

小波变换及其应用

周宇峰^{1,†} 程景全^{2,††}

(1 美国华盛顿大学 WA 98105 美国)

(2 美国国立射电天文台 VA 22903 美国)

摘要 傅里叶变换是信号分析的最基本工具和方法之一,但其本身仍然存在较大的缺陷,例如不能提供信号在时域上的特征.短时傅里叶变换虽然可以在一定程度上弥补该缺陷,但是它的频率分辨率和时间分辨率都十分有限,只是一种折衷的解决办法.小波变换是一种快速发展和比较流行的信号分析方法,它精确地揭示了信号在时间和频率方面的分布特点,可以同时分析信号在时域和频域中的特征,并可用多种分辨率来分析信号,实现信号的有损和无损传送.文章简要地回顾了小波变换的发展历史,介绍了小波变换的基本思想、主要概念、计算方法和计算流程.最后以四个典型的实例,展示了小波变换在现代工程中的应用和它独特的优势.

关键词 小波变换,傅里叶变换,尺度,位移,小波簇,滤波器

Wavelet transformation and its applications

ZHOU Yu-Feng^{1,†} CHENG Jing-Quan^{2,††}

(1 University of Washington, Seattle, WA 98105, USA)

(2 National Radio Astronomy Observatory, Charlottesville, VA 22903, USA)

Abstract Although Fourier transformation is one of the basic tools and methods in signal analysis it also has intrinsic drawbacks, such as its inability to provide the temporal or spatial characteristics of a signal. Short-time Fourier transformation has certain improvements, but users can only obtain the time- and frequency-based aspects of a signal with limited precision. Wavelet transformation is a fast-developing and popular signal analysis method. Wavelet analysis allows the use of long time intervals for more precise low-frequency information, and short regions for high-frequency information. In this paper the development of wavelet transforms is reviewed, and the fundamental principles, concepts, calculation formulas and flowcharts are introduced. Four examples are included to illustrate the application of this method in modern engineering and its unique advantages in comparison to other techniques.

Keywords wavelet transform, Fourier transform, scale, shift, wavelet, filter

1 小波变换的发展

傅里叶变换可以将任何函数展开为有限的或无限的正弦和余弦函数的和式.利用傅里叶变换的方法,能够很好地揭示函数在频率域的特点,并且具有很高的频率分辨率.但是经过这种变换,函数在时间域的信息常常被掩盖了.也就是说,通过傅里叶变换,我们可以清楚地了解函数中包含的所有频率信息,却不能了解每个频率分量在函数中的时间上或

者空间上的位置^[1].

考虑如图 1 所示的由三个持续时间相同、频率和出现的次序不同的正弦波所组成的两组信号,如果这两组信号进行傅里叶变换,则可以发现它们的频谱的分布和幅度是完全一致的.虽然我们可以分

2007-09-19 收到初稿 2007-10-31 收到修改稿

† 通讯联系人. Email: yufengz@medicine.washington.edu

†† The National Radio Astronomy Observatory is a facility of the National Science Foundation operated under cooperative agreement by Associated Universities, Inc

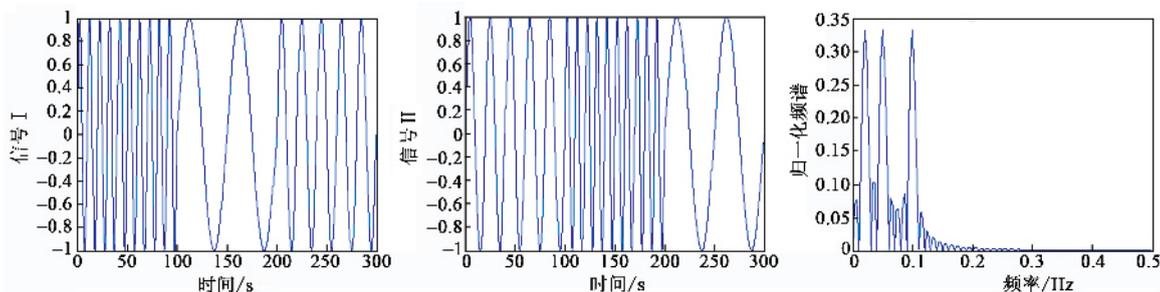


图1 两组具有不同时序的信号(左和中)和它们所对应的相同的频率谱(右)

辨出信号中的3个基本频率分别为0.025、0.05和0.1 Hz,但是从傅里叶变换的振幅频谱中却无法分辨这三个正弦波所发生的先后次序.如果要了解这三个正弦波的次序,就必须找出它们的相位谱,但通常相位频率谱的分析是比较困难的.

为了能够同时表示函数在时空域和频率域的特性,1946年Gabor^[2]改进了傅里叶变换,引进了视窗(window)的概念,发展出短时傅里叶变换(short-time Fourier-transform).短时或者视窗傅里叶变换又称为Gabor变换,简单地说就是将一个长时间的信号先乘上一段时间不为零的视窗函数后再进行傅里叶变换,然后将这个视窗函数沿着时间或者空间轴不断平移,最后将所获得的一系列的频谱排开组成一个二维图像.图像中的一个轴是时间或者空间,而另一个轴是频率,这样就可以同时获得信号的时空域和频率域的所有信息.短时傅里叶变换虽然在分析信号频率的时空分布上比傅里叶变换有了明显的改善,但是它所获得的信息精度十分有限,是一种折衷的解决方法.在短时傅里叶变换分析中,视窗函数是根据所分析对象的特点预先确定的,一旦确定了视窗函数的长度和形状,这种分析的频率分辨率也就被固定了.也就是说,这种方法不能同时对函数中的低频和高频的分量进行十分精确的分析.在理想的状态下,如果有一个可自动调节长度的视窗函数,则可以对任何函数进行在时空域和频率域中的精确分析.

