

# 薄膜型负质量密度声学超常介质

梅 军<sup>1,2</sup> 杨 旻<sup>1</sup> 杨志宇<sup>1</sup> 陈傲轩<sup>1</sup> 沈 平<sup>1,†</sup>

(1 香港科技大学物理学系 香港九龙清水湾)

(2 武汉大学物理科学与技术学院 武汉 430072)

**摘 要** 文章作者提出了一种结构简单、易于实现的薄膜型声学超常介质, 不仅从实验上证实了它能够在 100Hz 到 1000Hz 的低频范围内以 200 倍的幅度打破声波衰减的质量密度定理, 而且还给出了相应的理论解释. 由于薄膜弱小的弹性模量, 对于一块周边被硬边框所固定的小面积的弹性薄膜而言, 仍然存在着各种不同的低频振荡模式. 这些振荡模式的本征频率可以通过在薄膜的中央放置一个小的质量块而调整. 文章作者惊奇地发现, 在位于两个最低的本征频率之间的某个特定频率处, 入射的声波几乎完全被反射, 此时整个薄膜面内的平均法向位移为零. 借助于有限元数值模拟方法, 也发现在全反射频率附近薄膜的动态质量密度是负的. 实验结果和理论计算符合得非常好. 与此同时还发现, 微波在某些频率全透射通过金属分型结构的现象可以用类似的机制来解释, 而且这些全透射频率也是位于两个局域共振频率之间.

**关键词** 弹性薄膜, 声学超常介质, 动态质量密度, 有效介质, 复合介质, 波的传播

## Membrane-type acoustic metamaterial with negative dynamic mass

MEI Jun<sup>1,2</sup> YANG Min<sup>1</sup> YANG Zhi-Yu<sup>1</sup> CHAN N. H.<sup>1</sup> SHENG Ping<sup>1,†</sup>

(1 Department of Physics, The Hong Kong University of Science and Technology, Clear Water Bay, Hong Kong, China)

(2 Department of Physics, Wuhan University, Wuhan 430072, China)

**Abstract** We present the experimental realization and theoretical explanation of a membrane-type acoustic metamaterial of very simple structure, capable of breaking the mass density law of sound attenuation in the 100—1000Hz regime by a significant margin ( $\sim 200$  times). Due to the membrane's weak elastic moduli, low frequency oscillation patterns can be found even in a small elastic film with fixed boundaries defined by a rigid grid. The vibrational eigenfrequencies can be tuned by placing a small mass at the center of the membrane sample. Near-total reflection is achieved at a frequency in between two eigenmodes where the in-plane average of the normal displacement is zero. By using finite element simulations, a negative dynamic mass is explicitly demonstrated at frequencies around the total reflection frequency. Excellent agreement between theory and experiment is obtained. We also show that the present mechanism can explain the phenomenon of total microwave transmission through subwavelength slits in metallic fractals, at frequencies intermediate between two local resonances.

**Keywords** membrane, acoustic metamaterial, dynamic mass density, effective medium, composites, wave propagation

声波或弹性波超常介质<sup>[1-7]</sup>进一步拓展了自然材料和声子晶体所能够提供的弹性波的性质范畴. 特别值得一提的是, 负动态质量密度<sup>[7]</sup>的复合介质

具有奇特的能力, 它可以使听觉频率范围的声波在

2009-05-26 收到

† 通讯联系人. Email: Sheng@ust.hk

亚波长尺度显著地衰减,从而毫不留情地打破了质量密度定理<sup>1)</sup>的预言.在这里,“负”的动态质量密度意味着:力和加速度的空间平均值在相位上是相反的,而且具有这种微观结构的复合介质会表现出不同于牛顿第二定律的宏观动力学性质<sup>[8]</sup>.随着社会的发展和科技的进步,人们最终可能会需要这样一种超常介质:它既薄又轻,是薄膜状的,能够在100Hz到1000Hz范围内完全有效地阻挡住声波;然而不幸的是,根据质量密度定理,这种频率的声波又恰好是最难挡住的.从某种意义上来说,一层薄膜就能挡住低频声波是违反人们的“直觉”的,因为很难想象弹性薄膜能够有效地吸收或反射声波.以上观点的一个有力论据是:全反射必然要求在反射面上形成波的节点(也就是波节).但是,由于在垂直于表面的方向上仅具有微弱的弹性回复力,弹性薄膜应当是不能形成全反射所必需的节点平面的.

