能过多的介绍类似的内容, 这给可视化的教学留下了用武之地.

还有级数解虽然是教材用得最多的方法, 可是在有无穷项的级数解中究竟取多少项在应用中就会有较好的近似, 学生并没有一个感性的认识. 在泰勒展开中通常取 3—5 项就有较好的精度, 在级数解中是否也有同样的结论呢? 通过对比对有界弦振动的级数解和达朗贝尔行波解的图形, 可以看见, 当级数解取到 10 项时, 所得图像与行波解仍有明显差别,

要取到 50 项才会较好的相似. 在其他问题中, 级数解也往往要到数十项才能有较好的结果. 这些经验当然会加深对级数解的理解. 此外还有一些问题如固定边界上的半波损失, 用数值解法所得的有振动源的振动, 有质量的弦的振动, 有阻尼的弦的振动等, 在可视化的教学中都是生动有趣的.

2.4 对知识重新归纳分类, 形成以问题分类的体系, 有利于学生复习与巩固所学的知识.

我们的可视化教学只是选择了课程中一部分有物理背景的内容来进行, 不可能将全部教学内容可视化. 在将这些内容上载到课程网页上供学生使用时, 就需要合理地组织它们, 这样形成的体系结构与教科书体系也会有差别. 例如《图解量子力学》的体系就与量子力学教科书的体系不同. 我们采用的做法是按照问题分类. 例如弦振动的解法有行波法, 积分变换法, 级数解法, 教材是按解题方法分类的, 所以在教科书中这三种解法是放在三个不同的章节中讲解. 而在可视化教学的网页上, 我们侧重介绍数值解法或者将解析结果可视化, 解析的结果是直接引用教材的结论, 并不去讨论如何得到解析解, 所以可以按问题分类. 弦振动作为一类问题, 可以将三种解法的可视化放在一起完成, 同时还可以进行对比. 这样就形成与教材不同的另一个体系, 它可以帮助学生巩固记忆教材的知识.

3 总结

可视化教学在物理教学中已经广泛使用. 我们在数学物理方法课程中开展了可视化教学的教改实践, 可视化教学可以将数学推理所得的公式与物理图像的描述结合起来, 充分体现这门课程的特点即“数学在物理中的应用”, 克服以往教学中存在的只重数学推导, 忽略讲解物理图像的弱点, 提高了教学效果. 在数学物理方法课程中可视化的方法主要是直接利用解析解作图, 或者通过数值求解方程, 再将数值计算结果作图. 对于含时的偏微分方程, 则使用动画来表现随时间演化的过程. 我们对教材中具有明显物理意义的各种题型都进行了可视化的尝试, 并制作了教学网页供学生使用.

参 考 文 献

- [1] 翁羽翔. 物理. 2005, 34(4) 254 [Weng Y X. Wuli(Physics), 2005, 34(4) 254 (in Chinese)]
- [2] 徐慧梁. 物理. 2005, 34(4) 298 [Xu H L. Wuli(Physics), 2005, 34(4) 298 (in Chinese)]
- [3] 梁昆森. 数学物理方法, 第三版, 北京: 高等教育出版社, 1998 [Liang K M. Methods of Mathematical Physics, Beijing, Higher Education Press, 1998 (in Chinese)]
- [4] 彭芳麟. 数学物理方程的 MATLAB 解法与可视化. 北京: 清华大学出版社, 2004 [Peng F L. Solution and Picture of Mathematical Physics Equations Using MATLAB. Beijing: Tsinghua University Press, 2004 (in Chinese)]



· 物理新闻和动态 ·

蛋白质在弯曲空间内的折叠

蛋白质是一种由氨基酸所组成的特殊高聚物. 一般的高聚物在很低的温度下, 都会坍塌成一个球形, 但蛋白质却不然, 它们一般会折叠成一种特定的紧密形状. 如果蛋白质不能折叠成该种形状的结构, 它将不能完成其指定的功能, 同时也会带来疾病. 例如某些未曾折叠的蛋白质可以凝聚成一根面条状的长链, 这种结构现在已被证明是对应于神经退化的疾病, 如 Alzheimer 症.

寻找蛋白质折叠的精确动力学模式就像牛顿当年寻找万有引力定律一样, 目前科学界还没有找到有效地解决这个问题的途径. 现在意大利 Firenze 大学的 L. Casetti 和 L. Mazzoni 两位教授企图利用“能量地形图”的方法来开辟这个方面的研究, 也就是通过蛋白质能量在发生能量交流时的状态变化来了解折叠过程的物理背景. 他们方法的第一步是构建一个蛋白质所有可能存在的构形的相空间, 相空间中的每一个点代表蛋白质的一种构形, 同时该点也能反映出蛋白质处于该点时的能量数值. 这样的—个弯曲空间就是—个“能量地形图”, 而蛋白质的构形变化在“能量地形图”中的轨迹, 也类似于—个球在—个碗的内壁滚动. 相空间内可分隔成许多的小区, 一般在两种情况下, 蛋白质可以从—个分隔小区移动到与它相邻的另—个分隔小区, —种是蛋白质从外部(通过加热或化学反应)获得了足够多的能量, 另—种是两个分隔小区之间的能量势垒非常低, 使它可以自由跳动.“能量地形图”实质上是利用几何方法来表征蛋白质折叠力在—个弯曲空间内的作用过程. 这个想法来源于爱因斯坦在弯曲空间内定量研究行星和恒星间的万有引力的物理图像. 在这个研究工作中, L. Casetti 和 L. Mazzoni 两位教授希望能找出为什么蛋白质可以在弯曲的“能量地形图”中发生折叠, 而其他的高聚物却不能发生折叠的原因

(云中客 摘自 Physical Review Letters, 24 November, 2006)