小波变换的思想就是建立在可自动调节长度的视窗函数之上的,它起源于20世纪初的Haar的工作^[3].在上个世纪的80年代,小波变换的理论(1975年连续小波变换(continuous wavelet transform, CWT)的发现)和公式(1982年CWT算法的建立)逐步建立后极大地带动了这一技术的发展.到20世纪90年代,这一种变换方法才变得十分成熟并且得到广泛的应用.

2 连续小波变换

傅里叶变换的核心函数是正弦和余弦函数,这些不同周期的三角函数分别表示了原函数所包含的信息变化的快慢程度.在傅里叶变换中,通常用周期的倒数(即频率)来描述原函数的这种特点.频率是傅里叶变换所专有的概念.经过傅里叶变换我们将原函数从函数空间转变到频率空间,从而对原函数的很多特点有了更清楚的认识.而在连续小波变换中,三角函数的周期的概念为各种小波函数的尺度(scale)所取代,同时又引进了视窗变换中的位移的概念,将原函数或者信号从函数空间转化到尺度和位移空间,从而可以同时原函数在频率和时空两个领域内的性质有着更好的理解^[4].

在连续小波变换中,存在一个母小波函数(mother wavelet),然后通过改变母小波的尺度,即缩放母小波,形成了一系列的女儿小波(daughter wavelet).然后将原函数分解为这一簇小波的组合.女儿小波在一些中文论文中被翻译为子小波,在后文中我们将引进子小波的概念,女儿小波的定义和子小波的是不相同的.每一个小波函数的作用十分类似于傅里叶变换中的正弦和余弦函数,但是有两点是不同的:(1)所有的小波都是有限时空的函数,它们并非是周期性的;(2)所有的小波在时空中是可以不断移动的,因此小波变换可以获取函数在时空域上的特征.小波变换同时拥有尺度和位移两个参数.一个一维的原函数经过小波变换后会变成一个二维的函数,依此类推,一个二维的函数结构经过小波变换后就会变成一个四维的函数.

如同傅里叶变换是原函数和三角函数的卷积,连续小波变换的数学表达式也是原函数和一组小波函数的共轭函数的卷积(注意:应用共轭函数主要是为了公式的对称性).而在小波的逆变换时,原函

数也就等于小波变换后的函数和这组小波函数的卷积。在小波变换中我们不再使用频率的概念,但是我们却保留了频谱或谱(spectrum)的概念。由于尺度和周期是紧密联系的,尺度大所表示的周期也就长,因此在一些小波谱中有时也会使用周期来代替尺度。不过对于不同的小波函数,尺度和周期的比例关系是不尽相同的。小波的频谱和傅里叶变换的频谱有很大差别。在小波变换中,由于所有小波具有相同的归一化的能量,小尺度的小波往往含有很宽的高频段,由于受平滑效应的影响,它们的能量分散,所产生的谱线要比傅里叶频谱的谱线低矮,而大尺度的小波则含有很狭窄的低频段,所以小波的能量相对比较集中,所产生的谱线就比较尖锐。

连续小波变换的小波函数是由母小波通过尺度和位移的变化来获得的,它们具有如下的形式:

$$\Psi_{s,r}(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} \Psi\left(\frac{t - \tau}{s}\right), \quad (1)$$

式中 s 是尺度参数, τ 是位移参数,式中的系数 $1/\sqrt{s}$ 是为了使不同尺度的小波均具有相同的归一化的能量。母小波函数是一种特别的函数:它们在时空域有确定的位置,均值正好为零,其绝对值和平方值是可积分的,因此是一个可测量的函数,它的平方值的积分正好为 1。由于比例尺度的变化相当于在时空域的压缩或扩张,若在时空域进行压缩,则相当于在频率域的扩张,所以经过扩张后的小波具有较低和较窄的频率范围(图 2)。母小波可根据其构造函数的表达式分为两类:显性或隐性。根据其正交性又可分为:正交或非正交。目前最常用的小波有 Haar、Daubechies 系列, Biorthogonal 系列, Coiflets 系列, Symlets 系列, 以及 Morlet, Mexican Hat, Meyer 等常用小波函数。通常具有正交性的母小波可提供较好的变换性能。在某些特殊应用环境(如对于大容量天文图片的小失真压缩),为了获得特殊的变换性能,数学家和工程师可以创造或构造新的母小波函数。

既然母小波形式多样,如何在特定应用中选取合适的母小波函数是用户关切的问题。尽管还没有确定的答案,但一般应遵守两条原则(1)对于复数信号应用复数母小波(2)母小波的形状应与被分析的信号相类似。

连续小波变换不但保留了傅里叶变换中反映函数变化快慢程度的尺度,同时还反映了各种尺度分量所发生的时空位置,具有很大的优越性。但是连续小波变换是一组无穷的两维系列,因此运算量很大。同时小波变换往往只有数值解,而不像在傅里叶变

