解说量子纠缠理论*

费少明†
(首都师范大学数学科学学院　北京　100048)

摘　要　量子纠缠态在量子信息处理,如量子隐形传态、量子密集码、量子纠错、量子保密通信、量子计算等过程中起了十分重要的作用.量子纠缠理论主要研究量子态的纠缠刻画、分类及其在量子信息处理中的应用.文章介绍了量子纠缠理论中的一些基本概念和结果,其中包括:量子力学的实在性、局域性的讨论与Bell不等式的联系,Bell不等式与量子态可分性间的关系;纯态和混合态可分性的定义及若干判别准则(包括矩阵正映照方法、部分转置判据、约化判据、重排判据、纠缠见证、协方差判据及局域测不准关系判据);部分纠缠度量的介绍(包括纠缠形成、并发度、相对熵、负度、缠结和纠缠帮助,以及纠缠度量的计算和上下界的估算).

关键词　量子纠缠,可分性,纠缠度

An introduction to the theory of quantum entanglement

FEI　Shao-Ming †
(*School of Mathematical Sciences, Capital Normal University, Beijing* 100048, *China*)

Abstract　Quantum entangled states play very important roles in quantum information processing, such as quantum teleportation, dense coding, error correction, cryptography, and computation. The theory of entanglement mainly concerns the characterization of quantum entanglement and the classification of quantum states, as well as its applications in quantum information processing. We present some basic concepts and results, including: the relationship between locality and reality in quantum mechanics and Bell inequalities, and that between Bell inequalities and the separability of quantum states; the definition of separability for pure and mixed quantum states, and some separability criteria such as the positive map approach, positive partial transpose, reduction criterion, realignment, entanglement witnesses, and the covariance matrix approach and local uncertainty relations; some entanglement measures such as the entanglement of formation, concurrence, relative entropy, negativity, tangle, entanglement of assistance, and their estimation; the change in entanglement when the physical system evolves or undergoes interaction with the environment.

Keywords　quantum entanglement, separability, entanglement measure

1　引言

量子信息与计算是近年来发展很快的研究领域,这方面研究的突破,有可能在计算、信息和通信领域带来重大的变革、广泛的实际应用前景及经济效益.其中量子计算给出了经典计算无法实现的高速运算的可能性,量子信息处理具有经典信息处理所没有的优越性及特殊性,例如,由于未知量子态的不可克隆性,量子密钥的建立将更为可靠和安全.量子信息理论也给出了众多全新的研究课题,如量子计算方法[1,2]、量子克隆[3]、隐形传态(teleportation)[4]、量子纠错[5]、量子保密通信[6]、纠缠交换(swapping)[7]、密集码(dense coding)[8]、远程量子

*　国家自然科学基金(批准号:10875081)资助项目、北京市重点项目(批准号:KZ200810028013)、北京市创新团队项目(批准号:PHR201007107)
2010－7－26 收到

†　Email:feishm@mail.cnu.edu.cn

态制备(remote state preparation)[9]等,这些研究把数学、物理、计算、信息等许多领域紧密地结合了起来.

量子信息处理与经典信息处理的本质区别在于用到了物体的量子力学性质.正如薛定谔认为量子纠缠是量子力学区别于经典力学的本质特性一样[10],量子纠缠是量子信息处理的关键,是许多量子信息处理过程所必不可少的[11].如在量子隐形传态中,利用一对分别处于甲地与乙地的纠缠粒子,可以把一个未知量子态(不是处于该态的粒子本身)从甲地传到乙地.利用两个量子比特间的纠缠,也可以做到只发送一个量子比特,而输送两个经典比特的信息量.

然而人们对量子纠缠的认识还非常有限.在利用量子纠缠进行信息处理中,纠缠态的纠缠程度往往和信息处理的成功有密切关系.没有纠缠(纠缠度为零)的态称为可分态.任意给出一个量子混合态,我们还没有一般可操作的方法,充分必要地判断它纠缠与否.对未知量子混合态,怎样从实验上通过测量一些可观察量的平均值来判断纠缠,所知更少.对于纠缠度的度量,目前也只是对于两个量子比特的情形或者某些特殊的量子态有解析计算公式.一般情形下,纠缠度量有定义,但计算极为困难.

本文主要介绍量子纠缠理论中的一些基本概念和结果,包括量子纠缠与量子力学基本问题的联系,Bell 不等式与量子纠缠的关系,量子态可分的定义,若干判别量子态可分的判据,量子纠缠态的纠缠度的度量、解析计算及上下界估算等.

2 量子力学与 Bell 不等式

2.1 量子比特

一个经典比特只能处于两种不同的状态(0 和 1)之一,一个量子比特的状态则可以是两种不同状态的叠加态,一般可以用一个二维复矢量来描述,比如电子等自旋为 1/2 的自旋态矢、光子的极化状态、两能级原子的状态等.记 H 为二维复矢量空间,$|0\rangle$ 和 $|1\rangle$ 为 H 的基矢,例如,$|1\rangle=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$,$|0\rangle=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$,则量子比特的一般状态可以表为 $|\alpha\rangle=a|0\rangle+b|1\rangle=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$,其中 $a,b\in\mathbb{C}$ 为复系数,满足态矢量 $|\alpha\rangle$ 长度为 1 的归一化条件:$|a|^2+|b|^2=1$.由量子力学可知,对态 $|\alpha\rangle$ 在相应的基矢 $|0\rangle$,$|1\rangle$ 下进行测量,则测得态矢 $|0\rangle$ 的概率为 $|\langle 0|\alpha\rangle|^2=|a|^2$,测得 $|1\rangle$ 的概率为 $|\langle 1|\alpha\rangle|^2=|b|^2$.

两个量子比特的状态 $|\psi\rangle$ 由张量空间 $H\otimes H$ 上的矢量描述,一般可以表为

$$|\psi\rangle=a_{11}|00\rangle+a_{12}|01\rangle+a_{21}|10\rangle+a_{22}|11\rangle\quad, \tag{1}$$

其中 $a_{ij}\in\mathbb{C}$,$\sum_{ij}|a_{ij}|^2=1$,$|ij\rangle\equiv|i\rangle\otimes|j\rangle$,$i,j=1,2$.这时 $|\psi\rangle$ 可以分为两类不同的态矢,一类是直积态:$(a_1|1\rangle+b_1|0\rangle)\otimes(a_2|1\rangle+b_2|0\rangle)$,例如

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle+|01\rangle)=|0\rangle\otimes\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle+|1\rangle)\ . \tag{2}$$

这类态称为可分态,表示处于该态的两个量子比特间没有量子纠缠.物理上对第一个量子比特的测量,其结果不影响对第二个比特的测量结果.对态(2)(即(2)式表示的态)中第一个比特的测量,测得 $|0\rangle$ 的概率为 1,对第二个比特的测量,测得 $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$ 的概率分别为 1/2.另一类为纠缠态,写不成直积形式的 $|\psi\rangle$ 称为纠缠态,例如

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle+|11\rangle\quad. \tag{3}$$

处于态(3)(即(3)式表示的态)的两个量子比特称为 EPR(Einstein,Podolsky 和 Rosen 的缩写)对.EPR 对中的两个比特,不论空间上相隔多远,对第一比特的测量,会“瞬间”改变第二比特的状态,从而对第二比特的测量结果依赖于之前对第一比特的测量结果,就算两次测量的时间间隔很短,短到光也不能在该时间间隔内从第一比特所处的位置传到另一比特处.物理上,如果对一个粒子的测量结果会影响到对另一粒子的测量结果,则称这两粒子处在纠缠态,纠缠反映了粒子间的一种量子关联.

