编者按　大自然在各种尺度上都会表现出美妙的有序图案（或曰斑图），这些图案隐含其发生过程的秘密，体现了内容与形式的完美统一，因此一直为物理学家所关注. 本刊特别组织了“斑图中的物理”专题，介绍此方向的最新进展. 我们有幸邀请到了中科院物理所几位从事这方面研究的研究员撰稿，这些文章不仅介绍了这几位研究者各自在国际重要杂志上发表的最新研究成果，还对相关内容的研究进行了综述，希望对有意了解斑图物理的读者以及对斑图物理研究在我国的深入开展有所助益.

形学家的世界

曹则贤†

（中国科学院物理研究所　北京　100080）

“They（particles）are，as it were，pure shapes，nothing but shapes；…”

——Ervin Schrödinger in *Nature and Greeks*

“Everything that we can see，everything that we can understand，is related to structure…”

——C. S. Smith in *Search for Structure*

摘　要　　形学家从存在的形状、构型和形貌的角度看世界. 他们用数学的语言描述大自然的结构花样，并从外在的形式出发去理解物理世界最本质的规律.“形”的美学感召是他们科学研究和艺术创造的驱动力.

关键词　　形学家，生长与形式，结构花样，空间铺排，几何与拓朴

The world of a philomorph

CAO Ze-Xian†

（*Institute of Physics*，*Chinese Academy of Sciences*，*Beijing* 100080，*China*）

Abstract　　A philomorph views the world from the perspective of shape，configuration or morphology of existence. He likes to describe the patterns in nature with the language of mathematics，and tries to understand the underlying essence of the world from its morphological characteristics. The aesthetical appeal of the amazing shapes，patterns，figures，structures，morphology and so forth constitutes the driving force for a polymorph devoted to scientific investigation and/or artistic exploration.

Keywords　　philomorph，growth and form，structure and pattern，space filling，geometry and topology

Philomorph 一词是由美国著名冶金学家 C. S. Smith 教授构造的[1]（见图 1）. 1965 年，一群在美国麻省剑桥地区不定期凑在一起从不同学科的角度讨论各种 Morph（形状、构型、形貌）问题的科学家接受其为自身的标签. Philomorph（philo + morph = 热爱 + 外形）是比照 Philosopher（哲学家. 来自 philo + sophos = 热爱 + 智慧，据说是毕达哥拉斯引入的）一词构造的，我将它翻译成形学家，字面上和哲学家也能较好地对应. 哲者，言知言智（《诗 · 大雅》句云：“哲夫成城，哲妇倾城”，可见智慧的力量）；形者，因势作式. 然而，事物的内涵是要表现在外边的，形学家何尝不是哲学家，如 J. Kepler，J. J. Thomson，E. Schödinger，R. Penrose 等人，他们都是物理学家、哲学家，他们也都是出色的形学家. 他们对形式的热情成了他们科学成就的重要驱动力之一. 之所以形状的研究能吸引到这样的科学家的贡献，是因为大自然的外在表现具有美学观感的结构，其中的规则与不规则以一种微妙的关系交织在一起[2]. Smith 教授甚至明确写到：“我们的所见所知皆与结构有关！（篇首语）”那些不同层次交织在一起的、有序与无序的结构不仅有丰富的美学内涵，描述起来需要优雅简单的数学（几何、拓朴、群论、图论、分形等），它们的身影也贯穿于各门严格的科学分支，如晶体学、生命的形态与发育[3,4]、各种形貌的发生、复杂性、混沌，等等. 形不仅仅是事物内涵的表

2007 - 11 - 23 收到

†　Emial：zxcao@iphy. ac. cn

图1　形学家(philomorph)一词的始作者 C. S. Smith 教授

现形式,许多时候它还是决定性的因素. 金刚石之所以是金刚石,仅凭它是由碳原子组成的是不够的,其中的碳原子还应该是严格按照金刚石结构(两个面心立方沿对角线移动 1/4 对角线长度的套构)排列的. 碳原子还有许多别的排列方式,包括六角金刚石(Lonsdalite)、石墨、无定形碳、纳米管、石墨单层、富勒烯,等等,有的文献中还包括焦炭(Charcoal). 形式的不同,决定了它们性质的不同. 要不是 1694 年有人把金刚石烧成二氧化碳,谁会相信金刚石和焦炭是一种物质?