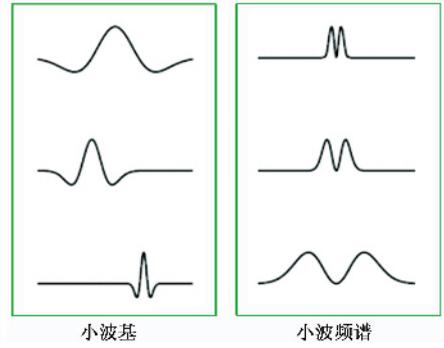


图 2 不同级的小波函数(左)和它们的频率谱的形状(右)

换中很多常用函数的傅里叶变换具有非常简单的解析表达式,所以在具体的应用中还是有很大局限性。离散小波变换(discrete wavelet transform, DWT)由于去除了不必要的重复的系数,减少了变换中的运算量,而且运算的方法非常有规律,所以在实际的应用中常常使用的是离散小波变换。

3 离散小波变换

从数据上看,一个一维函数的连续小波变换是一个尺度和位移的两维函数,它的时空域和频谱域的乘积就等于函数值域的平方,因此是十分不经济的。1992年, Daubechies 提出了一个新的离散小波的表达式^[1]:

$$\Psi_{j,k}(t) = \frac{1}{\sqrt{s_0^j}} \Psi\left(\frac{t - k\tau_0 s_0^j}{s_0^j}\right), \quad (2)$$

式中 j 和 k 是整数, $s_0 > 1$ 是一个扩张步长(dilation step)。如果 $s_0 = 2$ 并且 $\tau_0 = 1$,那么这时所有的采样点所形成的图形就被称为二进网格(dyadic grid)。在这种图形中,当尺度增大一倍时,根据 Nyquist 采样定律所需要的采样点就可以减少一半,而在尺度缩小的时候,则所用采样的点数就要增加。在位移和尺度所形成的平面上,大尺度的采样点非常稀疏,而当尺度越来越小时,采样点就越来越密。我们知道,大尺度所对应的是很慢的变化,少量的采样点就足以表示函数在这种尺度上的特点,而在小尺度上,所要分析的是很快的变化,因此需要较多的采样点才能反映这种快速的变化。所以这种离散采样的形式是十分经济有效的。

当对一个连续函数进行离散分析时,我们所获得的是一组小波分析的系数,这个分析过程称为小波系列分解。信号分解方法是否有意义的一个最重要问题就是能否利用这些系数来复原原有的函数。

Daubechies 已经证明,只要原函数的二次模是有界的,那么利用这种离散小波分析的方法就可以完整地复原原来的函数^[1].

为了使所获得的小波系数不存在重复的现象,则应该在选择小波的时候满足函数正交的条件:

$$\int \Psi_{j,k}(t) \Psi_{m,n}^*(t) dt = \begin{cases} 1 & j = m, k = n \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \quad (3)$$

满足这一条件的母小波有 Haar 小波、Daubechies 系列小波、Coiflets 系列小波和 Symlets 系列小波等.

4 小波频谱滤波器和分频谱编码

有了上面的知识,我们就可以对不同的的小波进行频谱分析.从傅里叶变换的基本原理可知,如果一个女儿小波的尺度增大一倍,那么它对应的频率值就会减少一倍,它的频率宽度也会相应地缩小一倍.在小波频谱上,每个女儿小波都覆盖着一个范围,相邻小波的谱域关系决定于扩张步长,所以小波函数也被称为小波频谱滤波器(band-pass filter).在小波变换的频谱中,母小波所对应的频谱位于频率谱的高端,具有最大的频率谱范围.而其他的女儿小波的频率谱则依次向频谱图的低频端移动,同时它们所覆盖的频率谱范围也相应地递减.相邻小波谱的中心尺度的比值决定于扩张步长,在一种变换中这是不变的.因为这个比值决定了频谱上的覆盖情况,所以该比值也被称为可信度因子(fidelity factor).所有的一簇小波就相当于一组在谱图上的带通滤波器银行(band-pass filter bank)^[5].在理想的情况下,所有的滤波器应该首尾相接互相覆盖(图3).

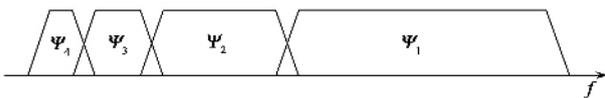


图3 不同尺度的女儿小波在小波频率谱上的覆盖

从图3中可以看出,下一级女儿小波的谱是原女儿小波的一半,所以仅仅能覆盖所剩余低频端的一半.这就表示需要有无穷多的女儿小波才能够真正实现频谱轴的全部覆盖.这是十分不经济的.在现代小波分析中,为了提高效率,一般不使用无数的女儿小波来对低频端频谱进行全部覆盖,而是使用一个专门的低通滤波器来实现覆盖.这种低通滤波器称为比例尺函数(scaling function)或者称为子小波(son wavelet).在每一级的小波变换中,所有的频谱都可以利用前面的女儿小波的频谱和这一级的子小

波的频谱来实现全部的覆盖.研究表明,所谓的比例尺函数就是一个具有低通频谱的原函数本身.这个比例尺函数可以用小波分解系数和小波函数乘积和的形式来表示.该表达式和复原原函数的表达式几乎完全相同,所不同的是它只使用了从 j 开始的无穷多个女儿小波的系数.