在本文中,我们将不仅从实验上证实,而且从理论上解释了一种薄膜型声学超常介质<sup>[1]</sup>,它的动态质量密度在100Hz到1000Hz范围内任何一个特定频率附近都有可能是负的.通过把不同工作频率的薄膜一层一层地叠加起来,我们就可以在相对较宽的频带范围内实现负的动态质量密度.正是由于薄膜弱小的弹性模量,对于一块周边被硬边框所固定的小面积的弹性薄膜而言,依然存在着各种各样的低频振荡模式.而且这种振荡模式的频率可以通过在薄膜的中央放置一个小的(用作配重的)质量块而调整.我们发现,在位于两个本征频率之间的某个特定频率处,整个薄膜面内的平均法向位移为零,从而导致声波通过薄膜的远场透射非常小.借助于有限元数值模拟方法,我们证实,薄膜的动态质量密度在全反射频率附近变成负的.实验结果和理论计算符合得非常好.

这种超常介质的基本单元是由一个圆形的弹性薄膜所构成.薄膜的直径为20mm,厚度0.28mm,周边被一个相对较硬的边框所固定,并且有一个小的质量块附着在薄膜中央,声波垂直入射到薄膜上.我们发现,如果换作其他形状的薄膜,比如正方形的,效果仍然是同样的.附着在薄膜中央的小质量块实际上是一个直径为6mm的小圆盘,它的质量可以通过在上面黏上蓝丁胶而逐渐增加到300mg.

透射振幅和相位的测量是在一个经过改进后的阻抗导管装置中进行的,实验细节可参考文献<sup>[9]</sup>.简单地说,实验装置是由两个BK公司的2026型阻抗导管所组成,样品被夹在两者当中.前导管在一端

设有一个扬声器来产生入射的平面波.在前导管中还有两个探头用来探测入射波和反射波.第三个探头设在后导管中,用来探测透射波.后导管的一端接有吸声海绵,用来消除不必要的反射.分析从三个探头传出的信号可以得到透射波和反射波的振幅以及它们的位相.

图1(a)画出了实验测量得到的透射振幅(实线)和位相(点线)谱,而虚线则显示了由样品平均面密度 $0.1\text{ kg/m}^2$ 所决定的质量密度定理<sup>[10]</sup>.很明显,有两个透射峰,分别位于145Hz和984Hz.但是最令人惊奇的也许是在237Hz附近的透射谷,它以200倍的幅度彻底打破了质量密度定理的预言,意味着这个频率的声波被弹性薄膜几乎全部反射.下面我们将会看到,这一现象的直接原因是,在该频率处薄膜的动态质量密度是负的,而且它是弹性薄膜存在多个低频本征振荡模式所导致的必然结果.

