

物理学咬文嚼字之十八

平、等与方程

曹则贤

(中国科学院物理研究所 北京 100190)

动物庄园里所有动物都是平等的,但某些动物比别者更平等.

—— George Orwell in *Animal Farm*

你要懂得平衡的价值.

—— Testament of Nicolas Flamel

摘要 同“平”或“等”相联系的数学物理学词汇有方程、(不)等式、平衡、恒等式、全等、等价,等等.其所对应的西文词多有出入,而它们在数学物理语境中的具体含义也有值得推敲之处.

物理学研究事物或事件之间的定性和定量¹⁾方面的关系.在进行比较的过程中,不可避免地就出现了“相等”或“不等”的概念.“相等”的概念是一个基本的、逻辑性很强的概念,我猜测不同语言的词汇之间应该没有歧义.西语中源自拉丁语 *aequalis* 的 *equal* 或者日尔曼语的 *gleich* 都可以和汉语的“相等”划等号.

形容词 *equal* 的名词形式是 *equality* 而动词 *equate* (*make equal* 使相等)的名词形式是 *equation*.前者我们翻译成“等式”,而后者被翻译成“方程”.一般认为方程是含未知数的等价关系式,而等式是不含未知数的等价关系式.但是,两者之间并没有严格的界限,在曾经的数学、物理工作语言德语中,就都是 *Gleichung* 许多被称为方程的东西实际上是等式或者干脆是对概念的定义.比如爱因斯坦的质能关系有时被称为方程,而牛顿运动方程 $f=ma$ 实际上更多的是对力 (*force*) 的定义,而力原本是力学 (*mechanics*) 中没必要出现的概念^[1].科学上有许多重要的、神奇的等式或方程.笔者最感惊奇的是 $e^{\pi} + 1 = 0$, 考虑到 e 和 π 是无理数,而“ π ”是一个我们没弄清其含义的数²⁾,而 e^{π} 竟然是整数“ -1 !”另一个笔者非常崇敬的等式是所谓的 Gauss-Bonnet 公式 $\frac{1}{2\pi} \int_{S^2} K dS = 2(1-g)$, 其中 K^{-1} 是曲面局域两个曲率半径的积, g (*genus*) 是曲面的亏格数.这个

等式的不平凡之处是它一边是纯几何的内容,一边是纯拓朴的内容,而且它还可以应用于量子力学.其近代推广是由陈省身 (*S S Chern*) 先生完成的.对于哈密顿量为 $H(\theta, \phi)$ 的体系,将 K 换成参数空间中基态丛的绝热曲率, $K = 2 \text{Im} \langle \partial_{\theta} \psi | \partial_{\theta} \psi \rangle$, 右侧就是陈数 (*Chern number*) (计算陈数的操作,英语动词就用 *Chern out* 了.陈省身先生的影响由此可见一斑).这些内容可以同 *Berry* 相,量子霍耳效应等高等量子力学内容相联系,已超出笔者的理解能力,有兴趣的读者请参考相关专业文献 [2].

Equation 本身是“使之相等”,包含着某种努力的意思.现在一般指含有未知量的等式³⁾,汉译方程.如何中文的“方程”等同于西语中的 *equation* 笔者此前未能见到解释.笔者竟然斗胆猜测,所谓“方程”大约是关于

- 1) 英文 *Qualitative and quantitative* 本意为“关于性质和数量的”.汉译“定性的”和“定量的”似附加了一些未有之意.容以后再议.——笔者注
- 2) 人们已经认识到“ π ”并不是虚数那么简单,实际上它是实 (*real*) 的.它可以是多维的,定义为 $i^{\pi} = -1$ 其中“ π ”单位矩阵.这个数被引入到对转动的描述中一定有其内在的、物理的原因.——笔者注.
- 3) 许多书中都有“含有未知数的等式叫方程”的说法.哪里会那么简单! 比如 $2x \times 2 = 4x$ 就不好算是真正意义上的方程,而是出现在漫画中作为对 *Gershon* 的讽刺 (“*You cannot call it a Gershon's equation*”). 只有我们的老师们变得不再那么幼稚可爱了,我们的学生才能更早更多地学会思索! ——笔者注.

行舟里程计算的,因为“二船相并为方”,《诗经》有“舟之方之”的句子.又,“方”字可解释为木筏.大家也许记得我国初中数学刚引入方程概念的时候,整天计算或算计的都是从某地到某地,顺水多少小时,逆水多少小时之类的题目.后来发现,方程一词约两千年前就出现了,《九章算术》(成于公元四、五十年⁴⁾)之[卷第八],章名就是方程.南北朝人刘徽注云:“程,课程也.群物总杂,各列有数,总言其实.令每行为率,二物者再程,三物者三程,皆如物数程之,并列为行,故谓之方程.”“方”即方形,方程即线性方程组系数的增广矩阵.此时的“方程”指的是包含多个未知数的联立一次方程组,即现在的线性方程.多少个未知数,就需要多少个条件,其系数构成方阵.但将方程等同于一般意义上的 equation 到底何人主张,出于何种考虑,尚盼方家考证.