有了比例尺函数就不再需要用无穷多个女儿小波来进行函数的小波分析.我们可以采用有限的女儿小波簇和它们覆盖后剩下的频段所对应的比例尺函数,来对函数进行这种改进后的小波分析.因此无限的小波分析问题就被有限数目的小波函数和比例尺函数所代替了.当然用这种方法我们会丢失部分原函数或者原信号在一些尺度上的信息.不过从函数表达的角度,由于原函数仍然可以被复原,所以原函数的信息并没有任何损失.在进行小波分析的时候,如何来选择比例尺函数的频谱宽度是一个很重要的问题.这个宽度愈小,所使用的女儿小波数量就愈多,所获得的尺度信息就愈丰富.但是在实际的情况下,我们所使用的小波数量总是有限度的.

如何来确定这个比例尺函数呢?比例尺函数可以从无穷多个小波函数之和中减去一定数量的小波函数来获得.如果在一个比例尺函数频谱上再加上一个同一级的女儿小波函数的频谱,就得到了一个频谱宽度为原来两倍的新的比例尺函数.也就是说,某一个尺度的比例尺函数,可以用下一级的小尺度的比例尺函数经过一定的变换来表示,这就是有名的双尺度的关系式(two-scale relation)^[6,7]:

$$\varphi(2^j t) = \sum_k h_{j+1}(k) \varphi(2^{j+1} t - k). \quad (4)$$

如果一个比例尺函数可以用很多组的小波函数来代替,那么下一级的女儿小波函数也可以用经过变换的比例尺函数来表示,这就建立了比例尺函数和小波函数的关系:

$$\Psi(2^j t) = \sum_k g_{j+1}(k) \varphi(2^{j+1} t - k). \quad (5)$$

因为原函数可以表达成小波函数之和的形式,所以它也可以表示为比例尺函数之和的形式:

$$f(t) = \sum_k \lambda_j(k) \varphi(2^j t - k). \quad (6)$$

如果将这个公式退到 $j-1$ 阶的尺度,那么原来的函数就可以表达成 $j-1$ 阶的小波函数和比例尺函数之和的形式.如果小波函数和比例尺函数是互相正交的,这个公式中的两个系数就是原函数分别与小波函数和比例尺函数的标量积.

$$f(t) = \sum_k \lambda_{j-1}(k) \varphi(2^{j-1} t - k) + \sum_k \gamma_{j-1}(k) \Psi(2^{j-1} t - k). \quad (7)$$

因为小波函数和比例尺函数都具有尺度缩放和位移的特点,所以函数的小波分量和比例尺分量的系数也具有如下的重要关系:

$$\lambda_{j-1} = \sum_m h(m-2k)\lambda_f(m),$$

$$\gamma_{j-1} = \sum_m g(m-2k)\gamma_f(m). \quad (8)$$

这两个公式说明,函数的任何一阶的小波系数与比例尺系数都是它们的上一阶系数加权后的和.根据信号学理论,数学中加权求和的作用就相当于经过一个数字滤波器.由于比例尺函数的系数是从低频端获得的,所以它的权重函数就是一个低通滤波器;而小波函数的系数是从它的高频端获得的,所以它的权重函数就是一个高通滤波器.低通滤波器又称为比例尺滤波器或者平滑滤波器,而高通滤波器又称为小波滤波器或者细节滤波器.

在实际的小波分析中所采用的是一个滤波器银行,原函数或者信号将不断地通过这个滤波器银行.在滤波器银行中有多个层次,每一个层次都可获得一组小波分量和比例尺函数分量的系数,然后比例尺函数分量的系数再经过一层滤波器,获得下级的新的系数.这种一层一层分解的方法也称为分频谱编码(sub-band coding).在进行信号分频谱编码的时候,总是将信号的频谱分成相等的两段:即它的低通和高通两个部分.其中高通部分仅仅含有很少的信息细节,要予以保留,而低通部分仍然包含有很多很多的信息细节,所以必须继续进行细分.整个细分的过程是自动迭代进行的,实际上是原函数经过了一组滤波器的银行.由于整个处理过程的机制是完全相同的,分析计算非常简单,而所获得的每一个层次均具有不同的分辨率,所以这种过程也称为多分辨率的分析过程(multi-resolution analysis).该多分辨率的分析过程可以根据分析所需要的分辨率来决定所需要分析的层次,而无需进行无限次的分析.

5 离散信号的小波变换

基于上述小波分频谱编码的原理,可以对离散信号进行离散小波变换.一组离散信号 $x(n)$ 通过一系列的低通($h(n)$)和高通($g(n)$)滤波器,分别可以得到近似(approximation)信号和细节(detail)信号.由于经过一组滤波器后频率谱范围会减少一半,根据 Nyquist 采样定律,可以减少一半的采样率,所以滤波器的输出为