图2　晶体学的建立始于对晶形的研究

物质世界里的结构,微观抑或宏观,是由结构单元间的物理相互作用同充满给定空间的数学要求共同决定的. 与其下的相互作用不同,物体及其组成部分的形状(shape,morph)是一目了然的. 因此,许多科学分支其发展的第一步是根据研究对象的外观加以观察与分类. 物理学,早先中文又叫格物致知,这个"格"字就是登记分类(enumerating, cataloging)的意思. 物质的形状、构成是表观的,因此对形状(包括结构、排列)的观察登记自然就是学科发展的第一步. 中国古代的先哲早就知道形为研究万物之始.《易经》云:"是故形而上者谓之道,形而下者谓之器,化而裁之谓之变."所谓的道是关于形的,所谓的器是具形的,所谓的变更多的表现是形的改变. 理解了这一点,就理解了为什么 17 世纪和 18 世纪欧洲的科学家大多都是博物学家了.

从直观的"形"的角度起步的学科发展之最典型例子是晶体学. 晶体给人最直接的印象是其规则的多面体外形,对矿物晶体的观察导致了对其内在对称性的猜测. 开普勒猜测晶体是球形基元的堆积,惠更斯将之推广到椭球形,而阿羽衣(Haüy)进一步将之推广到多面体[5]. 1669 年,Steno 注意到水晶的晶面之间的夹角是恒定的,与晶面的大小无关,基于此,阿羽衣提出了恒面间角定律. 其后的观察表明,晶体的面间角会择优选取某些值,且有些值不依赖于晶体具体的材料. 这当然暗示晶体可能具有内在的微观的对称性(图2). 其后的发展揭示了晶体可以按对称性分为 7 个晶系,具有 32 种不同的点群.

表观形状的研究带来深刻的知识体系之建立,并不局限于像晶体这样的可触摸(palpable)的对象,就是对抽象的体系它也是一条有效的,如果不是必经的,路径. 举例来说,天体物理的第一步是对行星轨道形状的描述. 从认定天体轨道是圆形的到认识到它们是椭圆的,人类经历了千余年的思想挣扎. 而一旦经开普勒认识到行星的椭圆轨道(开普勒在 1609 年公开了他的第一和第二定律),则其下的物理相互作用力也就呼之欲出了. 1677 年,牛顿在其原理一书中给出了平方反比率形式的引力公式. 然而,牛顿构造万有引力公式时头脑里并不是只有简单的平方反比率,元素锑(Sb, Antimony)的交错的枝晶是牛顿关于万有引力放射状图像的灵感来源[6]. 在炼金术士的口中,它是 Star regulus of antimony,牛顿自己的炼金术实践大多是围绕元素锑的. 而 Regulus 是狮子座 α 星的名字,这颗星光芒四射. 仔细回顾这段历史,有助于大家理解什么是"内涵全在外边",而深度就在表面[7].

大自然中的植物、动物,完美地表现外形与功能的统一,这一点稍作观察我们都能得到这样的认识. 对外观形式的认识在科学研究上的重要性,使得许多物理学大家对其热情有加. 开普勒因其关于行星运动的三定律而名垂青史,实际上他在 1611 年就出版了 De Nive Sexangula(论六角雪花)一书,书中开普勒给出了一个著名的猜想,即六角密堆积是全等