物理学中充满了方程式,其发展史一定程度上可以用一些有划时代意义的方程的出现来标识.那么如何理解方程呢?笔者陋见,以为关于方程不仅是两个物理量在量上是相等的,有相同的量纲(dimension),更重要的是方程两侧所代表的物理图像或抽象的思想内容应是自洽的、契合的.数学上等价的方程(或等式),在物理上未必是合理的.比如,数学上 $a=f/m$ 和 $m=f/a$ 是等价的,但物理上后者就显得很不物理了,如果不说是错误的话.

《天地有大美》一书介绍了几个著名方程,包括爱因斯坦质能方程、薛定谔方程、狄拉克方程、香农方程、杨一米尔斯方程、物流方程(Logistic equation)、德雷克方程^[3].对于此书关于伟大方程(great equations)的选取,笔者有些看法.像德雷克方程,确切地说,不过是德雷克公式,其目的是要预测宇宙中存在的智慧生命之星球的个数,是一个相当不严谨的东西,算作伟大方程就太不严谨了⁵⁾.那么什么样的方程才是伟大的方程呢?笔者以为,能将两个不同基本概念划上等号的,或者能将两门不同的学问联系到一起的,才应该算是.前者典型的有爱因斯坦的质能关系 $E_0=mc^2$,将质量和能量两个概念统一起来了⁶⁾,以及爱因斯坦的场方程 $G_{\mu\nu}=8\pi T_{\mu\nu}$ [有多种写法.此写法把宇宙常数项当成暗能量吸收到能量张量(stress-energy tensor)里了](见图1).爱因斯坦的场方程指明了这样的原则:“物质决定时空如何弯曲,而弯曲的时空决定物质如何运动(“matter tells spacetime how to curve and curved space tells matter how to move”——John Wheeler).此方程是否是描述宇宙的终极公式我不敢妄加评价,但其所蕴含的大气魄却是惊人的,是我们常人所

不具有的.伟大的方程是要刻在石碑上的,如玻尔兹曼方程和朗道十戒^[4].

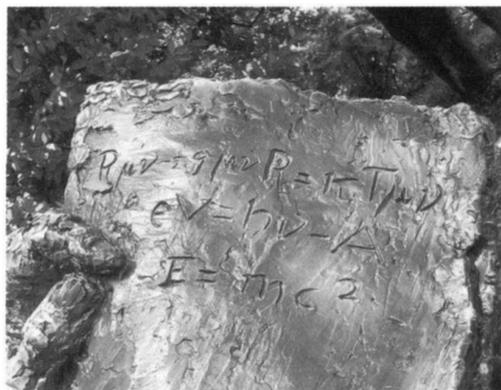


图1 刻有爱因斯坦引力场方程(形式之一)、光电效应方程和质能方程的金属雕塑

与等式相近的还有恒等式,这个词的西文为 Identity. Identity的字典解释为对所有变量值来说都相等的方程(an equation which is true for all permissible sets of values of the variables which appear in it).此词来自拉丁语 identitas 据信是按照 essentia (英文 essence 本质、精华)造的.现在西文中依然使用 Identity作为本质的本意,所以 identity在数学上的意义应是强调两侧本质上相同(Identity: the condition of being the same as a person or thing described or claimed).物理概念中涉及这个词的有 identical particle 汉译全同粒子,给人的印象是这些粒子都是相同的,而实际上它强调的是这些粒子已经是 essential (fundamental)的了,无法添上标签以区分各个个体.恒等式是个严肃的概念,某书上举例的恒等式为 $x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$,就涉嫌搞笑了.有意义的恒等式比如有关于傅立叶分析的 Parseval 恒等式 $f^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^2$,即函数 f 的模的平方等于其傅立叶展开系数之平方的和^[5].这里一侧是实数域上的积分,一侧是整数域上的求和,能看出其相等性,且对所有可以作傅立叶展开的函数成立,还是具有挑战性的.

4) 有文献认为成于公元前二世纪.——笔者注.