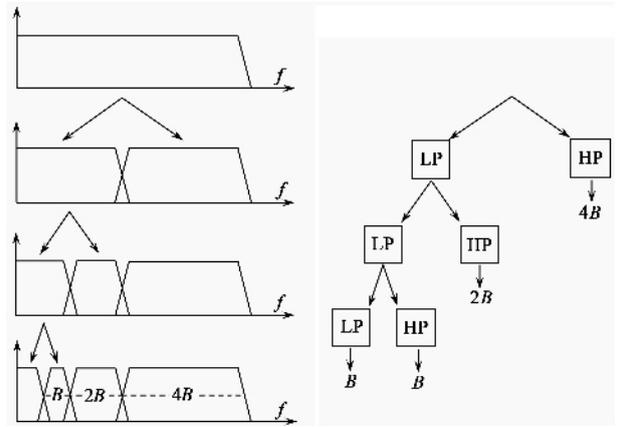


图4 信号频谱的分割(左)和迭代式的滤波器银行(右)(图中 LP 为低通滤波器,HP 为高通滤波器, B 为带宽, 2B 为 2 倍带宽, 4B 为 4 倍带宽)

$$y_{low}[n] = \sum_{k=0}^{N-1} x[k]g[2n-k],$$

$$y_{high}[n] = \sum_{k=0}^{N-1} x[k]h[2n-k]. \quad (9)$$

在实际应用中,低通和高通滤波器是相互关联的,它们之间的关系式为 $g(n) = (-1)^n h(2N-1-n)$,所以这种配对的滤波器也称为正交镜像滤波器(quadrate mirror filter).

离散小波变换的计算流程如图 5 所示,对近似信号 A_{j+1} ,还可以进一步应用滤波器进行分解,得到 $A_{j+2}, A_{j+3} \dots$ (原始信号 $A_0 = S$),这样的信号分解方法也称为 Mallat 金字塔算法(Mallat pyramidal algorithm)^[6,7].

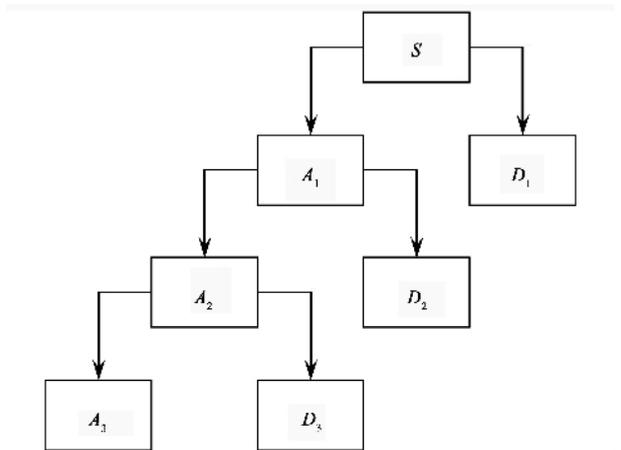


图5 离散信号的离散小波变换的 Mallat 金字塔算法实例(图中 S 为原始信号, A1, A2, A3 分别为一阶、二阶、三阶近似信号, D1, D2, D3 分别为一阶、二阶、三阶细节信号)



图6 经小波变化后压缩图像的比较

6 滤波器的设计和小波分析的步骤

在小波分析中,小波函数或者小波滤波器以及比例尺函数或者比例尺滤波器是成对出现的,它们有很多种类.在离散信号分析时,它们均可以用一个有限的数组来表示,在信息学中,这是一种有限脉冲响应(finite impulse response, FIR)滤波器,这种滤波器对原信号没有反馈作用.另一种对原信号具有反馈作用的滤波器称为无限脉冲响应(infinite impulse response, IIR)滤波器.在小波分析中的这种有限脉冲响应滤波器必须满足下列的条件(1)比例尺滤波器中的各数值之和的平方恒等于2(或者1)(2)小波滤波器中的各数值之和恒等于零(3)小波滤波器中的各项数值相对于比例尺滤波器中的各项数值具有反对称的特点(由于这个特点,小波滤波器有时也称为比例尺滤波器的镜像).滤波器的第一项的数值等于比例尺滤波器中倒数第一项的数值,第二项等于倒数第二项的数值,并且所有的奇数项的符号均为负号.

如果有一列长度为 N 的离散的信号,那么进行小波分析的时候就要先形成一个 $N \times N$ 的比例尺矩阵.在矩阵的每一行,除了滤波器的数值以外均为零,同时每行滤波器的数值将依照位移量逐渐地向右平移.该矩阵和信号向量的乘积就是所获得的比例尺系数,同理可以获得高通滤波器的小波系数.所获得的比例尺系数又可以进行下一级分析.一般来说,低通滤波器的作用是平滑数据,而高通滤波器的作用是获取它们在这个细节上的差别^[8].

7 小波变换的应用

7.1 图像、信号压缩

天文图像或生物图像(如指纹、虹膜、面部照片)信息量非常大,有时描述一个对象又需要十几或上百幅的照片,如此庞大的数据对传输或存储都是一个很大的问题,因此需要非常实用的高效率、高保真的图像压缩方法^[9].图像压缩的方法一般包括(1)利用近似图像代替原始图像而忽略图像的某些细节(如图像的噪音)(2)减少图像颜色或者灰度的级数,忽略图像中的低频信号(如相机抖动)等等.图6是以人脑的核磁共振图像为例说明小波变换在图像压缩方面的应用.在对人脑的图像进行二维小波变换以后,预先设定某一个门限,在门限范围内的信号均被简化为0,然后再进行逆变换合成原图像.当门限设为5时,合成图像中有67.84%的零值,所保存图像的信息量为99.99%(可称为保真率).而当该门限上升为30时,零值相应地上升为90.16%,图像高度压缩.尽管合成图像中局部有些模糊,但保存的信息量依然高达99.73%.这种图像高保真压缩的方法同样适合于二维或多维信号.