2.2 量子力学与实在性、局域性

1935 年,爱因斯坦等三人发表文章[12],质疑量子力学关于物理实在性的描述是否完备.他们认为,一个“好”的物理理论,应该既正确且完备.这里物理实在性是指,在没有扰动物理系统的情况下,可以百分之百地指出某个物理量的值,而不是上面关于测量的概率解释.“没有扰动物理系统”是指在上面对态(3)测量时,两个量子比特的间隔是类空的,测量是局域的.按照完备性的要求,测量得到特定结果的概率,应该可以从某个未知的变量推导出来,这就是所谓的隐变量(local hidden variable)模型.

Bell 设计了一个实验来验证隐变量模型[13].有两位观察者,分别对相隔“很远”的物体甲和物体乙测量 N 个可观察量,每个可观察量取 M 个不同的

值. 设 $p(a, b|x, y)$ 为对物体甲测变量 x 得值 a，对物体乙测变量 y 得值 b 的概率，按照隐变量理论，应该有 $p(a, b|x, y)=\int_\Lambda q(a|x,\lambda)q'(b|y,\lambda)\mu(\mathrm{d}\lambda)$，其中 λ 是隐变量，q，q' 分别为关于变量 x 取值为 a 及变量 y 取值为 b 的概率分布，Λ 为概率空间，$\mu(\mathrm{d}\lambda)$ 为概率空间测度. 如果隐变量理论成立，则应该有形式为 $|\sum_{a,b,x,y} T^{a;b}_{x;y}|\,p(a, b|x, y)\leq c$ 的不等式，其中 c 为一常数. 然而 Bell 定理证明了，隐变量模型不可能给出量子力学所能描述的结果.

对于离散有限维体系，可观察量为厄米矩阵. 一个厄米矩阵 O 有实的本征值 λ_i，对应的本征矢量 $|\boldsymbol{v}_i\rangle$ 构成一组完备的基矢，任何一个态矢量 $|\psi\rangle$ 都可由 $|\boldsymbol{v}_i\rangle$ 展开. 对态 $|\psi\rangle$ 测量 O，得到 λ_i 的概率为 $|\psi\rangle$ 在基矢量 $|\boldsymbol{v}_i\rangle$ 下展开的相应展开系数的绝对值平方. 多次测量后得到 O 的平均值 $\langle O\rangle=\langle\psi|O|\psi\rangle=\mathrm{Tr}(|\psi\rangle\langle\psi|O)=\mathrm{Tr}(\rho O)$，其中 Tr 表示求迹，$\rho=|\psi\rangle\langle\psi|$ 为对应于纯态 $|\psi\rangle$ 的密度矩阵，$\langle\psi|=(|\psi\rangle)^\dagger$，† 表示矩阵的转置加共轭. 如果 $|\psi\rangle$ 是个两体态矢：$|\psi\rangle\in H\otimes H$，而可观察量 O 可以写成 $A\otimes B$ 的形式，即对两个物体分别测量 A 和 B，则当 $|\psi\rangle$ 是可分态时：$|\psi\rangle=|\phi_1\rangle\otimes|\phi_2\rangle$，平均值为 $\langle O\rangle=\langle\psi|A\otimes B|\psi\rangle\equiv\langle\psi|AB|\psi\rangle=\langle\phi_1|A|\phi_1\rangle\langle\phi_2|B|\phi_2\rangle$，易见此时总的平均值是 A 的平均值和 B 的平均值的简单乘积.

Clauser－Horne－Shimony－Holt(CHSH) 对维数都为 2 的两体情形，构造了一个有名的 CHSH 不等式[14]：对第一个物体测量 A_1，A_2，对第二个物体测量 B_1，B_2，它们的取值都为 +1 或 −1，如果隐变量模型成立，则容易验证

$$|\langle A_1\otimes B_1+A_1\otimes B_2+A_2\otimes B_1-A_2\otimes B_2\rangle|\leq 2, \tag{4}$$

其中 $A_1\otimes B_1+A_1\otimes B_2+A_2\otimes B_1-A_2\otimes B_2\equiv\mathscr{B}$ 称为 Bell 算子.

实际上(4)式只在态为可分时成立. 当态有纠缠态时，总能找到合适的可观察量 A_1，A_2，B_1 和 B_2，使得不等式(4)被违反. 例如取 $|\psi\rangle=(|01\rangle-|10\rangle)/\sqrt{2}$，$A_1=\sigma_1$，$A_2=\sigma_3$，$B_1=(\sigma_1+\sigma_3)/\sqrt{2}$，$B_2=(\sigma_1-\sigma_3)/\sqrt{2}$，$\sigma_1$，$\sigma_3$ 为泡利矩阵，则可得 Bell 算子 $\mathscr{B}$ 的平均值为 $2\sqrt{2}$，比 2 大.

这种在隐变量模型下成立，而可以被量子力学违背的 Bell 类的不等式，已经有很多构造. 比如对三量子比特情形，有 Mermin 不等式[15]：

$$|\langle A_2B_1C_1\rangle+\langle A_1B_2C_1\rangle+\langle A_1B_1C_2\rangle-\langle A_2B_2C_2\rangle|\leq 2, \tag{5}$$

其中 A_i，B_i，C_i，$i=1,2$，分别对应三个量子比特的可观察量. 可以证明(5)式可以被量子力学纠缠态所违背，最大违背值为 4.

Bell 类不等式的违反在实验上也得到了进一步的证实[16]. 为了在证实局域实在性的不可能时，避免实验误差及对实验中具体态的依赖所引起的不确定性，人们还试图设计出所谓无漏洞(loophole-free)的 Bell 不等式[17].