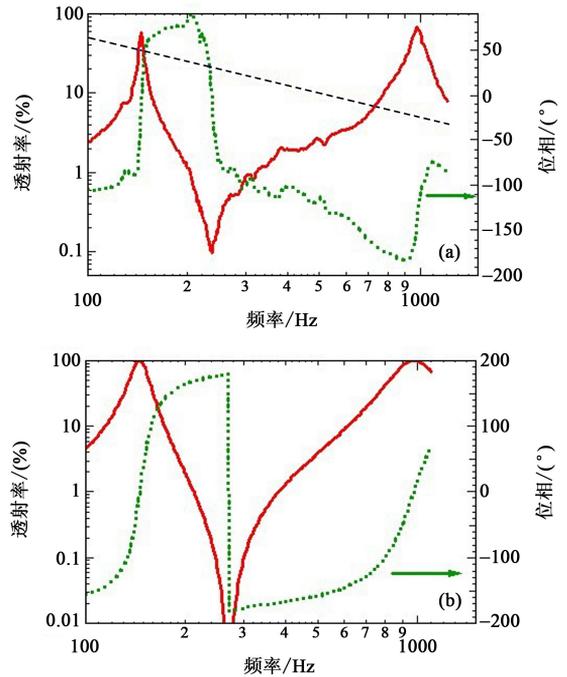


图1 (a) 实验测量得到的薄膜系统(薄膜+配重)的透射振幅谱(实线)和相位谱(点线).虚线显示了根据质量密度定理所得到的,由薄膜系统的平均面质量密度所决定的透射振幅的位置;(b) 理论计算得到的薄膜系统的透射振幅谱(实线)和相位谱(点线)

在图1(b)中,我们画出了采用COMSOL MULTIPHYSICS(一种基于有限元方法的软件包)计算得到的透射振幅(实线)和位相(点线)谱.在模

1) 所谓的质量密度定理是指,声波通过固体物质的振幅透射系数 $T$ 反比于 $\rho\omega$ 三个物理量的乘积,其中 $\rho$ 和 $l$ 分别是固体的质量密度和厚度, $\omega$ 是声波的角频率.因此低频声波的穿透性是非常强的,很不容易被挡住.

拟计算中,圆形的弹性薄膜周边是固定的,在其中央处有一个半径为 60mm、质量为 300mg 的小圆形铁盘,起着配重的作用.弹性薄膜的质量密度、杨氏模量和泊松比分别取为  $980\text{kg/m}^3$ 、 $2 \times 10^5\text{pa}$  和 0.49.小铁盘的杨氏模量和泊松比分别是  $2 \times 10^{11}\text{pa}$  和 0.29.空气的参数则采用一个标准大气压下的标准值:密度  $1.29\text{kg/m}^3$ 、声速  $340\text{m/s}$ .从图 1(b)中可以看到,有两个透射峰,分别处于 146Hz 和 974Hz;一个透射谷,位于 272Hz.很明显,正入射时理论和实验符合得非常好.由于声波在空气中的波长和样品的尺寸相差好几个量级,以上这些透射谱的特征并不依赖于声波的入射角.

整个薄膜系统的有效动态质量密度可以通过将平均压力除以平均加速度而获得,也就是说  $\rho_{\text{eff}} = \langle \sigma_{zz} \rangle / \langle a_z \rangle$ ,其中  $\langle \rangle$  表示在整个薄膜系统中(包括薄膜和配重)的体平均值,而  $\sigma_{zz}$  和  $a_z$  分别表示在垂直于薄膜表面方向上的压力和加速度.图 2 显示了我们的计算结果.可以看到,当频率逐渐增大到靠近透射谷时,有效动态质量密度由正变为负,然后在透射谷处又跳变为正,最终在高频处趋近于整个系统的面积平均值(大约  $0.1\text{kg/m}^2$ ).在图 2 中还画出了平面内平均法向位移(点线)随频率的变化曲线,它在两个本征频率处取极大值,在透射谷处趋近于零.下面我们将会看到,这两种现象之间存在着某种联系.

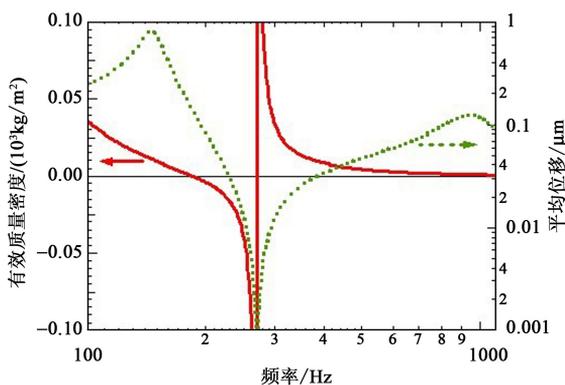


图 2 左轴:计算得到的薄膜系统的有效动态质量密度(实线),其定义参见正文;右轴:入射声波的压强振幅为  $10^3\text{Pa}$  时,薄膜系统的面积内平均法向位移振幅(点线).可以看到,在薄膜系统中,负的动态质量密度和  $|\langle u_z \rangle| \sim 0$  的位置是重合的.它们是导致低频声波被全反射的物理根源