最新的静止图像存储压缩格式JPEG 2000^[10]就是基于双正交的小波变换, JPEG 2000有很高的压缩比,而且不产生原来基于离散余弦变换的JPEG标准中“斑驳、模糊”的人造效应,非常适合于传输和下载十分复杂的图像.与JPEG标准相比, JPEG 2000的优点包括:高压缩率(在高量化比率时,人工效应几乎不可分辨, JPEG 2000平均压缩效率比JPEG高20%,而在低比率情况下,如对灰度图像小于0.25位/点, JPEG 2000则具有更明显的优势)、多重精度(JPEG 2000能无缝地压缩多个图像部分)、渐进传输性能(当接收到文件的小部分后,能显示低质量图像,随着接收数据的增多,图像质量可以线性改善)、可同时支持无损和有损压缩、随机编码存储和处理(对图像的不同区域以不同的质量进

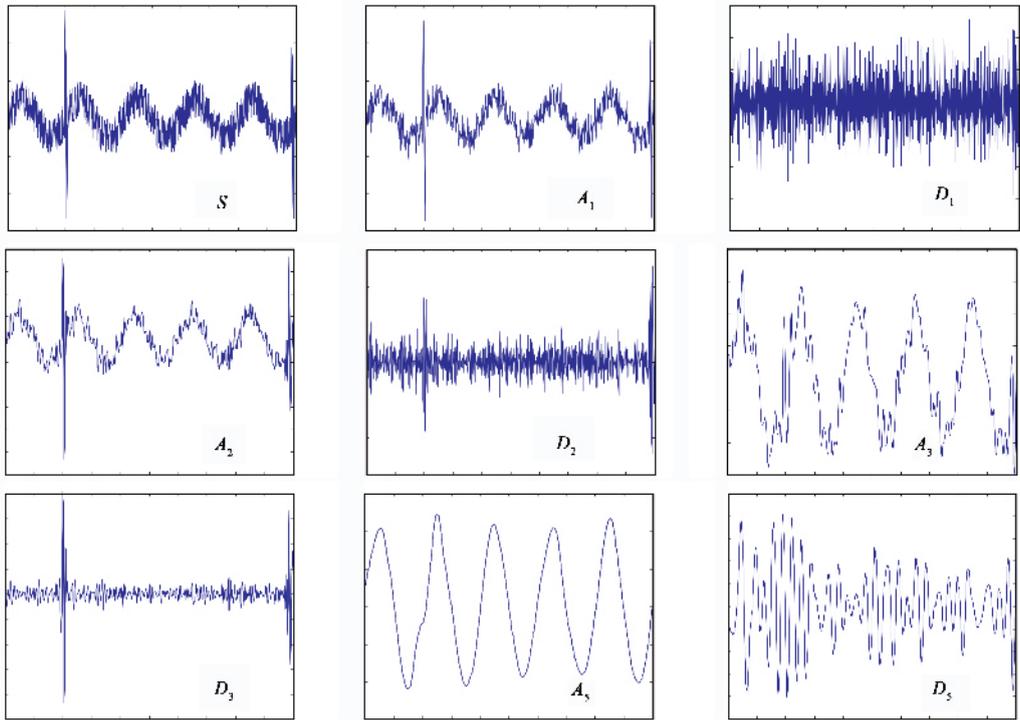


图7 含噪音信号经离散小波变换后的各分量

行处理)、误差恢复性(可抵抗传输通信通道中噪音引起的误差)、顺序集结(无需缓冲存储器)等等。

7.2 去除噪音

任何测量的信号都无法避免地被附加了噪音,有时信噪比太小时反而会将有用的信号给淹没了,因此去除噪音通常是信号处理的第一步^[11]。

图7是利用小波变换去除噪音的一个例子,原始信号是在一个连续的低频正弦波信号(频率为0.5)上随机叠加了两个高频(频率为10)高振幅的正弦脉冲,这里使用了dB5(第五级Daubechies小波)作为去除噪音操作的母小波。在经过第一阶小波分解后, D_1 主要为高频白噪音,信噪比已经获得了改善,但是还不够。当进行到第三阶小波分解后, A_3 信号中的低频正弦波信号已经开始显现,而经过五阶小波分解后,低频信号变得十分光滑,但同时去除了高频信号, D_5 信号其实是原始信号中的高频脉冲,而非噪音。综上所述,利用小波变换可以有效地去除噪音,但用户应该注意分解的阶数以及保留有用信号中的高频分量。

在小波变换工具箱中通常还提供了一个十分有用的功能:设置门限。当细节信号大于某一预先设定的门限时,系统认为该信号是有用信号而非噪音,因而可以有效地和智能地保留高频信号分量。同样的

原始信号经过处理后如图8所示,与图7相比较可以看出去除噪音的效果。虽然由于第二个高频脉冲过于接近信号窗口的边缘而引起了处理上的失误,但第一个高频脉冲能够很好地被保留。设置门限有两种方法:硬门限和软门限。硬门限是直接将在门限范围内的信号设为零值,而软门限是在硬门限的基础上在剩下的非零值中减去一定的门限值,使边界相对光滑,所以软门限方法具有较好的特性,被广泛采用。当然如何确定门限值和设定门限选择的规则对输出结果都有重大影响,需要用户根据具体的情况去分析。