图3　六角密堆积的蜂房是开普勒猜想的生物实现. 六角形的单个蜂房还满足表面积最小,从而最节省蜂蜡

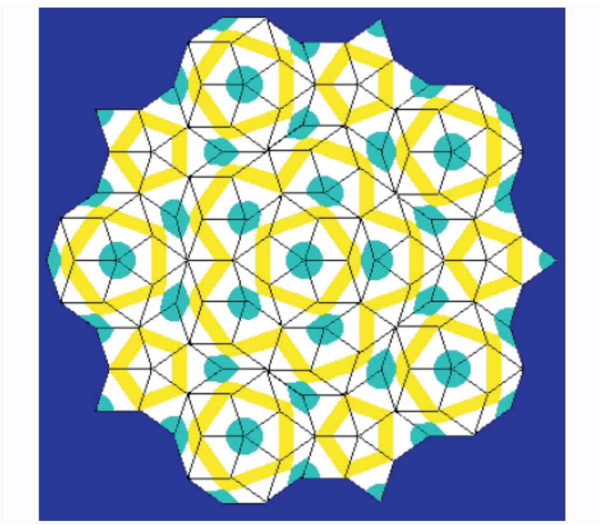

图4　用两组菱形实现的五次对称的平面铺排

图5　通过迭代$(0.75+0.5i)z+z^2$得到的 Julia 集合

的圆盘在平面上的效率最高的堆积方式(见图3. 注意,应把每一个六角形的蜂房看作一个单元). 开普勒猜想是晶体学的一个重要基础,可惜关于晶体的教科书很少愿意着墨. 这个猜想要到1892年才由数学家 Axel Thue 给出了证明. 开普勒还敏锐地注意到了用五边形铺满平面的困难,并为此作了非常深入的努力. 开普勒开启的努力在1974年得到了另一种方式的实现,那一年,R. Penrose 教授用数目和形状都与黄金分割有关的两组形状,分别被命名为 Kite 和 Dart,或者是两组不同数目的、锐角分别为36°和72°的菱形,实现了对平面的具有五次旋转对称性的铺排(图4). 1984年,Shechtman 等人就合成了表现出五次对称衍射斑点的合金,从此开启了准晶研究,并最终促成了1991年对晶体概念的修改[8]! J. J. Thomson,即开尔文爵士,不仅是热力学研究的先驱,他对泡沫形状研究也是情有独钟. 他侄女就曾描述过这位爵士大人在乡间醉心于吹肥皂泡的情景,对于不太深入了解科学的人看来,这位大科学家不过是在表现他的天真. 实际上,开尔文爵士也提出了一个猜想,即14面的截角八面体能充满三维空间,且总的表面积最小. 虽然1993年 Weaire 宣判了开尔文猜想不成立,但是开尔文猜想在泡沫结构研究中依然有重要的意义. 同前三位相比,薛定谔1) 可以说是更彻底的形学家. 薛定谔曾在讲座" Form, not substance, the fundamental concept(形式,而非物质,才是基本的概念)"中提到了一个他父亲留给他的一个狗形铁镇纸[9]. 自从孩提时候第一次见到它,50年了他一直确信这是他的镇纸. 因为什么? 因为形,英语为 form,shape 或 德语的 Gestalt(薛定谔故意这样强调的!). 如果将之熔化后做成别的形状,虽然作为物质,铁是一点没变,但是我(薛定谔)钟爱的纪念品没了!更进一步地,薛定谔认为原子只是形式(或者外形),除了形式以外什么都不是(见篇首语).

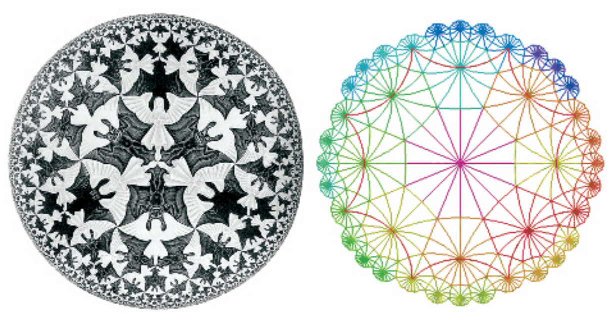

图6　埃舍尔的圆的极限之四(Circle Limit IV(左))与庞加莱圆盘(右)

美的形式愉悦我们的感官,具有引导我们进入

1)　薛定谔为一般人所知是因为他的波动方程奠定了量子力学的基础. 实际上,薛定谔是一位杰出的诗人,且在语言文化方面有很深的造诣——作者注

幻想的诱惑. 基于对自然花样的认识与模仿，人们创造了丰富多彩的形式艺术或结构艺术. 苏格兰的 Portrack House 花园蕴藏丰富而又深刻的数学，它的山包、草坪甚至每一件装饰品，都是某个数学内容的演示，因而被称为数码花园[10]. Julia 集的图像（图5）告诉我们，结构丰富的图像其实可以通过简单的迭代就能得到，其变幻无穷的特性和令人窒息的美，借助计算机图形学成为了一门独特的绘画艺术. 荷兰人 M. C. Escher（埃舍尔）更希望人们称呼他为图形艺术家（graphic artist）而非常规意义上的画家. 他利用复杂的数学原理设计他作品中元素的排布. 他的绘画、雕刻作品构思出人意料，具有震撼的艺术效果，这些震撼效果赖以实现的基础或者他所表达的内容又是深刻的数学或几何学内容. 埃舍尔利用数学设计超现实主义的视觉实在，其涉及的数学内容即使对专业的数学家来说也是挑战. 图 6 是埃舍尔的代表作之一圆的极限之四，按照 D_3 群分布的天使和魔鬼交错着，它们转动着并逐渐变小，直至无限靠近圆周. 这里用到的是庞加莱圆盘的概念. 庞加莱圆盘中的直线定义为顶端同圆周垂直的弧线，在这样的非欧几里得几何下，图中所有的三角形都是全等的直角三角形. 对埃舍尔作品感兴趣的包括数学家、物理学家和晶体学家，而他本人工作室里的球棍模型可能比许多几何学家、晶体学家的要复杂些.