我们的模拟结果还显示:第一个低频透射峰是起源于薄膜和配重(也就是小质量块)一同整体运动的本征模式,而频率较高的第二个透射峰则是由薄膜振动但配重几乎不动的本征模式所引起的.这就导致第一个透射峰的频率强烈地依赖于配重的质

量,而第二个透射峰的频率则几乎与配重质量无关.实验测得的对应于不同配重质量的透射谱确实显示了这样的特征.第一个透射峰和透射谷的频率随着配重质量的减小向高频方向移动得非常明显,而第二个透射峰的位置却移动得很少.我们在表 1 中列出了对应于不同质量的所有的透射峰和透射谷的频率值,其中理论计算值用括号表示.我们看到,实验和理论符合得较好.对于透射峰频率的位置,实验和理论值的差异在 10% 以内;而透射谷的位置,差异在 20% 以内.最重要的是,理论计算完全重复了实验观测到的透射谱随着配重质量的变化规律.

表 1 实验测量和理论计算得到的两个透射峰和一个透射谷的频率值,括号中的数字是理论计算值

配重质量/mg	第一个透射峰/Hz	透射谷/Hz	第二个透射峰/Hz
50	286 (322)	555 (627)	1018 (1036)
100	223 (242)	376 (458)	1000 (1000)
150	192 (202)	340 (378)	976 (987)
200	166 (177)	284 (329)	1025 (981)
250	154 (159)	259 (296)	984 (977)
300	145 (146)	237 (272)	984 (974)

前面讲过,透射谷频率的变化趋势与最低频透射峰是一致的.这是可以理解的,因为在透射谷处的振动模式可以表达为两个本征振动模式的线性叠加.只不过在叠加的时候,这两个本征模式是反相的.因为我们知道,一个共振频率为  $\omega_1$  的线性振子,在受到频率为  $\omega$  的振动的驱动下,它的无阻尼振动的振幅正比于  $1/(\omega - \omega_1)$ .由于透射谷的频率大于第一个透射峰的频率  $\omega_1$ ,小于第二个透射峰的频率  $\omega_2$ ,而且这两个本征模式的行为也是相互独立的,这就导致了两个本征模式是反相叠加的.此外,透射谷附近的动态质量密度的行为其实是与以下事实密切相关的:在该频率处整个薄膜系统的法向平均位移通过零点.这是容易理解的,因为  $\rho_{\text{eff}}^{-1} \propto \langle a_z \rangle \sim \omega^2 \langle u_z \rangle$ ,其中  $u_z$  表示法向位移.那么在  $\langle u_z \rangle$  经过零点的过程中, $\rho_{\text{eff}}$  必定会经历由正变为负,然后在透射谷处又跳变为正的变化过程.

事实上,我们可以把位移作如下分解, $u = \Delta u + \langle u_z \rangle$ ,其中远场的透射是由于  $\langle u_z \rangle$  引起的,而近场效应则体现在  $\Delta u$  中.根据傅里叶变换的知识,我们知道  $\langle u_z \rangle$  部分所产生的波场,它的最大横向波矢分量一定位于  $k_{\parallel} = 0$  处,如图 3(a)所示.于是,薄膜所作的这种“活塞式”整体运动所产生的透射场也会是一个平面波,其

法向波矢与入射的平面波一样,满足  $k_{\perp}^2 = \omega^2/c^2 - k_{\parallel}^2 = \omega^2/c^2$ ,其中  $c$  是空气中的声速. 特别地,  $\langle u_z \rangle = 0$  意味着全反射. 相反地,  $\Delta u$  部分所产生的波场,它的最大横向波矢分量一定位于  $k_{\parallel} > \omega/c$  处,如图 3(b)所示,因此只能和透射方向上的消逝波联系起来. 事实上,声波的远场透射振幅可以表达为

$$T = \left[ 1 - i \left( 2\alpha\omega \sum_{\alpha} \frac{\langle u_z^{\alpha} \rangle^2}{m_{\alpha}(\omega_{\alpha}^2 + 2ib\omega - \omega^2)} \right)^{-1} \right]^{-1}, \quad (1)$$