7.3 检测信号的非连续性

信号的非连续性包括信号的间断、突变、变形等等,这些非连续信号对分析和提取突发短信号(可能是系统故障,也可能是有用的微弱信号)非常有用^[12]。如图9的信号是个标准的光滑正弦波信号,只在 $t=150s$ 处有个微小的几乎难以分辨的突变(见插图)。而当进行一级离散小波变换后,在细节信号(D_1)中,就能清楚地检测出这一突变。由于通常这种奇异点都很短,因此也需要用一个持续时间较短的母小波去检测,如Haar小波函数就是不错的选择,而且分解的级数不需要太多。另外由于信号都包含噪音信号,检测它的变化比较复杂,需要认真区

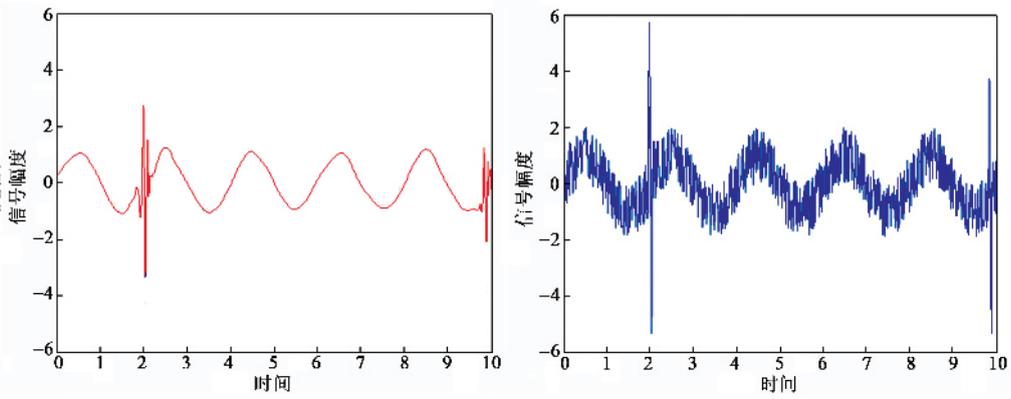


图8 采用门限去噪技术后的信号(左)与原始信号(右)的比较

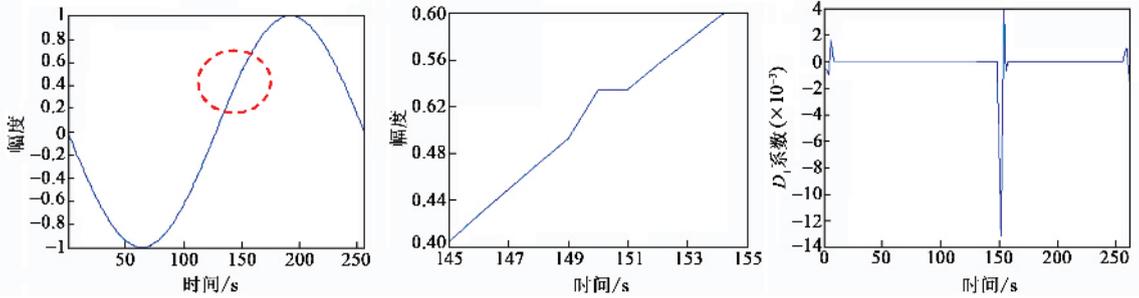


图9 正弦波信号(左)中包含有一个微小的变换(中)和小波变换检测出的奇异信号(右)



图10 小波变换在检测图像边界中的应用实例一(左:原始图像;中:比例尺为1的边界;右:比例尺为10的边界)

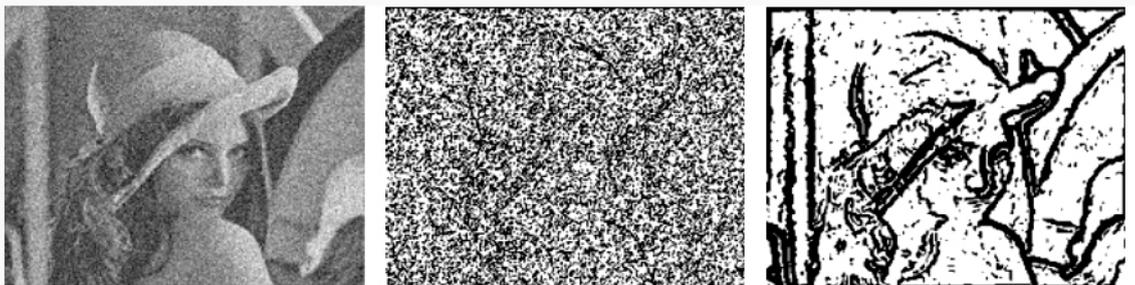


图11 小波变换在检测图像边界中的应用实例二(左:具有噪声的图像;中:比例尺为2的边界;右:比例尺为10的边界)

别其中的噪声信号和感兴趣的奇异信号。

7.4 边界检测

计算机图像处理和视觉识别中的一个重要问题是边界检测,它是有效划分图像组成部分(segmentation)的前提。边界可认为是信号中的瞬态变化,即与相邻元素的强度相比具有较大的改变。在数学中,

边界点有最高的一阶导数并且其二阶导数为零。目前图像边界检测方法是利用空间域和频率域中的滤波器,也称为算子或面具(mask)。常用的算子有 Sobel 算子和 Laplacian 算子。Sobel 算子由分别检测横向和纵向边界的两个子算子构成,每个子算子运行一阶导数运算,以测量在特定方向上的斜率;而 Laplacian 算子则是基于图像的二阶导数操作。尽管

这两种算子运算都很简单,但主要缺陷是不能分辨噪音信号.在小波变换检测边界的应用中,小波函数选用的一种具有高斯(Gaussian)形状脉冲的一阶导数^[11],与 Sobel 算子类似,在使用小波技术时也需将小波函数分别用于检测横向和纵向的边界,再相加以得到整个边界^[13].