2.3 Bell 不等式及可分性

从前面我们看到，Bell 不等式与量子纠缠有密切的联系. 从实验上判断两个粒子是否有量子纠缠，需要通过测量一些可观察量的平均值来分析，Bell 不等式提供了实验上判断粒子是否处于纠缠态的方法. 事实上可以证明，对于两比特量子态(1)，不等式(4)成立的充分必要条件是该量子态是可分的. 对一般高维及多体情形，量子态的可分性有类似定义. 设 H 为 N 维复矢量空间，其基矢量为 $|i\rangle$，$i=1,\cdots,N$. 一个多体量子态是张量空间 $|\psi\rangle\in H\otimes H\otimes\cdots\otimes H$ 上的矢量，

$$|\psi\rangle=\sum_{i,j\cdots k=1}^{N}a_{ij\cdots k}\,|ij\cdots k\rangle,a_{ij\cdots k}\in\mathbb{C}\quad. \tag{6}$$

如果 $|\psi\rangle$ 可以表为直积形式：$(\sum_{i=1}^N a_i|i\rangle)\otimes(\sum_{j=1}^N b_j|j\rangle)\otimes\cdots\otimes(\sum_{k=1}^N c_k|k\rangle)$，则称 $|\psi\rangle$ 是可分的，也称完全可分，这时所有粒子间没有任何纠缠，对任一单体的测量结果不影响对其他粒子的测量结果.

人们已经构造了许多 Bell 类不等式[18]，来判断各种情形下的可分问题，但这些不等式大都是态可分时需要满足的必要条件，往往只对一些特殊态才是充分必要条件. 怎样构造由局域可观察量构成的、类似(4)式中的 Bell 算子，以便充分必要地判断一个多粒子体系是否可分，一直是未解决的问题. 不等式(4)给出了两量子比特态可分的充分必要条件，文献[19]中给出了三量子比特态可分的充分必要条件. 是否总是存在一组完备的 Bell 不等式，可以充分必要地判断任一量子态的可分性？Gisin 给出了一个重要的定理：对于两体纠缠纯态，总存在 Bell 不等式，被这个两体纠缠态违反. 文献[20]给出了一组多体情形的 Bell 不等式，它们可以充分必要地判断任意多体量子纯态的可分性.

3 量子态的可分性

由于外界环境的影响，所研究的对象往往成为与一个大系统有相互作用的子系统. 一个子系统的

量子状态一般是混合态，由密度矩阵描述. 对该子系统测量算子 O 的平均值为 $\langle O\rangle = \mathrm{Tr}(\rho O)$，其中密度矩阵 ρ 一般可以表为

$$\rho=\sum p_i\,|\psi_i\rangle\langle\psi_i\,|,0<p_i\leq 1,\sum p_i=1, \tag{7}$$

其中 $|\psi_i\rangle$ 是归一化的纯态矢量. 由上面表示可知，ρ 是迹为 1（$\mathrm{Tr}(\rho)=1$）的厄米的半正定矩阵. 但是对于给定的迹为 1 的厄米半正定矩阵，(7)式右边的展开形式不是唯一的，事实上有无穷多种表示.

如果混合态 ρ 存在一种展开形式，则(7)式中的 $|\psi_i\rangle$ 都是可分的，则称 ρ 是可分的，否则称 ρ 为纠缠态. 等价地，可分态也可以定义为

$$\begin{aligned}\rho&=\sum_i p_i\rho_i^1\otimes\cdots\otimes\rho_i^n\\&=\sum_i p_i\,|\psi_i^1\rangle\langle\psi_i^1|\otimes\cdots\otimes|\psi_i^n\rangle\langle\psi_i^n\,|,\end{aligned}$$

其中 $\rho_i^j=|\psi_i^j\rangle\langle\psi_i^j|$ 是对应第 j 个粒子的密度矩阵. 对于一个给定的密度矩阵 ρ，确定它是可分态还是纠缠态往往是一件十分困难的事情，目前还没有一般的可分性判据，下面我们介绍部分已有的判据.

3.1 正映照与可分性

把任意正的矩阵（本征值都大于或等于零）M 映照成正的矩阵的映照 Λ 称为正映照，即 $M\geq 0\Rightarrow\Lambda(M)\geqslant 0$. 设两粒子 A，B 处于混合态 $\rho\in H_A\otimes H_B$，如果只对 B 粒子空间作正映照 Λ，而对 A 粒子空间作恒等变换 I，则 $(I\otimes\Lambda)\rho$ 有可能不是正的，这时称 Λ 为不完全正映照. 使得 $(I\otimes\Lambda)\rho$ 总是正的，Λ 称为完全正映照.

正映照与量子态的可分性有密切联系，如果 ρ 是可分态，则 $(I\otimes\Lambda)\rho$ 一定是正的，因为 $(I\otimes\Lambda)$ 总把每一项直积态 $\rho_A\otimes\rho_B$ 映成正的，$(I\otimes\Lambda)\rho_A\otimes\rho_B=\rho_A\otimes\Lambda(\rho_B)\geq 0$. 若 ρ 不可分，则存在正映射 Λ，使 $(I\otimes\Lambda)\rho$ 不是正的，因此不是完全正映照的正映照可以用来识别纠缠态. 一个量子混合态 ρ 可分的充分必要条件是它对所有的正映照 Λ，$(I\otimes\Lambda)\rho$ 都是正的[21].

要找全对高维矩阵的所有正映照，是十分困难的事情. 一个正映照的例子是矩阵的转置 T，即 $M\geq 0\Rightarrow M^T\geq 0$，可以证明它不是完全正映照. $\Lambda(A)\rightarrow(\mathrm{Tr}A)I-A$ 也是正映照，但不是完全正映照. 对应这两个映照，我们有下面关于态可分的必要判据.

(1) PPT 判据：PPT (positive partial transpose) 判据又称部分转置(半)正定判据，或 Peres-Horodecki 判据[22]. 两体混态 $\rho\in H_A\otimes H_B$ 的矩阵元在矢量空间 H_A 和 H_B 的基矢下可以表示为 $\rho_{m\mu,n\nu}=\langle \mathrm{m}|\otimes\langle\mu|\rho|\mathrm{n}\rangle\otimes|\nu\rangle$，其中指标 m，n(μ，ν) 对应空间 H_A(H_B)，$m\mu$($n\nu$) 为行(列)指标. 如果正映照 T 只作用在 H_A 空间上，即 ρ 关于第一个子系统作转置，称为矩阵 ρ 的部分转置，我们有 $\rho^{T_A}_{m\mu,n\nu}=\rho_{n\mu,m\nu}$. 类似地对第二个子系统的部分转置给出 $\rho^{T_B}_{m\mu,n\nu}=\rho_{m\nu,n\mu}$. 根据正映照性质，我们有：若 ρ 可分，则它的部分转置 $\rho^{T_A}\geq 0$. 这里因为 $\rho^{T_B}=(\rho^T)^{T_A}=(\rho^{T_A})^T$，$\rho^{T_A}\geq 0$ 与 $\rho^{T_B}\geq 0$ 等价. 推广到多体情形，有：可分态关于它的任一子系统的部分转置矩阵都是半正定矩阵.