其中  $T$  是透射振幅,  $\rho$  是空气密度,  $b$  是阻尼系数,  $\omega$  是入射波频率,而  $\omega_{\alpha}$ 、 $m_{\alpha}$  和  $\langle u_z^{\alpha} \rangle$  分别是第  $\alpha$  个本征振动模式的频率、广义质量(定义为  $m_{\alpha} = \int \rho(\mathbf{r}) |\mathbf{u}_{\alpha}(\mathbf{r})|^2 d\mathbf{r}$ )和法向位移的面积分.

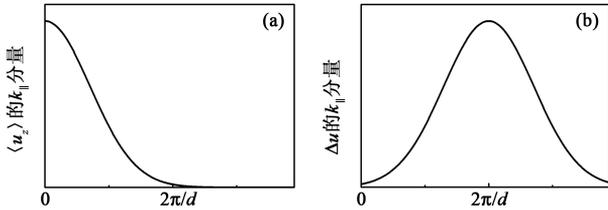


图 3 (a)  $\langle u_z \rangle$  部分波场的横向波矢分量  $k_{\parallel}$  分布图. 由于  $k_{\parallel}^2 + k_{\perp}^2 = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2$ , 且  $k_{\parallel} \sim 0$ , 所以  $k_{\perp} \sim \frac{2\pi}{\lambda}$ , 因此它对应于传播模式; (b)  $\Delta u$  部分波场的横向波矢分量  $k_{\parallel}$  分布图. 由于  $k_{\parallel}^2 + k_{\perp}^2 = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2$ , 且  $k_{\parallel} \sim \frac{2\pi}{d}$ , 所以  $k_{\perp}$  是个纯虚数, 因此它对应于衰减模式

必须指出,弹性薄膜的全反射与刚性平面的全反射是不同的,对于后者,一定存在着波节平面. 由于橡皮薄膜弱小的弹性模量,它的本征振动模式的横向波矢分量  $k_{\parallel}$  必定与薄膜直径  $d$  的倒数在同一数量级上. 由于  $d$  是在厘米量级,远小于低频声波在空气中的波长  $\lambda$ ,这就导致了薄膜本征振动模式所产生的声波场在几百 Hz 的频率范围内一定有  $k_{\parallel} \gg k_0 = \omega/c = 2\pi/\lambda$ . 结果,法向波矢分量  $k_{\perp}$  是一个纯虚数,且  $|k_{\perp}| \gg k_0$ . 这就意味着在  $\langle u_z \rangle = 0$  的情况下,声波透过薄膜之后在法向上是衰减的,并且在量级为  $2\pi|k_{\perp}|$  的尺度上就会表现出明显的指数衰减行为.

在图 4 中我们画出了在 272Hz 的透射谷处,模拟计算得到的法向速度场的分布. 的确,在靠近橡皮薄膜的表面处,我们看到了明显的消逝波特征. 根据以上的简单分析,我们可以用下式来估算声波的衰减长度  $l$ ,

$$l = \log 2 / \sqrt{\left(\frac{\pi}{d}\right)^2 - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2}. \quad (2)$$

对于实验参数  $d=2\text{cm}$ ,  $\omega=272\text{Hz}$ ,我们得到衰减长度  $l$  大约是 1.6mm,这和图 4 中的情形是一致的.