图 10 和 11 是小波变换在检测图像边界中的例子,原始图像是图像处理中的经典图片 Lena.与常用边界检测算子相比,小波变化的一个明显的特点是可以调整尺度.当尺度较小时,分辨率较高,但也产生了具有噪音的不连续边界;而当尺度较大时,分辨率相应降低.小波变换方法的另一个特点是抗噪音性能较好.当图像的信噪比降低时,选用小尺度可以确保边界的位置,却不能很好地分辨噪音和实际边界,而选用大尺度时可以有效地去除噪音信号,但无法保证边界位置的确定性.因此,在实际应用中,用户需要根据图像的特征和检测的要求选取适当的比例尺.总而言之,小波变化在检测图像边界时具有如下优点:小波的多分辨率特性可以从不同的尺度分析边界;小波变换还可计算边界的相位角信息,为图像划分提供方便;可以有效地压缩信息,但其主要缺点是计算复杂,耗时较长.

8 结束语

小波变换是一种最近快速发展的信号分析方法,能够同时提供信号在时域和频域中的信息,解决了传统傅里叶变换中的一些缺点.并且由于其运算时间也比傅里叶变换少,因此在现代工程中得到了广泛的应用,成为工程师最有用的工具之一^[14,15].

本文简单介绍了傅里叶变换的缺陷和改进,以及小波变换的基本思想、概念和计算方法,同时提供了几个实例说明小波变换的优势和用途.小波变换还可以应用于检测信号的发展趋势,研究自相似性,分辨出纯频率,以及进行大矩阵的快速乘法运算、差分方程求解、第二类积分方程的快速计算等方面.

参 考 文 献

- [1] Daubechies I. Ten lectures on wavelets. 2nd edition. Philadelphia, SIAM, CBMS-NSF conf series, 1992. 61
- [2] Gabor D. J. of the IEEE, 1946, 93 :429
- [3] Harr A. Math. Annal., 1910, 69 :331
- [4] Mallat S, Zhong S. Wavelet Transform Maxima and multiscale edges, in Wavelets and Their Applications. Eds. Ruskai M B, Beylkin G, Goifman R *et al.* Jones and Bartlett, 1992
- [5] Vetterli M, Herley C. IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process, 1992, 40(9):2007
- [6] Mallat S, IEEE Trans. Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1989, 11(7):674
- [7] Mallat S G. Trans. Amer. Math. Soc., 1989, 315(1):69
- [8] Rioul O, Vetterli M. IEEE Signal Processing Magazine, 1991, 8(4):14
- [9] Hilton M L, Jawerth B D, Sengupta A N. Multimedia Systems, 1994, 2(5):3
- [10] Wallace G K. Communications of the ACM, 1991, 34(4) 30
- [11] Mallat S, Zhong S. IEEE Trans. Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1992, 14(7):710
- [12] Mallat S, Hwang W L. IEEE Trans. Information Theory, 1992, 2 :617
- [13] Rifaat R, Kinsner W. IEEE Conference on Communications, Power and Computing. 1997, 322
- [14] Ruskai M B, Beylkin G, Coifman R *et al.* Wavelets and their Applications. Jones and Bartlett. 1992
- [15] Schumaker L L, Webb G. Recent Advances in Wavelet Analysis. Academic Press, 1993



北京欧普特科技有限公司

光学元件库—欧普特科技

欢迎访问:

www.goldway.com.cn

北京欧普特科技有限公司严格参照国际通常规格及技术指标,备有完整系列的精密光学零部件(备有产品样本供参考)供国内各大专院校、科研机构、试验室随时选用,我公司同时可为您的应用提供技术咨询.我公司可以提供美国及欧洲产的优质红外光学材料,如硒化锌,硫化锌,多光谱硫化锌等.



- 光学透镜:平凸、双凸、平凹、双凹、消色差胶合透镜等.
- 光学棱镜:各种规格直角棱镜,及其他常用棱镜.
- 光学反射镜:各种尺寸规格的镀铝、镀银、镀金,及介质反射镜.直径 5mm—200mm.
- 光学窗口:各种尺寸规格,材料的光学平面窗口、平晶.直径 5mm—200mm.
- 各种有色玻璃滤光片:规格为直径 5mm—200mm.(紫外、可见、红外)及窄带干涉滤片.
- 紫外石英光纤:进口紫外石英光纤, SMA 接口光纤探头,紫外石英聚焦探头.

地址 北京市海淀区知春路 49 号希格玛大厦 B 座#306 室

电话 010-88096218/88096217 传真 010-88096216 网址 www.goldway.com.cn

联系人 陈镛先生 施楠小姐 曾安小姐

E-mail kevinchen@goldway.com.cn shinan@goldway.com.cn zengan@goldway.com.cn