部分转置矩阵为半正定的态称为 PPT 态，可分态必定是 PPT 态，但是 PPT 态不一定可分. 文献[23]证明了当 $H_A\otimes H_B$ 的维数为 2×2 或 2×3（第一个空间维数是 2，第二个空间维数是 2 或 3）时，PPT 判据充分必要.

(2) 约化(reduction)判据：若 ρ 可分，则 $\rho_A\otimes I-\rho\geq 0$，$I\otimes\rho_B-\rho\geq 0$，其中 $\rho_A=\mathrm{Tr}_B(\rho)$，$\rho_B=\mathrm{Tr}_A(\rho)$ 为部分求迹得到的约化密度矩阵. 该判据不比 PPT 判据强[24]，但它可以用来判断一个纠缠态能否提纯（见 4.3 节）：不满足约化判据的纠缠态一定是可提纯的.

3.2 矩阵重排(realignment)判据

矩阵重排是另外一个很重要的判据，与 PPT 判据有很强的互补性. 与一般正映照不同，矩阵重排是将密度矩阵按照其定义的相应空间分块，把每一块中的矩阵元排成一个新矩阵的行，再计算重新排列的新矩阵的模.

设 $A=(a_{ij})$ 是 $m\times n$ 矩阵，定义 $\mathrm{Vec}(A)$ 是由矩阵元 a_{ij} 排成的列矢量，$\mathrm{Vec}(A)=(a_{11},\cdots,a_{m1},a_{12},\cdots,a_{m2},\cdots,a_{1n},\cdots,a_{mn})^T$. 设 $Z=(Z_{ij})$ 是 $m\times m$ 分块矩阵，每一块 Z_{ij} 都是 $n\times n$ 矩阵，重排矩阵 $\widetilde{\mathrm{Z}}$ 是 $m^2\times n^2$ 矩阵，定义为：$\widetilde{\mathrm{Z}}\equiv(\mathrm{Vec}(Z_{11})\cdots\mathrm{Vec}(Z_{m1})\cdots\mathrm{Vec}(Z_{1m})\cdots\mathrm{Vec}(Z_{mm}))^T$. 重排判据说，如果 $m\times n$ 的量子态 ρ 可分，则 ρ 的重排矩阵 $\widetilde{\rho}$ 的 KyFan 模(奇异值和)满足 $\|\widetilde{\rho}\|\leq 1$[25].

3.3 纠缠见证(witness)

上面讨论的可分性判据是建立在量子态为已知的基础上的，即密度矩阵已经给定. 对于未知的量子态，需要通过对一些力学量的实验测量来判断其可分性. Bell 不等式可以充分必要地判断纯态的可分性，但是对混合态的可分性的判断却不是充分

的[20]. 文献[26]中给出了通过实验测量判断 2×2(两量子比特)混态可分的充分必要的判据. 对于一般高维多体混态,只有一些可分的必要判据.

纠缠见证是一个力学量算子 O,对于可分态 ρ_s,其平均值满足 $\mathrm{Tr}(O\rho_s)\geq 0$,且至少存在某个纠缠态 ρ_e,使得 $\mathrm{Tr}(O\rho_e)<0$[21, 27]. 直观上,超曲面 $\mathrm{Tr}(O\rho)<0$ 把整个态空间划分为两部分:一部分包含了所有可分态及部分纠缠态;另一部分则只有纠缠态. 对这部分纠缠态,O 的平均值为负值,可以被这个纠缠见证所识别. 可知这个超曲面越是靠近可分态集合的边界,能判别的纠缠态就越多.

3.4 其他可分判据

关于可分的判据还有很多,例如控制(majorization)判据[28],推广的重排判据[29],值域(range)判据[30],低秩密度矩阵的充分必要可分判据[31],由 PPT 态的正则形式得到的判据[32],从密度矩阵的 Bloch 表示得到的判据[33, 34],从量子力学测不准关系得到的比重排判据更强的判据[35],协变矩阵判据[36—39],关联矩阵判据[41],利用量子态在局部过滤(local fltering)变换下不改变其可分性的性质,把量子态先在局部过滤变换下化成标准形[42—44],再应用关联矩阵判据,可以判别更多纠缠态. 下面简单介绍两体量子态的协方差矩阵判据和局域测不准关系判据.

3.4.1 两体协方差矩阵判据

考虑一个维数分别为 d 的两体系统 $H_A\otimes H_B$,设 $\{M_k\}$ 为系统的一组可观测量,关于态 ρ 的协方差矩阵 γ 的第 i 行第 j 列元素的定义为

$$\gamma_{ij}(\rho,\{M_k\})=\frac{\langle M_iM_j\rangle+\langle M_jM_i\rangle}{2}-\langle M_i\rangle\langle M_j\rangle, \tag{8}$$

其中 $\langle M\rangle=\mathrm{Tr}(\rho M)$ 表示可观测量 M 在量子态 ρ 上的平均值.

设 A_k 和 B_k 分别为 d^2 个作用在 H_A 和 H_B 上的不可交换的可观测量,它们组成可观测量空间的一组正交规一基,即 $\mathrm{Tr}(A_kA_l)=\delta_{k,l}$,$\mathrm{Tr}(B_kB_l)=\delta_{k,l}$,称 A_k 和 B_k 为一组局域正交的可观测量(LOOs). 令可观测量集合 $\{M_k\}=\{A_k\otimes I, I\otimes B_k\}$,则 γ 有分块矩阵的形式[37]:$\gamma=\begin{pmatrix}A & C\\ C^T & B\end{pmatrix}$,其中 $A=\gamma(\rho_A,\{A_k\})$,$B=\gamma(\rho_B,\{B_k\})$,$C_{ij}=\langle A_i\otimes B_j\rangle_\rho-\langle A_i\rangle\rho_A\langle B_j\rangle\rho_B$,$\rho_A$ 和 ρ_B 为 ρ 的约化密度矩阵. 协方差矩阵判据说,如果 ρ 可分,则矩阵 C 同时满足下面的不等式:

$$\|C\|\leq\frac{(1-\mathrm{Tr}(\rho_A^2))+(1-\mathrm{Tr}(\rho_B^2))}{2},$$

$$\|C\|^2\leq(1-\mathrm{Tr}(\rho_A^2))(1-\mathrm{Tr}(\rho_B^2)), \tag{9}$$

其中 $\|C\|$ 表示矩阵 C 的模,即 C 的奇异值求和. 该判据可以推广到多体系统[45].