从某种意义上来说,这种由于动态有效质量密

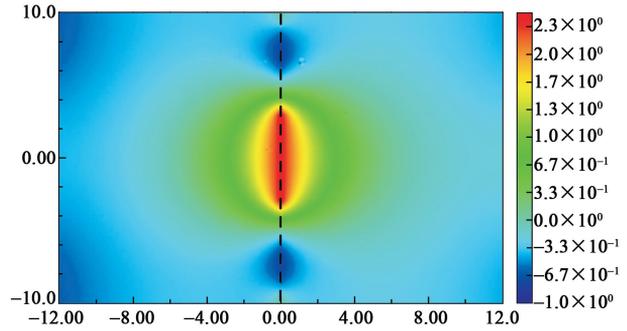


图 4 在 272Hz 的透射谷处,模拟计算得到的薄膜附近的法向速度场的分布,其中黑色虚线表示静止时薄膜的位置. 入射声波的强度与图 2 一致. 横坐标和纵坐标的单位都是 mm,速度的单位是 mm/s. 薄膜表面附近的阻尼特征显示出声波的衰减长度约为 1.6mm,这与方程(2)的预测是完全一致的

度为零所导致的声波的全反射现象,与前几年发现的电磁波通过分形结构的全透射现象有异曲同工之妙<sup>[11, 12]</sup>. 研究发现,当电磁波入射到由细金属丝相互连接所形成的“H 形”平面分形结构(如图 5(a)所示)上时,在某些频率处会产生全反射现象,这些全反射频率对应于分形结构的本征共振频率. 最令人感兴趣的是,在每两个本征共振频率(也就是全反射频率)中间,都存在着一个特定的频率——在该频率(全透射频率)处电磁波可以全部透射通过平面分形结构,如图 5(b)所示.乍一看来,这种异常透射现象也是违反“直觉”的. 因为分形结构中金属线之间的距离很近,比(全透射频率处)电磁波的波长要小很多. 电磁波怎么可能透过来呢? 如果是这样的话,人们日常生活中经常用到的微波炉岂不是很不安全吗? 这中间的奥妙就在于“分形”结构与普通的网状结构的区别. 我们知道,入射的电磁场一定会在金属线中感应出电流,正是由于分形结构的“自相似性”,在全透射频率处,这些感应电流的分布也要遵循一定的规律:两个相邻的共振结构中所产生的感应电流幅度相当,但是相位相反. 由于这些感应电流彼此之间可以相互抵消,从总体上来看,在全透射频率处,整个“H 形”平面分形结构中所产生的总感应电流为零. 此时,它更像是一层介电材料,对电磁波没有任何的阻碍作用. 于是,电磁波在全透射频率处就可以毫无阻挡地透射通过分形结构. 这种因有效电流为零所导致的电磁波的全透射现象,与本文中因有效质量密度为零所导致的声波的全反射现象之间,的确存在着某些相似之处.

以上的薄膜型声学超常介质从本质上来讲,可以看作是早期提出的局域共振声学材料<sup>[3]</sup>的二维版本. 为了比较这两种情况,我们做了一个球形的质量

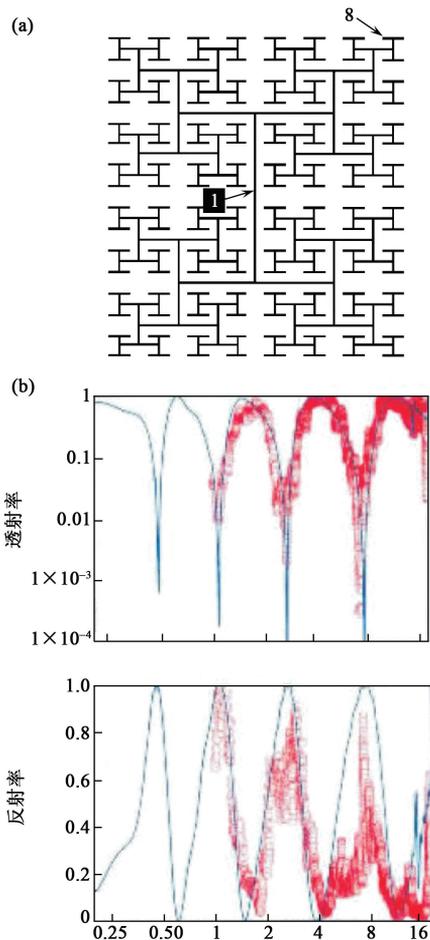


图5 (a)“H形”分形结构示意图;(b)入射电磁波垂直于入射面时的透射谱和反射谱,其中频率的单位是GHz(取自于参考文献[9]中的图5和图6)