5) 2008年10月12日,人民大会堂纪念望远镜发明400周年科学大师报告会,美国科学家 Geoffrey Marcy 的报告“Searching for other Earths and life in Universe”谈到了对相关因子的修正.——笔者注

6) 至于为什么要把质能关系写成 $E_0=mc^2$,请参见笔者的物理学咬文嚼字之十一《质量与质量的起源》及其中的参考文献.这里又是方程两侧是携带着物理概念或图像的重要例证.——笔者注

作为比较关系,相等相较于不相等毕竟是特例,因此不等式 (inequality)也许能告诉我们更多东西.对于各种正定空间中的矢量,就满足著名的 Cauchy-Schwarz不等式 $|\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle * \langle y, y \rangle$ 或其变形 $|x+y| \leq |x| + |y|$.后者更直观,它的意思就是三角形 (任意正定空间里的三角形,包括平面几何里的三角形)任意两边之和不小于第三边.这个不等式小觑不得,所谓量子力学中的海森堡不确定性原理 (uncertainty principle)不过就是这个不等式在 Hilbert空间中的体现,它并不能告诉我们更多的科学内容——如果科学家们愿意严肃对待的话⁷⁾.不等式中的等式只在某些特定条件下才成立.比如作为不确定性原理典型案例的 $\Delta_x \Delta_p = \hbar/2$ 就只有波函数为高斯函数 (谐振子的基态)时才成立.可怕的是, $\Delta_x \Delta_p = \hbar/2$ 这个关系式被滥用和误用 (abused and misused)到波函数不是高斯函数的情形,而且那里的 Δ 也不是它应该取的意义了⁸⁾.一些物理学家对数学的漠视,是物理学中充斥大量虚假内容的主要原因.

在汉语语境里,同“等式”“全同”相近的词还有“全等”,比如全等三角形.这个全等的英文词是 congruent (名词形式为 congruence 和 congruity),同 equal 不沾边. Congruent 来自拉丁语 congruere (together + fall to come together correspond agree),意指图形扣在一起严丝合缝,汉译“全等”应属意译.

等号的形象为“=”,是水平的、等长的两个短杠.如果将一根均匀的杆关于一个支点给放稳了,其形态就是水平的.这里就引出了平衡的概念.日常生活中我们谈论平衡的概念时,比如讨论饮食平衡时,用的英文词为 balance (名词和动词形式相同,过去分词 balanced 可作为形容词用). Balance 源自拉丁语 bilancia 或 bilanx (bis + lanx),即两个盘子 (见图 2),汉译天平.天平等臂长,所以待称的物品和砝码 (质量标准)应该等量.与此相比照,中国的杆秤关于支点的两侧则是不等长的,实际上在质量标准 (秤砣)一侧其作用长度是可变的、带刻度的.显然,中国的杆秤相对于天平来说科学的多,它可以直接读取结果,只用很少的质量标准 (一般针对两套刻度只是选取两个不同的支点,使用同一个秤砣.有时也配两个秤砣.) (见图 3).但天平虽然相对于杆秤来说非常不经济,只利用了杠杆原理的一个特例,可它更直观、更精确,适于小质量物体的称量.大致说来,天平适合药剂师抓药,杆秤适合官员们分金.



图2 天平. 西文为 balance (两个盘子)



图3 杆秤. 杆秤连同秤砣和待称物品一起被从支点处吊起,滑动秤砣的位置使秤杆 (朝尾端渐细)处于水平状态,则此时秤砣的位置就是待称物品质量的读数.有时,一杆称配两个秤砣,秤杆上有类似计算尺似的两套刻度.杆秤是量具,更是艺术品

天平与杆秤的共通之处是处于称量状态时其杆必须是水平的,这种状态,英文是 balanced 中文为平衡 (即衡器是水平的).但中文平衡,或平衡态,又被用来翻译另一个非常重要的物理学概念 equilibrium (复数 equilibria). Equilibrium, 拉丁语原文为 aequilibrium = aequus + libra 词头 aequus 即现代英文的 equal 而 libra 可就值得详细讨论了. Libra 指慢慢地来回移动,天平接近平衡时其臂 (beam) 的上下运动,也即不倒翁的运动 (见图 4). 因为 librum 表现在天平接近可读数状态的形象,它被引申为所称量物品的单位.现代英语中的重量单位磅 (对 pound 的音译,其本意为重量),简写为 lb 或 L 就是

7) 参阅笔者的学术报告 PPT“Uncertainty of the Uncertainty Principle”.——笔者注

8) 1929年 Robertson 为海森堡补充的关于 Uncertainty principle 的证明里, Δ 明确为均方根 (root-mean-square variance). 严格的数学证明表明这个关系式在更广泛的意义上成立,但却不是大量物理学家滥用这个关系式所取的、各种不同的 Δ 形式.——笔者注

对 *libra* 的简写. 当然, 天平许多时候是称金银的, 所以 *libra* 至今还是货币单位, 比如英镑 (pound) 的符号就是花体的 *L*. 有意思的是, 平衡的德文形式为 *Gleichgewicht* 直接言明是等重量. 不同文化抓住一个事物的不同侧面所造成的异同, 可以通过比较平衡 (衡器是平的)、*equilibrium* (两侧对称的慢速来回运动; 等重) 和 *Gleichgewicht* (等重量) 这三个在物理学语境中完全相同的词找到一点感觉.