3.4.2 两体局域测不准关系判据

文献[35]将局域测不准关系用到了可分性问题,文献[46]进一步证明了对于一组 LOOs,A_k 和 B_k,一个两体可分态 ρ 满足,

$$1-\sum_{k=1}^{d^2}\langle A_k\otimes B_k\rangle-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{d^2}\langle A_k\otimes I+I\otimes B_k\rangle^2\geq 0. \tag{10}$$

测不准关系判据的严格强于重排判据,因此可以更有效地鉴别 PPT 纠缠态.

4 量子纠缠的度量

我们说一个可分态的纠缠度为零,对于非可分态,则需要一个合适的量来度量其纠缠度的大小. 基于不同的考虑,纠缠度量有很多种,它们都必须满足:对可分态,其纠缠度为零,在局部幺正变换下,纠缠度不变,而在一般局部操作下,纠缠度不增加. 下面介绍几种主要的纠缠度量.

4.1 形成纠缠度

形成纠缠度(entanglement of formation),也叫纠缠形成,是对两体系统定义的[47]. 对于两体纯态,$|\psi\rangle=\sum_{ij}a_{ij}|ij\rangle\in H\otimes H$,其纠缠形成为 $E(|\psi\rangle)=-\mathrm{Tr}(\rho_1\log_2\rho_1)=-\mathrm{Tr}(\rho_2\log_2\rho_2)$,其中 $\rho_1=AA^\dagger=\mathrm{Tr}_2|\psi\rangle\langle\psi|$,$\rho_2=(A^\dagger A)^*=\mathrm{Tr}_1|\psi\rangle\langle\psi|$,它们为纯态对应的密度矩阵 $|\psi\rangle\langle\psi|$ 的约化密度矩阵,矩阵 $(A)_{ij}=a_{ij}$.

对于混合态,$\rho=\sum_i p_i|\psi_i\rangle\langle\psi_i|$,其纠缠形成为

$$E(\rho)=\inf\sum_i p_iE(|\psi_i\rangle), \tag{11}$$

其中 inf 表示对所有可能的 ρ 的纯态分解取极小. 由于对给定的密度矩阵,其纯态分解有无穷多种,计算 $E(\rho)$ 非常困难. 当两体的空间 H 维数都是 2 时,即一对量子比特情形,有 $E(|\psi\rangle)=h(1+\frac{\sqrt{1-C^2}}{2})$,其中 $h(x)=-x\log_2x-(1-x)\log_2(1-x)$,$C$ 称为并发度(concurrence). 两比特量子纯态(1)式的并发度为

$$C(|\psi\rangle)=2|a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}|. \tag{12}$$

易知纠缠形成是并发度的单调函数，故并发度本身也是一种纠缠度量．混合态的并发度可以和(11)式类似地定义：

$$C(\rho)=\inf\sum_i p_i C(|\psi_i\rangle) \quad . \tag{13}$$

计算可得[48]

$$C(\rho)=\max\{0,\lambda_1-\lambda_2-\lambda_3-\lambda_4\} \quad , \tag{14}$$

其中 $\lambda_1\geq\lambda_2\geq\lambda_3\geq\lambda_4$ 为矩阵$\sqrt{\rho\tilde{\rho}}$ 的本征值，$\tilde{\rho}=(\sigma_y\otimes\sigma_y)\rho^*(\sigma_y\otimes\sigma_y)$，$\sigma_y$ 是泡利矩阵．利用纠缠形成与并发度间的单调关系，可得两量子比特混合态的纠缠形成 $E(\rho)=h(C(\rho))$．

对于高维情形，$E(\rho)$ 尚无一般的公式．文献[49]给出了 Werner 态的纠缠形成的计算，文献[50]给出了一类特殊高维量子态(Istropic 态)的纠缠形成的计算，文献[51]也给出了一类特殊高维量子态的纠缠形成的计算．

虽然(11)式右边的极小很难计算，但是我们仍然可以估算它的下界，文献[52]给出了 $E(\rho)$的一个下界：对于 $m\times n(m\leq n)$的两体混态 ρ，其纠缠形成满足

$$E(\rho)\geq\begin{cases}0\,, & \Lambda=1\,,\\ h(\gamma(\Lambda))+(1-\gamma(\Lambda))\log_2(m-1), & \Lambda\in\left[1,\dfrac{4(m-1)}{m}\right],\\ \dfrac{\log_2(m-1)}{m-2}(\Lambda-m)+\log_2 m\,, & \Lambda\in\left[\dfrac{4(m-1)}{m},m\right],\end{cases} \tag{15}$$

其中 $\gamma(\Lambda)=\dfrac{1}{m^2}(\sqrt{\Lambda}+\sqrt{(m-1)(m-\Lambda)})^2$，$h$ 是前面定义的二次熵函数，$\Lambda=\max(\|\rho^{T_A}\|,\|\tilde{\rho}\|)$取 ρ 的部分转置矩阵及重排矩阵的模的最大值．这个下界对纠缠形成可以精确计算的 Werner 态及 isotropic 态，正好是精确值．

4.2 并发度

(12)式表示的并发度是对双量子比特态定义的，但可以推广到高维情形：对 $N\times N$ 维的两体纯态$|\psi\rangle$，其并发度为[53]

$$\begin{aligned}C(|\psi\rangle)&=\sqrt{2(1-\mathrm{Tr}\rho_A^2)}\\&=\sqrt{\frac{N}{2(N-1)}\sum_{i,j,k,m=1}^{N}|a_{ik}a_{jm}-a_{im}a_{jk}|^2}\quad .\end{aligned} \tag{16}$$

当维数 $N=2$ 时，由上式可给出(12)式．

高维混合态的并发度同样地可由(13)式定义，除了对一些特殊量子态(2 量子比特态，isotropic 态，Werner 态)，$C(\rho)$ 也没有一般的解析计算公式．文献[54]给出了一个解析下界估计，对于 $m\times n$ $(m\leq n)$的两体混态 ρ，

$$C(\rho)\geq\sqrt{\frac{2}{m(m-1)}}(\max(\|\rho^{T_A}\|,\|\tilde{\rho}\|)-1)\,. \tag{17}$$

这个下界对并发度可以精确计算的 Werner 态及 isotropic态，也正好是精确值．

从上面可见，下界和部分转置及重排这两个可分性判据有关．实际上一个可分性判据，可以对应于一个纠缠度的下界．对应混合态并发度的下界估算，已经有更多的结果，文献[55]分别从测不准关系判据、协方差矩阵判据、关联矩阵判据得到了并发度的下界；文献[56]讨论了多体并发度的下界；文献[57]给出了实验上可测的并发度的上下界．