块被橡皮层包裹所形成三维结构<sup>[9]</sup>的数值模拟。结果显示,在最低频的本征振动模式中,质量块和橡皮包层是整体振动的;而在次低频的本征模式中,基本上只有橡皮包层在振动,并且在这两个本征频率之间,也存在着一个透射谷,它的振动模式是两个本征振动模式的组合。这样一来,三维结构和二维结构的声学超常介质就有了同样的物理机制。这种认识是非常重要的,因为它使得负动态质量密度的现象可以推广到其他的空间构型。

另外一点需要指出的是,既然负质量密度所导致的透射谷总是出现在两个最低频的本征振动频率之间,那么薄膜和配重之间的弹性参数的较大差异,就不再是一个必须满足的严格条件。只要配重的弯曲模式(此时配重的一部分与另一部分之间反相振动)的本征频率远大于最低频的两个本征模式,负质量密度透射谷的存在就不会受到影响。但是,配重的弯曲模式会改变两个最低频本征模式(此时配重的各个部分是整体振动的)的频率,从而影响到透射谷

频率的高低,尽管不会影响到透射谷的存在。

我们认为,这种弹性薄膜共振所导致的声波的全反射现象,在实际生活中是具有一定的应用前景的。比如说,我们可以首先把多层薄膜(在纵向上)叠加起来,形成一个“面板”,使得在较宽的频率范围内声波都很难透射过去;然后再把很多个这样的“面板”横向排列在一个平面上,形成一堵“墙”,从而在较大的空间内实现声波的强反射。具体可以这样来做:先用硬性材质做一个很大的网状框架,使得每个网格的大小都与一个“面板”的横向宽度相当,再将每一个网格中都填充进一个“面板”,最终就形成了一面可以挡住声波的“墙”。当然,为了达到理想的效果,在实际应用中必须要保证一定的条件:首先,当多层薄膜叠加在一起形成一个“面板”的时候,就必须保证每个“面板”都具有良好的密封性;其次,每个面板的宽度都要和网格的大小严格对应,以确保没有声波从缝隙中漏过,这就与日常生活中窗户的边框必须与玻璃的大小相匹配是一样的道理;第三,用来固定“面板”的硬性边框,它的材质必须具有足够的硬度(或刚性),至少要保证在多个薄膜同时共振时,硬边框材料的形变和位移都小得可以忽略不计。

总而言之,我们成功地制备并且刻画了一种薄膜型声学超常介质,它能够在200Hz到300Hz的低频范围内实现负的动态质量密度,从而实现入射声波的全反射。理论解释与实验现象符合得非常好。我们期待这种有趣现象的发现,对于人们加深对经典波的理解有所帮助。

### 参考文献

- [1] Yang Z, Mei J, Yang M *et al.* Phys. Rev. Lett., 2008, 101:204301
- [2] Liu Z, Zhang X, Mao Y *et al.* Science, 2000, 289: 1734
- [3] Mei J, Liu Z Y, Wen W J *et al.* Phys. Rev B, 2007, 76: 134205
- [4] Liu Z Y, Chan C T, Sheng P. Phys. Rev. B, 2005, 71: 014103
- [5] Ho K M, Chun C K, Yang Z *et al.* App. Phys. Lett., 2003, 83:5566
- [6] Liu Z Y, Chan C T, Sheng P. Phys. Rev. B, 2000, 62:2446
- [7] Mei J, Liu Z Y, Wen W J. Phys. Rev. Lett., 2006, 96: 024301
- [8] Milton G, Willis J. Proc. R. Soc. A, 2007, 463:855
- [9] Ho K M, Yang Z, Zhang X X. Applied Acoustics, 2005, 66: 751
- [10] See, for example, Brekhovskikh L M. Waves in Layered Media (New York: Academic Press, 1980) 2nd edition
- [11] Wen W J, Zhou L, Li J *et al.* Phys. Rev. Lett., 2002: 89: 223901
- [12] 温维佳,沈平.物理,2004,33:106[Wen W J, Sheng P. Wuli (Physics), 2004, 33:106 (in Chinese)]