在形学家的眼中，大自然就是一幅神奇的织锦，它在所有的尺度上都透出惊人的美. 人们对形的热情不仅是源于其直觉的美感，更因为对其深层的科学原因的好奇. 从事科学研究的人，在其研究过程中遇到一个新奇、美妙、令人着迷的图案时，都不免会停下来多思考一会儿. 是否各种花样有在广泛的意义上超越其具体环境的本性，那里永恒的、普适的东西是什么？这里涉及的是构型（结构）对力形式的皮实性（robustness）[1)] 问题. 大仙人掌上的刺丛，平整的蜂窝，金属铜（111）面上的原子堆积，二维电子气的维格纳点阵，单轴应力下平面膜的屈曲模式，形成的都是三角晶格（六方密堆积）. 显然，在不同问题中所涉及的相互作用不具有共通性，相同的是物理现象所需的舞台——都是二维平面. 这里我们看到了拓朴性质在'形'的研究中的重要性. 拓朴性质研究超越物理相互作用细节的行为，提供对问题的普适性的洞见，不管是肥皂泡、干涸河床还是砸碎的玻璃，其表现的结构花样都满足欧拉定律 $n_0 - n_1 + n_2 - n_3 = 1$，这里 n_i 表示结构中维数为'i'的几何单元的数目. 这种普适性的存在引导我们利用某个领域