4.3 相对熵纠缠度及其他度量

满足纠缠度量基本要求的纠缠度量可以定义很多．一个高维多体量子态包含很多参数，而纠缠度只是描述量子态某种特殊性质中的一个参量，即态在局域幺正变换下的不变量．根据出发点不同，可以定义不同的纠缠度量．

相对熵纠缠度(relative entropy)直观上是纠缠态 ρ 与其"最近"的可分态 σ 之间的"距离"[58]，

$$E_R(\rho)=\inf_{\sigma\in S}\mathrm{Tr}[\rho(\log\rho-\log\sigma)] \quad .$$

它的几何意义很明确，对任意多体态都适用，但由于可分态这个集合的"边界"不清楚，这个"距离"很难计算．

负度(negativity)是根据纠缠态的密度矩阵在部分转置后有负的本征值这一事实定义的，两体混合态 ρ_{AB} 的负度为[59]

$$N(\rho_{AB})=\frac{\|\rho_{AB}^{T_A}\|-1}{2} \quad .$$

如果 ρ_{AB} 可分，则其部分转置矩阵 $\rho_{AB}^{T_A}\geq0$，模 $\|\rho_{AB}^{T_A}\|$ 为 1，$N(\rho_{AB})=0$．$\rho_{AB}^{T_A}$ 的本征值负得越多，ρ_{AB} 的负度越大．因为负度只涉及矩阵奇异值，计算起来比较容易．

缠结(tangle)也是一种纠缠的度量，态 $\rho=\sum_i p_i|\psi_i\rangle\langle\psi_i|$ 的缠结定义为

$$\tau(\rho)=\inf\sum_i p_i C^2(|\psi_i\rangle)\,.$$

$\tau(\rho)$与并发度 $C(\rho)$有些相似，在纯态时，两者等价，$\tau(|\psi\rangle)=C^2(|\psi\rangle)$．三体情形有三体缠结(three-tangle)或剩余缠结(residual tangle)[60]．

纠缠帮助(entanglement of assistance)E_a 是在三方共享一个三体量子纯态$|\psi_{ABC}\rangle$时，C 方对粒子 C 作操作，使得 A 和 B 粒子间的纠缠达到所能达到的

最大值[61]，即

$$E_{\mathrm{a}}(|\psi\rangle_{\mathrm{ABC}}) \equiv E_{\mathrm{a}}(\rho_{\mathrm{AB}}) \equiv \max \sum_i p_i C(|\phi_i\rangle_{AB})$$

其中 ρ_{AB} 是 $|\psi_{\mathrm{ABC}}\rangle$ 对 C 部分求迹得到的约化密度矩阵，极大取遍 $\rho_{\mathrm{AB}}=\sum_i p_i|\phi_i\rangle_{\mathrm{AB}}\langle\phi_i|$ 的所有纯态分解. 纠缠帮助的一般解析计算也是非常困难的，文献[62]给出了它的一个下界估计. 类似地，也可以定义纠缠帮助对应的缠结 $\tau_{\mathrm{a}}(|\Psi\rangle_{\mathrm{ABC}})=\max\{p_i,\psi_i\}\sum_i p_i[C(|\psi_i\rangle)]^2$，它满足所谓的 monogamy 关系[62].

4.4 纠缠的演化

由于物理体系随时间的演化，系统的纠缠度也会随之变化. 演化分两种情况，一种是由物理体系哈密顿量决定的演化，物理态随时间的变化可由初始态及量子力学演化方程计算得到，故任一时刻体系的纠缠度（比如并发度），可以由前面定义的公式计算. 这时可以有所谓的纠缠突然死亡（entanglement sudden death）及纠缠突然产生（entanglement sudden birth）的现象[63]，可以在实验上观察到[64]. 纠缠态在有限时间内演化为可分态及可分态在某个时刻变成纠缠态这类现象的发生，与具体物理体系的演化方式及初始条件有关. 对于两量子比特情形，从并发度的公式(14)可以看出，数学上当 $\lambda_1-\lambda_2-\lambda_3-\lambda_4<0$ 时，体系纠缠度保持为零；当演化到 $\lambda_1-\lambda_2-\lambda_3-\lambda_4>0$ 时，纠缠就“突然”产生了.

纠缠的另一种演化是体系与外界环境发生相互作用而导致态变化，从而导致纠缠度的变化. 考虑两粒子态 ρ_{AB}，如果 B 粒子与环境发生相互作用，则态一般演化为：$\rho'_{\mathrm{AB}}=(I\otimes\$)\rho_{\mathrm{AB}}$，其中 $\$$ 作用在 B 空间上，表示 B 粒子与环境的相互作用，这种作用一般可由 Kraus 算子 $\{M_i\}$ 来描述，$\rho\Rightarrow\rho'=\sum_i M_i\rho M_i^{\dagger}$，$M_i$ 满足 $\sum_i M_i^{\dagger}M_i=I$. 文献[65]给出了两量子比特系统与环境相互作用下，并发度的演化，给出了演化前后纠缠度间的一个简洁关系：$C[\rho']=C[|\chi\rangle]C[\rho_{\$}]$，其中 $\rho_{\$}=(1\otimes\$)|\phi\rangle\langle\phi|$ 是最大纠缠（EPR）态 $|\phi\rangle$（用(3)式表示）经过通道 $\$$ 后的演化，即末态的并发度是初态的并发度与 EPR 对演化后的并发度的乘积. 文献[66]把上面结果推广到了高维两体情形. 文献[67]讨论了并发度下界的演化问题.

与环境的相互作用会导致退相干，使一对原本处于最大纠缠纯态的粒子，变成处于非最大纠缠的混合态，从而影响利用纠缠态进行的量子信息处理. 为了克服这种由环境引起的不可避免的退相干，人们提出了纠缠提纯的方法[68]. 假定甲乙两人拥有多对处于混合态 ρ 的粒子，$\rho_{\mathrm{A}_1,\mathrm{B}_1}$，$\rho_{\mathrm{A}_2,\mathrm{B}_2}$，. . . ，其中粒子 A_1，A_2，…在甲手里，粒子 B_1，B_2，…在乙手里，甲乙双方分别对他们手中的粒子进行操作，使得某一对粒子的状态变为 ρ'，而 ρ' 的纠缠度比 ρ 的大. 再通过获得多对处于 ρ' 态的粒子，提纯得到纠缠度比 ρ' 更大的 ρ''，如此循环下去，最后渐进地得到最大纠缠态. 但是并非所有纠缠态都是可以提纯的，不可提纯的纠缠态称为约束纠缠（bound entangled）态. 文献[69]证明了所有部分转置正定的(PPT)纠缠态都是约束纠缠态. 怎样判断一个纠缠态是否可以提纯，是一个尚未解决的问题. 可以证明，凡是违反约化判据的纠缠态，都是可以提纯的. 文献[20，70]也给出了可提纯的理论和实验的充分判据，文献[71]则讨论了可提纯性的演化问题. 另外是否存在部分转置非正定的约束纠缠态，答案也还是未知的.