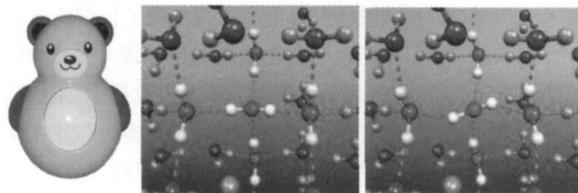


图 4 不倒翁的运动为典型的 *libration*. 重心很低, 当将整体几何外形放低时, 导致了重心位置的升高, 故能回复到原来的平衡位置. 比较右侧的两个图可以理解水分子的 *libration mode*. 黑球——O 原子, 白球——H 原子^[6]

Libra 所代表的运动是一种重要的分子运动模式, 即 *librational mode*. 典型的例子有类似天平结构的水分子的运动: 氧原子作为支点, 而保持等长的两个 H—O 键出离原来的平面 (*out of plane*) 来回晃动 (见图 4). 在液态水中, *librational mode* 的周期约为 40 fs ^[6].

如果细心考察一下, 会发现平衡态虽然是容易理解的 (许多时候人们说起热力学时实际指的是平衡态热力学), 但却是无趣的, 远离平衡态的体系才有更生动的现象, 比如生命的出现. 平衡并不是死水一潭, 平衡分稳定平衡和 unstable 平衡 (见图 5), 许多时候所谓的平衡是动态的平衡, 围绕平衡态有激烈的涨落或 *libration*. 从数学的角度来看, 不等的情形也比相等更广泛. 在以作为远离平衡态之耗散体系的人为主体的社会生活中, 平衡总有被打破的冲动甚至是要极力避免的, 平等也不是大家都满意的状态. “人人生而平等”的社会愿景所描述的是一种反物理的乌托邦状态. 法兰西共和国的座右铭“自由、平等、博爱 (*Liberté, Égalité, Fraternité*)”, 托马斯·杰弗逊 (Thomas Jefferson) 在美国独立宣言里写下的“人人生而平等 (*all people are created equal*)”, 都有点显得对客观事实视而不见. 也许, 这正是人类面对不平等的事实所报有的美好幻想吧.

平等的概念植于社会生活中, 是有暗示功能的. 社会关系里强调与“平等”类似的等价关系 (*equivalence*) 时, 似乎是将之看作一种单向的关系, 比如我



图 5 微妙的不稳定平衡

国为了提高知识分子 (一个非常模糊的字眼) 地位而实行的教授享受某级别官员待遇 (指住房、医疗等方面) 的政策. 岂不知, “等” (请再看一眼其符号为“=”) 就是平行的、双向的. 教授在待遇方面等价于某级别官员 (也许有教授们心里想将之坐实为等于), 反过来官员也乐意在学术方面等价于教授或干脆就是教授. 国内许多高校有伙食科长也是博导的大好局面, 其实彰显了“等号”的威力. 符号对社会结构的隐性塑造, 此为一强例. 然而, 等价于又不完全是等于, 它只能体现在某些特殊个体上, 因此会最终造成完全不同于的局面, 即等价消灭了等价本身. 所以 *Owll* 在《动物庄园》里有名句 “All animals are equal but some animals are more equal than others”^[7] 关于对“平等 (等于)”的理解, *Owll* 显然比我们高明多了. *Some Animals are more equal than others* 这才是物理的事实 (*physical reality*). 等乎? 不等乎? *Mir is egal*^[9]

致谢 方程的本意得自黄晓博士的提示.

参考文献

- [1] Frank Wilczek 黄晓译, 曹则贤校. 《物理》, 2005, 34, 93; 2005, 34, 784; 2005, 34, 861 [Frank Wilczek trans Huang R. edit Cao Z X. *Wuli (Physics)*, 2005, 34, 93; 2005, 24, 784; 2005, 34, 861 (in Chinese)]
- [2] Avron J E, Osadchy D, Seiler R. *Physics Today* 2003, August, 38
- [3] Graham Fermelo (Ed). *It must be beautiful: great equations of modern science*. Granta Publications 2002; 中译本, 天地有大美. 涂泓, 吴俊. 上海科技教育出版社, 2006
- [4] 郝柏林. 物理, 2008, 37, 666 [Hao B L. *Wuli (Physics)*, 2008, 37, 666 (in Chinese)]
- [5] Elias M. Stein, Rami Shakarchi. *Fourier Analysis*. Princeton University Press 2003
- [6] Cowan M L, Bruner B D, Huse N et al. *Nature* 2005, 434, 199
- [7] *Owll G. Animal Farm*. 1st World Library 2004

9) 德语短语“对我来说都一样”, 即“俺无所谓”. ——笔者注