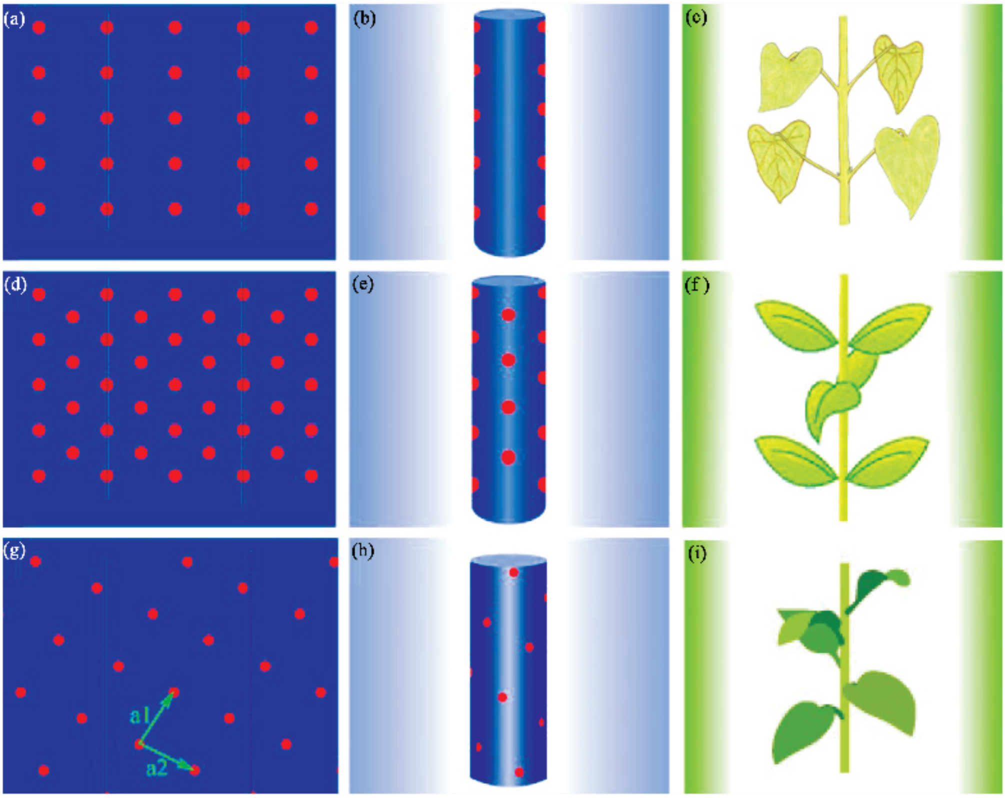

图7　常见叶序的条状空间中的点阵模型（李超荣，宋蕊，曹则贤 2006，详细说明见文献[11]）

已知的知识去解释别处的现象. 例如笔者注意到柱面和带状结构是拓朴等价的，而带状空间中的二维点阵对折粘成柱状，就再现了大自然中在梗上观察到的各种叶序（图 7），包括对生的、十字花状的、黄金角螺旋生长（玉米、向日葵）的，等等[11]. 而相关的二维点阵都可以被平面的屈曲模式表现出来，这为叶序学的能量原理提供了有力的证据[12,13].

图 8　自相似结构的蕨类植物叶子和用自调用子程序产生的模拟效果图

大自然的形式表现是多层次多尺度交织在一起的，曾几何时让人们惊叹之余却无从开始去理解. 近几十年来，随着分形几何、混沌理论、图论、计算机图形学等学科的迅速发展，人们认识到许多看起来复杂的结构其数学结构可能是简单的. 简单性依然是美学感染力的要素. 图 8 中左侧为天然的自相似结构的蕨类植物（Fern）的叶子，右侧为用一个自调用子程序模拟的结构，程序简单到只有寥寥数句.

谈论从“形”的角度研究问题，不能不提到汤普森（D 'Arcy Thompson）的开创性的工作. 1917 年，汤普森出版了他的名著“On Growth and Form”[3]. 在这本书中，汤普森指出所有的“形（form）”的问题都是数学问题，而所有的生长问题都是物理问题. 这一论断的重要意义在于把生命科学里重要的形态发育问题还原为数学和物理问题. 沿着这个思路，人类对各种动植物形态的生长发育有了深入的理解. 比如说，叶序发生的最小弹性能原理在实验上和理论上都得到了证实，详细内容请参阅文献 [13] 以及其中的参考文献.

行文至此，想起我国古代哲学信仰的名句“大道无形”. 道固然无形，而“象”则有形且结构纷呈. 无视眼前按照一定规律构成和演变的“形”，道由何而知之？通过上文的粗浅介绍，笔者希望能给广大读者留下形学家的世界是丰富多彩的印象，能激发起读者对世界之形式美的理解愿望. 笔者从 2005 年起注意到形学家的概念，联想起以前读到的一些埃舍尔的作品，以及非欧几何、分形、Julia 集合、高维几何[14] 等零星的概念，从中获得了不少愉悦. 一直以来就想完成一篇《形学家的世界》的短文作推介，写了两年，未能成稿. 适值《物理》杂志编辑有关斑图中的物理专题，遂匆匆杀青，以为引玉之砖. 作者不揣鄙陋著此短文，亟盼能够吸引更多的学界同仁不弃浅薄，能够于茶余饭后将些心思落在这表观的形（form，shape，morph，configuration，structure，pattern）而上，庶几来年此道不孤.

参考文献

[1] Smith C S. A Search for Structure. the MIT Press，1981

[2] Ball P. the Self-made Tapestry：pattern formation in nature，Oxford University Press，1999

[3] Thompson D 'Arcy . On Growth and Form. Cambridge University Press，1992

[4] Cook T A. the spirals of life. Dover publications，1979

[5] Sunagawa I. Crystals：Growth，Morphology and Perfection. Cambridge University Press，2005

[6] White M. Isaac Newton：the Last Sorcerer. Baror International，Inc.，1997

[7] 宁财神. 电视剧《武林外传》. 第 39 集，2006

[8] 郭可信. 准晶研究. 浙江科学技术出版社，2004 [Kuo K H. Quasiperiodic Crystals. Zhejiang Science & Techology Press，2004（in Chinese）]

[9] Ervin Schrödinger. Nature and the Greeks. Cambridge University Press，1996

[10] John D B. Nature，2007，427：296

[11] 李超荣，纪爱玲，曹则贤. 树干上的叶子.《物理》35 卷 6 期封面，2006

[12] Li C R，Zhang X N，Cao Z X. Science，2005，309：909

[13] Li C R，Ji A L，Cao Z X. Appl. Phys. Lett.，2007，90：164102

[14] Lord E A，Mackay A L，Ranganthan S. New geometries for New materials. Cambridge University Press，2006

1）有人将之译成鲁棒性，笔者对此不敢苟同——笔者注