5 结束语

由于量子纠缠在量子力学基本问题、量子计算、量子信息处理等方面起的关键作用，量子纠缠理论的研究有着重要的意义. 我们已经简单介绍了量子纠缠理论中量子态的可分性、纠缠度量及其估算. 量子纠缠理论中关于量子态在局部幺正变换[72]、LOCC[73]、SLOCC[74]等局部操作加经典通信下的等价分类问题，以及量子纠缠理论在量子计算和信息处理中的应用研究，因篇幅问题，没有介绍. 另外这里讨论的是离散有限维的情形，对连续变量情形的量子纠缠问题，也有相应研究.

参考文献

[1] Nielsen M A，Chuang I L. Quantum Computation and Quantum Information. Cambridge：Cambridge University Press，2000

[2] See，for example，Di Vincenzo D P. Science，1995，270：255

[3] Wootters W K. Zurek W H. Nature，1982，299：802；Barnum H，Caves C M，Fuchs C A *et al*. Phys. Rev. Lett.，1996，76：2818；Gisin N，Massar S. Phys. Rev. Lett.，1997，79：2153；Bruß D，Ekert A K，Macchiavello C. Phys. Rev. Lett.，1998，81：2598；Bužek V，Hillery M. Phys. Rev. Lett.，1998，81：5003；Werner R F. Phys. Rev. A，1998，58：1827；Albeverio S，Fei S M. Euro. Phys. J. B，2000，14：669

[4] Bennett C H，Brassard G，Crépeau C *et al*. Phys. Rev. Lett.，1993，70：1895；Albeberio S，Fei S M. Phys. Lett. A，2000，276：8；D'Ariano G M，Lo Presti P，Sacchi M F. Phys. Lett. A，2000，272：32；Horodecki M，Horodecki P，Horodecki R. Phys. Rev. A，1999，60：1888；Albeverio S，Fei S M，Yang W L. Phys. Rev. A，2002，66：012301

[5] Shor P W, Phys. Rev. A, 1995,52:R2493 ; Steane A M, Phys. Rev. Lett., 1996,77:793 ; Bennett C H, DiVincenzo D P, Smolin J A *et al*. Phys. Rev. A, 1996,54:3824
[6] Ekert A. Phys. Rev. Lett., 1991,67:661; Deutsch D, Ekert A, Rozas P *et al*. Phys. Rev. Lett., 1996,77:2818; Fuchs C A , Gisin N, Griffiths R B *et al*. Phys. Rev. A,1997, 56:1163; Deng F G, Long G L. Phys. Rev. A, 2004,69:052319
[7] Żukowski M, Zeilinger A, Horne M A *et al*. Phys. Rev. Lett., 1993, 71: 4287; Bose S, Vedral V, Knight P L, Phys. Rev. A,1998,57:822;1999,60:194; Lu C Y, Yang T, Pan J W. Phys. Rev. Lett., 2009,103:020501
[8] Bennett C H, Wiesner S J. Phys. Rev. Lett., 1992,69:2881
[9] Bennett C H, DiVincenzo D P, Shor P W *et al*. Phys. Rev. Lett., 2001,87:077902; Ye M Y, Zhang Y S, Guo G C. Phys. Rev. A, 2004,69:022310; Zhao Z, Yang T, Chen Y A *et al*. Phys. Rev. Lett., 2003,90:207901
[10] Schrödinger E. Proc. Cambridge Philos. Soc.,1935, 31:555
[11] Horodecki R, Horodecki P, Horodecki M *et al*. Rev. Mod. Phys., 2009, 81:865; Gühne O, Toth G. Physics Reports, 2009,474:1
[12] Einstein A, Podolsky E,Risen N. Phys. Rev.,1935, 47:555
[13] Bell J S. Physics (N. Y.) ,1964,1:195
[14] Clauser J F, Horne M A, Shimony A *et al*. Phys. Rev. Lett., 1969,23:880
[15] Mermin N D. Phys. Rev. Lett., 1990,65:1838; Ardehali M. Phys. Rev. A,1992,46:5375; Belinskii A V,Klyshko D N. Phys. Usp., 1993,36:653
[16] Pan J W, Bouwmeester D, Daniell M *et al*. Nature,2000, 403:515
[17] Cabello A. Phys. Rev. Lett., 2010,104:220401
Amselem E, Rådmark M,Bourennane M *et al*. Phys. Rev. Lett., 2009,103:160405
[18] Chen K, Albeverio S,Fei S M. Phys. Rev. A, 2006,74(R): 050101;Sun B Z,Fei S M. Phys. Rev. A,2006,74:032335
[19] Chen J L, Wu C F, Kwek L C *et al*. Phys. Rev. Lett., 2004, 93:140407
[20] Li M, Fei S M. Phys. Rev. Lett., 2010,104:240502
[21] Horodecki M,Horodecki P, Horodecki R. Phys. Lett. A, 1996, 223:1
[22] Peres A. Phys. Rev. Lett.,1996,77:1413;Życzkowski K, Horodecki P. Phys. Rev. A, 1998,58:883
[23] Horodecki M, Horodecki P, Horodecki R. Phys. Lett. A, 1996,223:1
[24] Horodecki M, Horodecki P. Phys. Rev. A,1999, 59:4206
[25] Chen K,Wu L A. Quant. Inf. Comput., 2003,3:193;Chen K, Wu L A. Phys. Lett. A, 2002,306:14 ;Rudolph O. Phys. Rev. A,2003, 67:032312
[26] Yu S X, Pan J W, Chen Z B *et al*. Phys. Rev. Lett., 2003, 91:217903
[27] Terhal B M. Phys. Lett. A, 2000,271:319
[28] Nielsen M A, Kempe J. Phys. Rev. Lett., 2001,86:5184
[29] Albeverio S, Chen K,Fei S M. Phys. Rev. A, 2003,68:062313
[30] Horodecki P. Phys. Lett. A, 1997,232:233
[31] Horodecki P, Lewenstein M, Vidal G *et al*. Phys. Rev. A, 2000,62: 032310;Albeverio S, Fei S M,Goswami D. Phys. Lett. A, 2001,286:91;Fei S M, Gao X H, Wang X H *et al*. Phys. Lett. A, 2002,300:555
[32] Fei S M, Gao X H, Wang X H *et al*. Phys. Rev. A, 2003, 68:022315
[33] de Vicente J I. Quantum Inf. Comput., 2007,7:624
[34] Hassan A S M, Joag P S. quant-ph/0704
[35] Hofmann H F, Takeuchi S. Phys. Rev. A, 2003,68:032103
[36] Gühne O. Phys. Rev. Lett., 2004,92:117903
[37] Gühne O,Hyllus P, Gittsovich O *et al*. Phys. Rev. Lett., 2007 ,99:130504
[38] Usha Devi A R,Uma M S, Prabhu R *et al*. Phys. Lett. A, 2007,364:203
[39] Usha Devi A R,Prabhu R,Rajagopal A K. Phys. Rev. Lett., 2007,98:060501
[40] Gühne O, Mechler M, Toth G *et al*. Phys. Rev. A, 2006, 74:010301(R)
[41] de Vicente J I. Quantum Inf. Comput., 2007, 7:624
[42] Leinaas J M, Ovrum E. Phys, Rev. A, 2006,74:012313
[43] Li M, Fei S M, Wang Z X. Commun. Theor. Phys., 2008, 50:1307
[44] Li M, Fei S M, Wang Z X. Int. J. Quant. Inform.,2008, 6:859
[45] Li M, Fei S M, Wang Z X. J. Phys. A, 2008,41 (Fast track commun.):202002
[46] Gühne O, Mechler M, Töth G *et al*. Phys. Rev. A, 2006, 74:010301(R)
[47] Bennett C H, DiVincenzo D P, Smolin J A *et al*. Phys. Rev. A, 1996,54:3824;Horodecki M. Quant. Inf. Comp., 2001, 1:3 ;Bruß D. J. Math. Phys.,2002, 43:4237;Plenio M B, Virmani S. quant-ph/0504163
[48] Hill S, Wootters W K. Phys. Rev. Lett., 1998,78:5022 ; Wootters W K. Phys. Rev. Lett.,1998, 80:2245
[49] Vollbrecht K G H, Werner R F. Phys. Rev. A, 2001,64: 062307
[50] Terhal B M, Vollbrecht K G H. Phys. Rev. Lett.,2000, 85:2625
[51] Fei S M, Jost J, Li-Jost X Q *et al*. Phys. Lett. A, 2003, 310:333; Fei S M, Wang Z X, Zhao H. Phys. Lett. A, 2004,329:414
[52] Chen K,Albeverio S,Fei S M, Phys. Rev. Lett.,2005, 95: 210501
[53] Uhlmann A, Phys. Rev. A,2000,62:032307; Rungta P, Buzek V, Caves C M *et al*. Phys. Rev. A, 2001, 64: 042315;Albeverio S, Fei S M. J. Opt. B, 2001,3:323
[54] Chen K,Albeverio S,Fei S M. Phys. Rev. Lett., 2005,95: 040504
[55] de Vicente J I. Phys. Rev. A, 2007,75:052320; Zhang C J, Zhang Y S, Zhang S *et al*. Phys. Rev. A, 2007,76:012334;

Li M, Fei S M, Wang Z X. J. Phys. A, 2008, 41: 202002
[56] Gao X H, Fei S M, Wu K. Phys. Rev. A, 2007, 74: 050303(R)
[57] Zhang C J, Gong Y X, Zhang Y S *et al*. Phys. Rev. A, 2008, 78: 042308; Mintert F, Buchleitner A. Phys. Rev. Lett., 2007, 98: 140505; Aolita L, Buchleitner A, Mintert F. Phys. Rev. A, 2008, 78: 022308
[58] Vedral V, Plenio M B, Rippin M A *et al*. Phys. Rev. Lett., 1997, 78: 2275; Vedral V, Plenio M B. Phys. Rev. A, 1998, 57: 1619
[59] Życzkowski K, Horodecki P, Sanpera A *et al*. Phys. Rev. A, 1998, 58: 883; Vidal G, Werner R F. Phys. Rev. A, 2002, 65: 032314
[60] Coffman V, Kundu J, Wootters W K. Phys. Rev. A, 2000, 61: 052306
[61] DiVincenzo D P, Fuchs C A, Mabuchi H *et al*. The Entanglement of assistance, Lecture Notes in Computer Science. Vol. 1509 (Berlin: Springer-Verlag, 1999), pp. 247—257; Cohen O. Phys. Rev. Lett., 1998, 80: 2493
[62] Li Z G, Fei S M, Albeverio S *et al*. Phys. Rev. A, 2009, 80: 034301
[63] Yu T, Eberly J H. Phys. Rev. Lett., 2004, 93: 140404; ibid., 2006, 97: 140403; Quantum Inf. Commun., 2007, 7: 459; Science, 2009, 323: 598; Eberly J H, Yu T. Science, 2007, 316: 555; Almeida M P, de Melo F, Hor-Meyll M *et al*. Science, 2007, 316: 579; Zhou D L, Sun B, Sun C P *et al*. Phys. Rev. A, 2005, 72: 040302
[64] Almeida M P *et al*., Science, 2007, 316: 579; Salles A *et al*. Phys. Rev. A, 2008, 78: 022322; Laurat J *et al*. Phys. Rev. Lett., 2007, 99: 180504
[65] Konrad T, De Melo F, Tiersch M *et al*. Nature Physics, 2008, 4: 99
[66] Li Z G, Zhao M J, Fei S M *et al*. Phys. Rev. A, 2010, 81: 042312
[67] Liu Z, Fan H. Phys. Rev. A, 2009, 79: 032306
[68] Bennett C H, Brassard G, Popescu S *et al*. Phys. Rev. Lett., 1996, 76: 722; Bennett C H, DiVincenzo D P, Smolin J A *et al*. Phys. Rev. A, 1996, 54: 3824
[69] Horodecki M, Horodecki P, Horodecki R. Phys. Rev. Lett., 1998, 80: 5239
[70] Ou Y C, Fan H, Fei S M. Phys. Rev. A, 2008, 78: 012311
[71] Song W, Chen L, Zhu S L. Phys. Rev. A, 2009, 80: 012331
[72] Rains E M. IEEE Transactions on Information Theory, 2000, 46: 54; Grassl M, Rötteler M, BethT. Phys. Rev A, 1998, 58: 1833; Makhlin Y. Quant. Info. Proc., 2002, 1: 243; Linden N, Popescu S, Sudbery A. Phys. Rev. Lett., 1999, 83: 243; Albeverio S, Fei S M, Parashar P *et al*. Phys. Rev. A, 2003, 68 (R): 010303; Fei S M, Jing N H. Phys. Lett. A, 2005, 342: 77
[73] Lo H K, Popescu S. Phys. Rev. A, 2001, 63: 022301; Nielsen M A. Phys. Rev. Lett., 1999, 83: 436
[74] Dür W, Vidal G, Cirac J I. Phys. Rev. A, 2000, 62: 062314; Verstraete F, Dehaene J, De Moor B *et al*. Phys. Rev. A, 2002, 65: 052112; Miyake A, Verstraete F. Phys. Rev. A, 2004, 69: 012101